

Formelsammlung

für die standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung (SRDP)

Angewandte Mathematik (BHS)

Berufsreifeprüfung Mathematik

Diese Formelsammlung ist ab dem Haupttermin 2017 (Mai 2017) als Hilfsmittel für die SRDP in Angewandter Mathematik und die Berufsreifeprüfung Mathematik zugelassen.

Ab dem Haupttermin 2020 (Mai 2020) ist diese Formelsammlung die **einzig** zugelassene Formelsammlung für die SRDP in Angewandter Mathematik und die Berufsreifeprüfung Mathematik.

Inhaltsverzeichnis

| Kapitel | Seite |
|---------------------------------------|-------|
| 1 Mengen | 3 |
| 2 Vorsilben | 3 |
| 3 Potenzen | 3 |
| 4 Logarithmen | 4 |
| 5 Quadratische Gleichungen | 4 |
| 6 Ebene Figuren | 5 |
| 7 Körper | 6 |
| 8 Trigonometrie | 7 |
| 9 Komplexe Zahlen | 8 |
| 10 Vektoren | 8 |
| 11 Geraden | 9 |
| 12 Matrizen | 10 |
| 13 Folgen und Reihen | 11 |
| 14 Änderungsmaße | 11 |
| 15 Wachstums- und Abnahmeprozesse | 12 |
| 16 Ableitung und Integral | 13 |
| 17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung | 14 |
| 18 Statistik | 15 |
| 19 Wahrscheinlichkeit | 16 |
| 20 Lineare Regression | 18 |
| 21 Finanzmathematik | 18 |
| 22 Investitionsrechnung | 19 |
| 23 Kosten- und Preistheorie | 20 |
| 24 Bewegungsvorgänge | 20 |
| Index | 21 |

1 Mengen

| | |
|-------------|---------------------------|
| \in | ist Element von ... |
| \notin | ist nicht Element von ... |
| \cap | Durchschnitt(smenge) |
| \cup | Vereinigung(smenge) |
| \subset | echte Teilmenge |
| \subseteq | Teilmenge |
| \setminus | Differenzmenge („ohne“) |
| $\{\}$ | leere Menge |

Zahlenmengen

| | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ | natürliche Zahlen |
| \mathbb{Z} | ganze Zahlen |
| \mathbb{Q} | rationale Zahlen |
| \mathbb{R} | reelle Zahlen |
| \mathbb{C} | komplexe Zahlen |
| \mathbb{R}^+ | positive reelle Zahlen |
| \mathbb{R}_0^+ | positive reelle Zahlen mit Null |

2 Vorsilben

| | | | | | |
|--------|----|-----------|--------|-------|------------|
| Tera- | T | 10^{12} | Dezi- | d | 10^{-1} |
| Giga- | G | 10^9 | Zenti- | c | 10^{-2} |
| Mega- | M | 10^6 | Milli- | m | 10^{-3} |
| Kilo- | k | 10^3 | Mikro- | μ | 10^{-6} |
| Hekto- | h | 10^2 | Nano- | n | 10^{-9} |
| Deka- | da | 10^1 | Pico- | p | 10^{-12} |

3 Potenzen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

| | | |
|---|--|---|
| $a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ | $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ | $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ | $a^1 = a$ | $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ |
| | | $a^{-1} = \frac{1}{a}$ |
| | | $a^0 = 1$ |

Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

| | | | |
|---|---------------------------------|-----------------------------------|--|
| $a, b \in \mathbb{R}_0^+; n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $n \geq 2$ | | | |
| $a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b$ | $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ | $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$ | $a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ mit $a > 0$ |

Rechenregeln

$$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; r, s \in \mathbb{Z}$$
$$\text{bzw. } a, b \in \mathbb{R}^+; r, s \in \mathbb{Q}$$

$$a, b \in \mathbb{R}_0^+; m, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ mit } m, n \geq 2$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Binomische Formeln

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

$$(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$$

4 Logarithmen

$$a, b, c \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } a \neq 1; x, r \in \mathbb{R}$$

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e): $\ln(b) = \log_e(b)$

dekadischer Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10): $\lg(b) = \log_{10}(b)$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad \log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \log_a(a) = 1 \quad \log_a(1) = 0 \quad \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1 \quad a^{\log_a(b)} = b$$

5 Quadratische Gleichungen

$$p, q \in \mathbb{R}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0$$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Zerlegung in Linearfaktoren:

$$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

6 Ebene Figuren

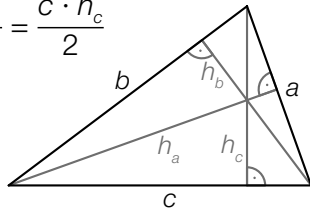
A ... Flächeninhalt
u ... Umfang

Dreieck

$$u = a + b + c$$

Allgemeines Dreieck

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

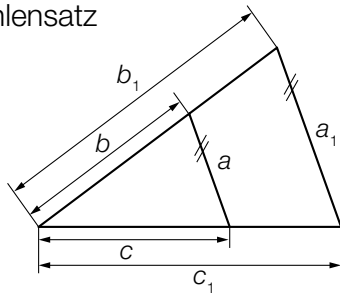


Heron'sche Flächenformel

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \text{ mit } s = \frac{a + b + c}{2}$$

Ähnlichkeit und Strahlensatz

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$



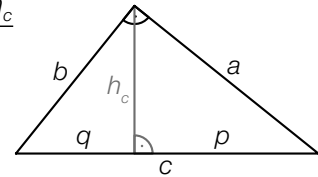
Rechtwinkeliges Dreieck
mit Hypotenuse c und Katheten a, b

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$h_c^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$



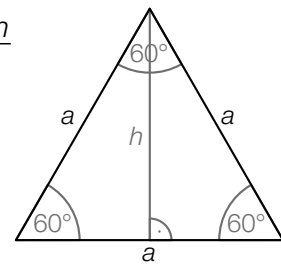
Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

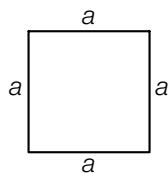


Viereck

Quadrat

$$A = a^2$$

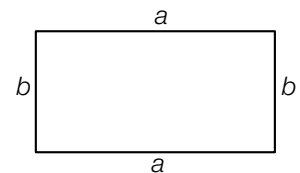
$$u = 4 \cdot a$$



Rechteck

$$A = a \cdot b$$

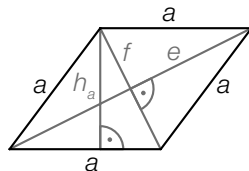
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Raute (Rhombus)

$$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

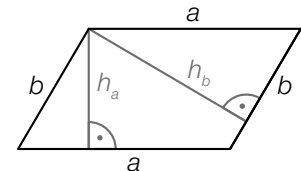
$$u = 4 \cdot a$$



Parallelogramm

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

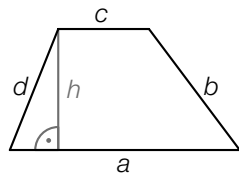
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Trapez

$$A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$

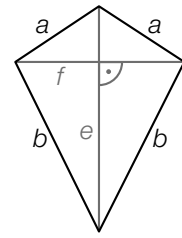
$$u = a + b + c + d$$



Deltoid

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

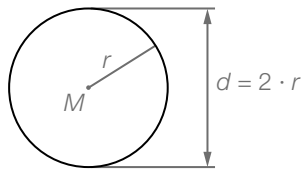
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Kreis

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

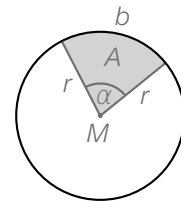


Kreisbogen und Kreis Sektor

α im Gradmaß ($^\circ$)

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$$



7 Körper

V ... Volumen

O ... Inhalt der Oberfläche

G ... Inhalt der Grundfläche

M ... Inhalt der Mantelfläche

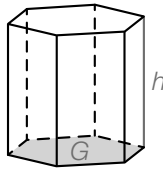
u_G ... Umfang der Grundfläche

Prisma

$$V = G \cdot h$$

$$M = u_G \cdot h$$

$$O = 2 \cdot G + M$$

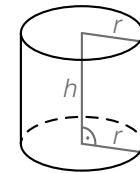


Drehzylinder

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

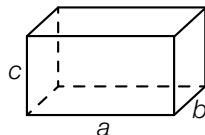
$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Quader

$$V = a \cdot b \cdot c$$

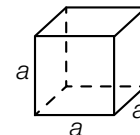
$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$



Würfel

$$V = a^3$$

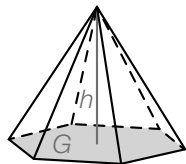
$$O = 6 \cdot a^2$$



Pyramide

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$O = G + M$$



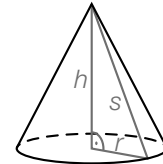
Drehkegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

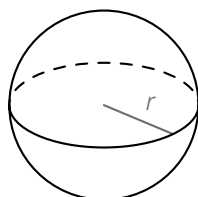
$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$



Kugel

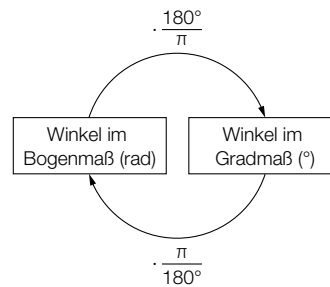
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$



8 Trigonometrie

Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß

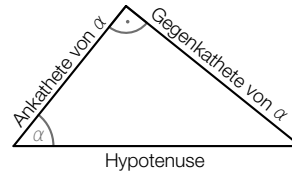


Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

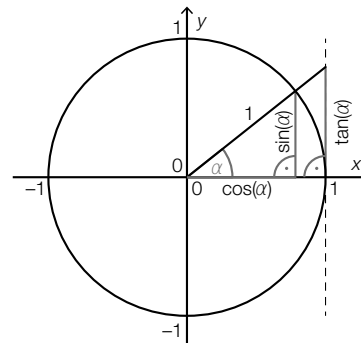
Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$



Trigonometrie im Einheitskreis

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ für $\cos(\alpha) \neq 0$



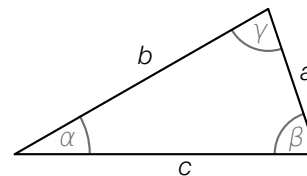
Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



Trigonometrische Flächenformel:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$

Allgemeine Sinusfunktion

A ... Amplitude

ω ... Kreisfrequenz

φ ... Nullphasenwinkel

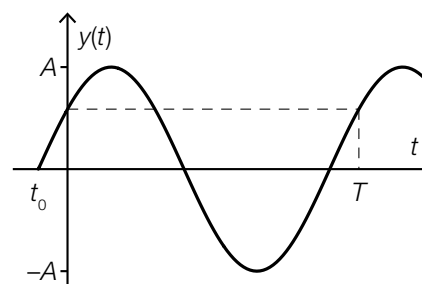
T ... Schwingungsdauer (Periodendauer)

f ... Frequenz

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$



9 Komplexe Zahlen

j bzw. i ... imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$ bzw. $i^2 = -1$

a ... Realteil, $a \in \mathbb{R}$

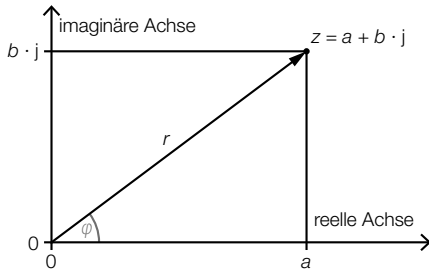
b ... Imaginärteil, $b \in \mathbb{R}$

r ... Betrag, $r \in \mathbb{R}_0^+$

φ ... Argument, $\varphi \in \mathbb{R}$

Komponentenform

$$z = a + b \cdot j$$



Polarformen

$$z = r \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{j \cdot \varphi} = (r; \varphi) = r \angle \varphi$$

Umrechnungen

$$a = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

10 Vektoren

P, Q ... Punkte

Vektoren in \mathbb{R}^2

Pfeil von P nach Q :

$$P = (p_1 | p_2), Q = (q_1 | q_2)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in \mathbb{R}^2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in \mathbb{R}^2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Betrag (Länge) eines Vektors in \mathbb{R}^2

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Normalvektoren zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^2

$$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } |\vec{a}| \neq 0$$

Vektoren in \mathbb{R}^n

Pfeil von P nach Q :

$$P = (p_1 | p_2 | \dots | p_n), Q = (q_1 | q_2 | \dots | q_n)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Betrag (Länge) eines Vektors in \mathbb{R}^n

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Winkel φ zwischen \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 mit $|\vec{a}| \neq 0$; $|\vec{b}| \neq 0$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Einheitsvektor \vec{a}_0 in Richtung \vec{a}

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \text{ mit } |\vec{a}| \neq 0$$

Vektorprodukt in \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

11 Geraden

| | |
|----------------|---|
| g ... Gerade | \vec{g} ... ein Richtungsvektor der Geraden g |
| | \vec{n} ... ein Normalvektor der Geraden g |
| | X, P ... Punkte auf der Geraden g |
| | k ... Steigung der Geraden g |
| | α ... Steigungswinkel der Geraden g |
| | $a, b, c, k, d \in \mathbb{R}$ |

Parameterdarstellung einer Geraden g in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$g: X = P + t \cdot \vec{g} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Gleichung einer Geraden g in \mathbb{R}^2

explizite Form der Geradengleichung:

$$g: y = k \cdot x + d \quad \text{dabei gilt } k = \tan(\alpha)$$

allgemeine Geradengleichung:

$$g: a \cdot x + b \cdot y = c$$

Normalvektordarstellung:

$$g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \quad \left. \vphantom{g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P} \right\} \text{ dabei gilt } \vec{n} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ f\u00fcr } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12 Matrizen

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}; i, j, m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{R}$$

Addition/Subtraktion von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl k

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

A ... $m \times p$ -Matrix

B ... $p \times n$ -Matrix

$C = A \cdot B$... $m \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Einheitsmatrix E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix A^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix A^{-1} einer quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise (n Gleichungen in n Variablen)

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Wenn die inverse Matrix A^{-1} existiert, dann gilt: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Produktionsprozesse

A ... quadratische Verflechtungsmatrix
 \vec{x} ... Produktionsvektor

E ... Einheitsmatrix
 \vec{n} ... Nachfragevektor

$$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = (E - A) \cdot \vec{x}$$

13 Folgen und Reihen

Arithmetische Folge

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Explizites Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Endliche arithmetische Reihe

Summe der ersten n Glieder

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d]$$

Geometrische Folge

$$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Explizites Bildungsgesetz

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Endliche geometrische Reihe

Summe der ersten n Glieder

$$s_n = \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ mit } q \neq 1$$

Unendliche geometrische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist genau dann konvergent,
wenn $|q| < 1$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{b_1}{1 - q} \text{ f\u00fcr } |q| < 1$$

14 \u00c4nderungsma\u00dfe

F\u00fcr eine auf einem Intervall $[a; b]$ definierte reelle Funktion f gilt:

Absolute \u00c4nderung von f in $[a; b]$

$$f(b) - f(a)$$

Relative (prozentuelle) \u00c4nderung von f in $[a; b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \text{ mit } f(a) \neq 0$$

Differenzenquotient (mittlere \u00c4nderungsrate) von f in $[a; b]$ bzw. in $[x; x + \Delta x]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ bzw. } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ mit } b \neq a \text{ bzw. } \Delta x \neq 0$$

Differenzialquotient (lokale bzw. „momentane“ \u00c4nderungsrate) von f an der Stelle x

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ bzw. } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

15 Wachstums- und Abnahmeprozesse

t ... Zeit

$N(t)$... Bestand zur Zeit t

$N_0 = N(0)$... Bestand zur Zeit $t = 0$

Linear

$k \in \mathbb{R}^+$

lineares Wachstum $N(t) = N_0 + k \cdot t$

lineare Abnahme $N(t) = N_0 - k \cdot t$

Exponentiell

$a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$ und $N_0 > 0$

a ... Änderungsfaktor

exponentielles Wachstum $N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $a > 1$ $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

exponentielle Abnahme $N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $0 < a < 1$ $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Beschränkt

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$

S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

beschränktes Wachstum (Sättigungsfunktion) $N(t) = S - b \cdot a^t$ mit $b = S - N_0$ $N(t) = S - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = S - N_0$

beschränkte Abnahme (Abklingfunktion) $N(t) = S + b \cdot a^t$ mit $b = |S - N_0|$ $N(t) = S + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = |S - N_0|$

Logistisch

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$ und $N_0 > 0$

S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

logistisches Wachstum $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot a^t}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$ $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$

16 Ableitung und Integral

$f, g, h \dots$ auf ganz \mathbb{R} oder in einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen

$f', g', h' \dots$ Ableitungsfunktionen

$F \dots$ Stammfunktion von f

$C, k, q \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ mit } F' = f$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

| Funktion f | Ableitungsfunktion f' | Stammfunktion F |
|--------------------|---|--|
| $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ | $F(x) = k \cdot x$ |
| $f(x) = x^q$ | $f'(x) = q \cdot x^{q-1}$ | $F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(x)$ für $q = -1$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ | $F(x) = e^x$ |
| $f(x) = a^x$ | $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ | $F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$ |
| $f(x) = \ln(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$ |
| $f(x) = \log_a(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ | $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $f'(x) = \cos(x)$ | $F(x) = -\cos(x)$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $f'(x) = -\sin(x)$ | $F(x) = \sin(x)$ |
| $f(x) = \tan(x)$ | $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $F(x) = -\ln(\cos(x))$ |

Ableitungsregeln

| | |
|-----------------|---|
| Faktorregel | $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ |
| Summenregel | $(f \pm g)' = f' \pm g'$ |
| Produktregel | $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ |
| Quotientenregel | $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$ |
| Kettenregel | $h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ |

Integrationsmethode – lineare Substitution

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

Volumen von Rotationskörpern

Rotation des Graphen einer Funktion f mit $y = f(x)$ um eine Koordinatenachse

Rotation um die x -Achse ($a \leq x \leq b$)

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

Rotation um die y -Achse ($c \leq y \leq d$)

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$$

Bogenlänge s des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Linearer Mittelwert m einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \text{mit} \quad y = y(x)$$

Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y ... allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

y_h ... allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + a \cdot y = 0$

y_p ... partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

s ... Störfunktion

$$y' + a \cdot y = s(x) \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}, y = y(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

18 Statistik

x_1, x_2, \dots, x_n ... eine Liste von n reellen Zahlen
Dabei treten k verschiedene Werte x_1, x_2, \dots, x_k auf.
 H_i ... absolute Häufigkeit von x_i mit $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$

Relative Häufigkeit von x_i

$$h_i = \frac{H_i}{n}$$

Lagemaße

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \dots + x_k \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot H_i$$

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_{\text{geo}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \text{ mit } x_i > 0$$

Median bei metrischen Daten

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$... geordnete Liste mit n Werten

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \dots \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \dots \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Quartile

q_1 : Mindestens 25 % der Werte sind kleiner oder gleich q_1 , zugleich sind mindestens 75 % der Werte größer oder gleich q_1 .

$$q_2 = \tilde{x}$$

q_3 : Mindestens 75 % der Werte sind kleiner oder gleich q_3 , zugleich sind mindestens 25 % der Werte größer oder gleich q_3 .

Streuungsmaße

s^2 ... (empirische) Varianz einer Datenliste

s ... (empirische) Standardabweichung einer Datenliste

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

Wenn aus einer Stichprobe vom Umfang n die Varianz einer Grundgesamtheit geschätzt werden soll

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

Spannweite

$$x_{\max} - x_{\min}$$

(Inter)quartilsabstand

$$q_3 - q_1$$

19 Wahrscheinlichkeit

| |
|---|
| $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ |
| $A, B \dots$ Ereignisse |
| \bar{A} bzw. $\neg A \dots$ Gegenereignis von A |
| $A \cap B$ bzw. $A \wedge B \dots$ A und B (sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B treten ein) |
| $A \cup B$ bzw. $A \vee B \dots$ A oder B (mindestens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein) |
| $P(A) \dots$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A |
| $P(A B) \dots$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass B eingetreten ist (bedingte Wahrscheinlichkeit) |

Fakultät (Faktorielle)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Versuch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Elementare Regeln

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \dots \text{wenn } A \text{ und } B \text{ (stochastisch) unabhängig voneinander sind}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \dots \text{wenn } A \text{ und } B \text{ unvereinbar sind}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$$

Erwartungswert μ einer diskreten Zufallsvariablen X

mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz σ^2 einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Binomialverteilung

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{R}$ mit $k \leq n$ und $0 \leq p \leq 1$

Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

$$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Normalverteilung

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$

f ... Dichtefunktion

F ... Verteilungsfunktion

φ ... Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Φ ... Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Normalverteilung $N(\mu; \sigma^2)$: Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ bzw. der Varianz σ^2

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Wahrscheinlichkeiten für σ -Umgebungen

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0,954$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0,997$$

Standardnormalverteilung $N(0; 1)$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 2 \cdot \phi(z) - 1$$

| | | | |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(-z \leq Z \leq z)$ | = 90 % | = 95 % | = 99 % |
| z | $\approx 1,645$ | $\approx 1,960$ | $\approx 2,576$ |

Zufallsstrebereich und Konfidenzintervall

$\mu, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ und $0 < \alpha < 1$

\bar{x} ... Stichprobenmittelwert

s_{n-1} ... Standardabweichung einer Stichprobe

n ... Stichprobenumfang

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$... $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -Quantil der Standardnormalverteilung

$t_{f; 1-\frac{\alpha}{2}}$... $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -Quantil der t -Verteilung mit f Freiheitsgraden

Zweiseitiger $(1 - \alpha)$ -Zufallsstrebereich für einen Einzelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right]$$

Zweiseitiger $(1 - \alpha)$ -Zufallsstrebereich für den Stichprobenmittelwert normalverteilter Werte

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Zweiseitiges $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$$\sigma \text{ bekannt: } \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\sigma \text{ unbekannt: } \left[\bar{x} - t_{f; 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{f; 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] \text{ mit } f = n - 1$$

20 Lineare Regression

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n) \dots$ Wertepaare

$\bar{x}, \bar{y} \dots$ arithmetisches Mittel der x_i bzw. y_i

Lineare Regressionsfunktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$d = \bar{y} - k \cdot \bar{x}$$

Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

21 Finanzmathematik

Zinsen und Zinseszinsen

$K_0 \dots$ Anfangskapital

$K_n \dots$ Endkapital nach n Jahren

$i \dots$ Jahreszinssatz

einfache Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

Zinseszinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Unterjährige Verzinsung

$m \dots$ Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

Für Zinssätze gelten folgende Abkürzungen:

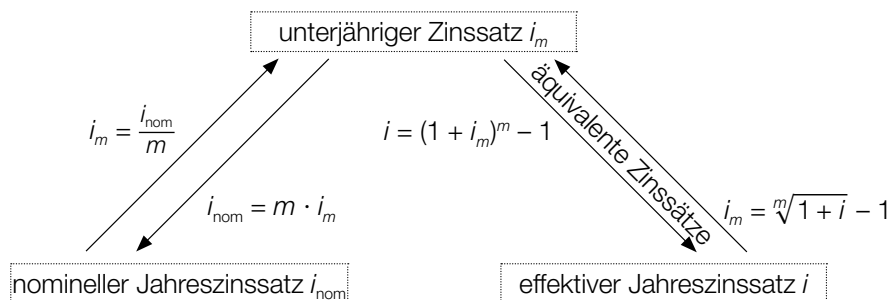
p. a. ... pro Jahr

p. s. ... pro Semester

p. q. ... pro Quartal

p. m. ... pro Monat

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$$



Rentenrechnung

R ... Ratenhöhe
 n ... Anzahl der Raten
 i ... Zinssatz
 $q = 1 + i$... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

| | nachschüssig | vorschüssig |
|-------------|---|--|
| Endwert E | $E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ | $E_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$ |
| Barwert B | $B_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$ | $B_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$ |

Tilgungsplan

| Zeit | Zinsanteil | Tilgungsanteil | Annuität | Restschuld |
|------|---------------|----------------|---------------------------|-------------------|
| 0 | | | | K_0 |
| 1 | $K_0 \cdot i$ | T_1 | $A_1 = K_0 \cdot i + T_1$ | $K_1 = K_0 - T_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |

22 Investitionsrechnung

E_t ... Einnahmen im Jahr t
 A_t ... Ausgaben im Jahr t
 A_0 ... Anschaffungskosten
 R_t ... Rückflüsse im Jahr t
 i ... kalkulatorischer Zinssatz (Jahreszinssatz)
 n ... Nutzungsdauer in Jahren
 i_w ... Wiederveranlagungszinssatz (Jahreszinssatz)
 E ... Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse

$$R_t = E_t - A_t$$

Kapitalwert C_0

$$C_0 = \left[\frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} \right] - A_0$$

Interner Zinssatz i_{intern}

$$\left[\frac{R_1}{(1+i_{\text{intern}})} + \frac{R_2}{(1+i_{\text{intern}})^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i_{\text{intern}})^n} \right] - A_0 = 0$$

Modifizierter interner Zinssatz i_{mod}

$$A_0 \cdot (1+i_{\text{mod}})^n = E \quad \text{mit} \quad E = R_1 \cdot (1+i_w)^{n-1} + R_2 \cdot (1+i_w)^{n-2} + \dots + R_{n-1} \cdot (1+i_w) + R_n$$

23 Kosten- und Preistheorie

x ... produzierte, angebotene, nachgefragte bzw. verkaufte Menge ($x \geq 0$)

| | |
|--|---|
| Kostenfunktion K | $K(x)$ |
| Fixkosten F | $K(0)$ |
| variable Kostenfunktion K_v | $K_v(x) = K(x) - F$ |
| Grenzkostenfunktion K' | $K'(x)$ |
| Stückkostenfunktion (Durchschnittskostenfunktion) \bar{K} | $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ |
| variable Stückkostenfunktion (variable Durchschnittskostenfunktion) \bar{K}_v | $\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$ |
| Betriebsoptimum x_{opt} | $\bar{K}'(x_{\text{opt}}) = 0$ (Minimumstelle von \bar{K}) |
| langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis) | $\bar{K}(x_{\text{opt}})$ |
| Betriebsminimum x_{min} | $\bar{K}_v'(x_{\text{min}}) = 0$ (Minimumstelle von \bar{K}_v) |
| kurzfristige Preisuntergrenze | $\bar{K}_v(x_{\text{min}})$ |
| Kostenkehre | $K''(x) = 0$ |
| progressiver Kostenverlauf | $K''(x) > 0$ |
| degressiver Kostenverlauf | $K''(x) < 0$ |
| Preis p | |
| Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion) p_N | $p_N(x)$ |
| Preisfunktion des Angebots p_A | $p_A(x)$ |
| Marktgleichgewicht | $p_A(x) = p_N(x)$ |
| Höchstpreis | $p_N(0)$ |
| Sättigungsmenge | $p_N(x) = 0$ |
| Erlösfunktion (Umsatzfunktion) E | |
| | $E(x) = p \cdot x$ bzw. $E(x) = p_N(x) \cdot x$ |
| Grenzerlösfunktion E' | $E'(x)$ |
| Gewinnfunktion G | $G(x) = E(x) - K(x)$ |
| Grenzwinnfunktion G' | $G'(x)$ |
| untere Gewinngrenze (Break-even-Point, Gewinnschwelle) x_u obere Gewinngrenze x_o | $G(x_u) = G(x_o) = 0$ mit $x_u \leq x_o$ |
| Gewinnbereich (Gewinnzone) | $[x_u; x_o]$ |
| Cournot'scher Punkt C | $C = (x_c p_N(x_c))$ mit $G'(x_c) = 0$ |

24 Bewegungsvorgänge

t ... Zeit

| | |
|-----------------------------------|-------------------------|
| Weg-Zeit-Funktion s | $s(t)$ |
| Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v | $v(t) = s'(t)$ |
| Beschleunigung-Zeit-Funktion a | $a(t) = v'(t) = s''(t)$ |

Index

A

Abklingfunktion 13
Ableitung 13
Ableitungsfunktion 13
Ableitungsregeln 13
absolute Änderung 11
absolute Häufigkeit 15
Ähnlichkeit 5
allgemeine Geradengleichung 9
allgemeines Dreieck 5, 7
Amplitude 7
Änderungsfaktor 12
Änderungsmaße 11
Änderungsrate 11
Anfangskapital 18
Annuität 19
Anschaffungskosten 19
äquivalente Zinssätze 18
arithmetische Folge 11
arithmetisches Mittel 15
arithmetische Reihe 11
Aufzinsungsfaktor 19

B

Barwert 19
bedingte Wahrscheinlichkeit 16
Beschleunigung-Zeit-Funktion 20
beschränkte Abnahme 12
beschränktes Wachstum 12
bestimmtes Integral 13
Betriebsminimum 20
Betriebsoptimum 20
Bewegungsvorgänge 20
Binomialkoeffizient 16
Binomialverteilung 16
binomische Formeln 4
Bogenlänge 14
Bogenmaß 7
Break-even-Point 20

C

Cosinus 7
Cosinussatz 7
Cournot'scher Punkt 20

D

degressiver Kostenverlauf 20
Deka- 3
dekadischer Logarithmus 4
Deltoid 6
Dezi- 3
Dichtefunktion 17
Differenzenquotient 11
Differenzialgleichungen 14
Differenzialquotient 11
Differenzmenge 3
diskrete Zufallsvariable 16
Drehkegel 6

Drehzylinder 6
Dreieck 5
Durchschnitt(smenge) 3
Durchschnittskostenfunktion 20

E

ebene Figuren 5
echte Teilmenge 3
effektiver Jahreszinssatz 18
einfache Verzinsung 18
Einheitskreis 7
Einheitsmatrix 10
Einheitsvektor 9
Element 3
Endkapital 18
Endwert 19
Erlösfunktion 20
Erwartungswert 16, 17
explizites Bildungsgesetz 11
exponentielle Abnahme 12
exponentielles Wachstum 12

F

Faktorielle 16
Faktorregel 13
Fakultät 16
Finanzmathematik 18
Fixkosten 20
Flächeninhalt 5
Folgen 11
Freiheitsgrad 17
Frequenz 7

G

ganze Zahlen 3
Gegenereignis 16
geometrische Folge 11
geometrische Reihe 11
geometrisches Mittel 15
Gerade 9
Geradengleichung 9
Geschwindigkeit-Zeit-Funktion 20
Gewinnbereich 20
Gewinnfunktion 20
Gewinnngrenze 20
Gewinnschwelle 20
Gewinnzone 20
Giga- 3
gleichseitiges Dreieck 5
Gradmaß 7
Grenzerlösfunktion 20
Grenzwinnfunktion 20
Grenzkostenfunktion 20
Grundfläche 6

H

Hekto- 3
Heron'sche Flächenformel 5

Höchstpreis 20
homogene Differenzialgleichung 14
Hypotenuse 5

I

Imaginärteil 8
inhomogene Differenzialgleichung 14
Integral 13
interner Zinssatz 19
Interquartilsabstand 15
inverse Matrix 10
Investitionsrechnung 19

J

Jahreszinssatz 18

K

kalkulatorischer Zinssatz 19
Kapazitätsgrenze 12
Kapitalwert 19
Kathete 5
Kettenregel 13
Kilo- 3
komplexe Zahlen 8
Komponentenform 8
Konfidenzintervall 17
Körper 6
Korrelationskoeffizient 18
Kosten- und Preistheorie 20
kostendeckender Preis 20
Kostenfunktion 20
Kostenkehre 20
Kreis 6
Kreisbogen 6
Kreisfrequenz 7
Kreissektor 6
Kugel 6
kurzfristige Preisuntergrenze 20

L

Lagemaße 15
langfristige Preisuntergrenze 20
Laplace-Versuch 16
leere Menge 3
lineare Abnahme 12
lineare Gleichungssysteme 10
lineare Regression 18
lineare Substitution 14
linearer Mittelwert 14
lineares Wachstum 12
Linearfaktoren 4
Logarithmen 4
logistisches Wachstum 12
lokale Änderungsrate 11

M

Mantelfläche 6
Marktgleichgewicht 20
Matrix 10
Median 15
Mega- 3
Mengen 3
Mikro- 3
Milli- 3
Mittelwert 15
mittlere Änderungsrate 11
modifizierter interner Zinssatz 19
momentane Änderungsrate 11

N

Nachfragevektor 10
nachsüssig 19
Nano- 3
natürliche Zahlen 3
natürlicher Logarithmus 4
nomineller Jahreszinssatz 18
Normalvektor 8
Normalverteilung 17
Nullphasenwinkel 7
Nutzungsdauer 19

O

Oberfläche 6

P

Parallelogramm 5
Parameterdarstellung 9
Periodendauer 7
Pico- 3
Polarformen 8
Potenzen 3
Preis 20
Preis-Absatz-Funktion 20
Preisfunktion der Nachfrage 20
Preisfunktion des Angebots 20
Prisma 6
Produktionsprozesse 10
Produktionsvektor 10
Produktregel 13
progressiver Kostenverlauf 20
prozentuelle Änderung 11
Pyramide 6

Q

Quader 6
Quadrat 5
quadratische Gleichungen 4
Quantil 17
Quartil 15
Quartilsabstand 15
Quotientenregel 13

R

Rate 19
Ratenhöhe 19
rationale Exponenten 3
rationale Zahlen 3
Raute 5
Realteil 8
Rechteck 5
rechtwinkeliges Dreieck 5, 7
reelle Zahlen 3
Reihen 11
rekursives Bildungsgesetz 11
relative Änderung 11
relative Häufigkeit 15
Rentenrechnung 19
Restschuld 19
Rhombus 5
Richtungsvektor 9
Rotationskörper 14
Rückflüsse 19

S

Sättigungsfunktion 12
Sättigungsmenge 20
Sättigungswert 12
Satz des Pythagoras 5
Satz von Bayes 16
Satz von Vieta 4
Schwingungsdauer 7
Sigma-Umgebungen 17
Sinus 7
Sinusfunktion 7
Sinussatz 7
Skalarprodukt 8
Spannweite 15
Stammfunktion 13
Standardabweichung 15, 16, 17
Standardnormalverteilung 17
Statistik 15
Steigung 9
Steigungswinkel 9
Stichprobe 15, 17
Stichprobenmittelwert 17
Stichprobenumfang 17
Störfunktion 14
Strahlensatz 5
Streuungsmaße 15
Stückkostenfunktion 20
Summenregel 13

T

Tangens 7
Teilmenge 3
Tera- 3
Tilgungsanteil 19
Tilgungsplan 19

transponierte Matrix 10
Trapez 6
trennbare Variablen 14
Trigonometrie 7
trigonometrische Flächenformel 7
 t -Verteilung 17

U

Umfang 5, 6
Umsatzfunktion 20
unbestimmtes Integral 13
unendliche geometrische Reihe 11
unterjährige Verzinsung 18

V

variable Durchschnittskostenfunktion 20
variable Kostenfunktion 20
variable Stückkostenfunktion 20
Varianz 15, 16
Vektoren 8
Vektorprodukt 9
Vereinigung(smengen) 3
Verflechtungsmatrix 10
Verteilungsfunktion 17
Verzinsung 18
Viereck 5
Volumen 6, 14
vorschüssig 19
Vorsilben 3

W

Wahrscheinlichkeit 16, 17
Weg-Zeit-Funktion 20
Wiederveranlagungszinssatz 19
Winkel 7
Würfel 6
Wurzeln 3

Z

Zahlenmengen 3
Zenti- 3
Zinsanteil 19
Zinsen 18
Zinseszinsen 18
Zinssatz 19
Zufallsstrebereich 17
Zufallsvariable 16, 17

σ -Umgebungen 17