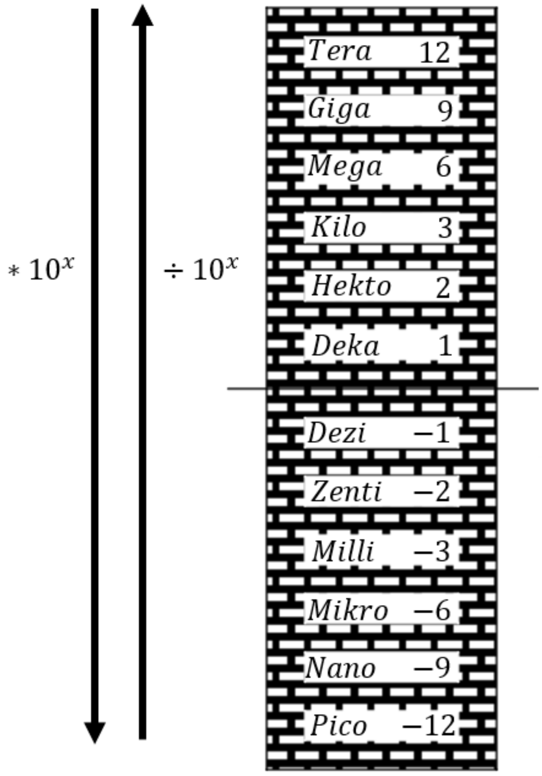
MATHAGO

MATHEMATIK MATURA VORBEREITUNGSKURS BHS – CLUSTER W2

INHALTSVERZEICHNIS

GRUNDLAGEN



$$cm \xrightarrow{\div 10^5} km$$

$$MW \xrightarrow{\div 10^3} GW$$

$$hl \xrightarrow{* 10^3} dl$$

$$dm \xrightarrow{* 10^5} \mu m$$

$Meter, Gramm, Liter, Watt, Byte, Pascal, etc.$

$$cm^2 \xrightarrow{\div (10^5)^2} km^2$$

$$mm^3 \xrightarrow{\div (10^2)^3} dm^3$$

$$km^2 \xrightarrow{* (10^3)^2} m^2$$

$$m^3 \xrightarrow{* (10^3)^3} mm^3$$

p Prozent eines Wertes x berechnen:

$$x * \frac{p}{100}$$

p Prozent zu einem Wert x hinzufügen:

$$x * \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

p Prozent von einem Wert x abziehen:

$$x * \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Prozentuellen Anteil an der Gesamtheit berechnen:

$$\frac{Anteil}{Gesamtheit}$$

Prozentuelle Veränderung zwischen einem neuen und einem alten Wert berechnen:

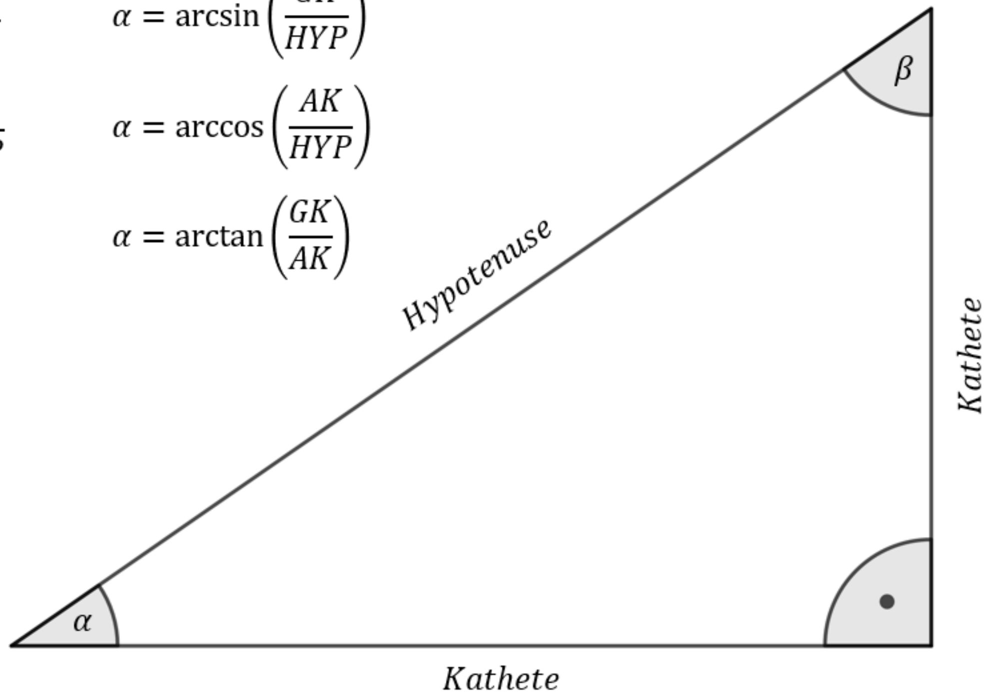
$$\frac{Neu - Alt}{Alt}$$

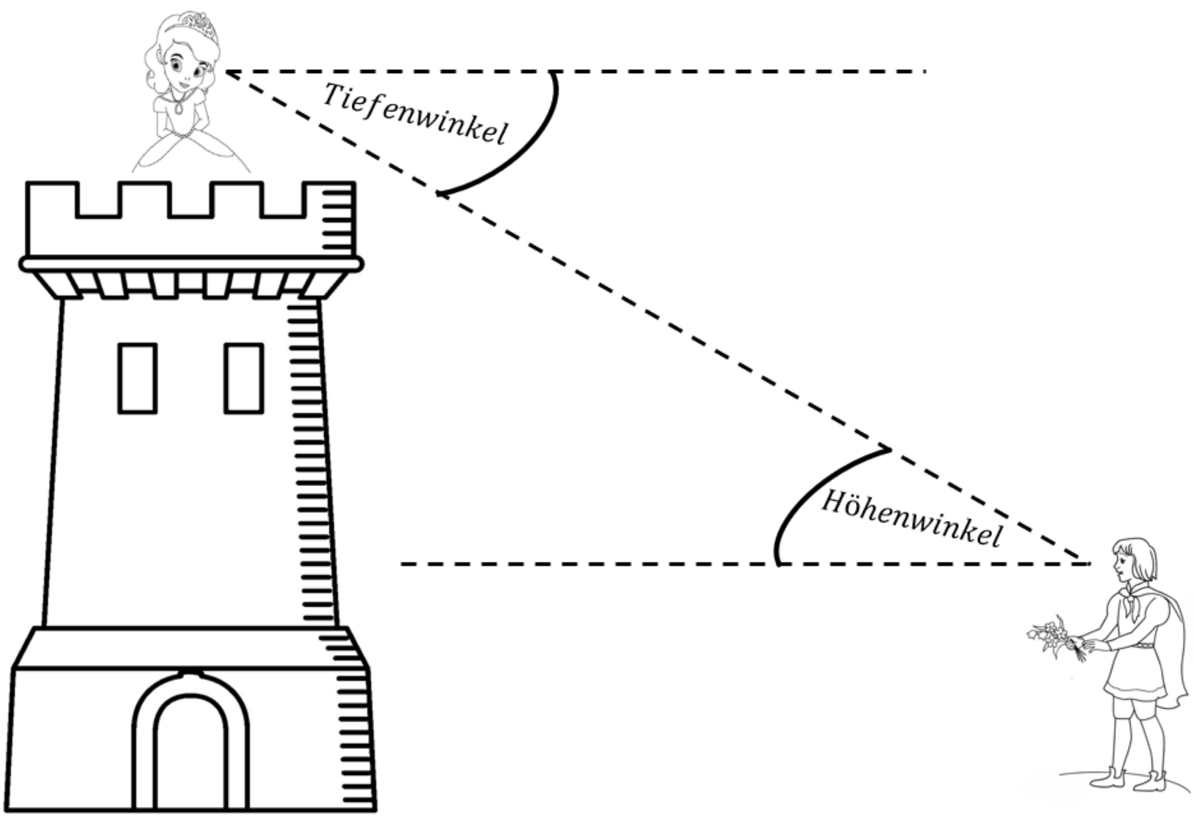
TRIGONOMETRIE IM RECHTWINKELIGEN DREIECK

$$\sin(\alpha) = \frac{GK}{HYP} \qquad \alpha = \arcsin\left(\frac{GK}{HYP}\right)$$

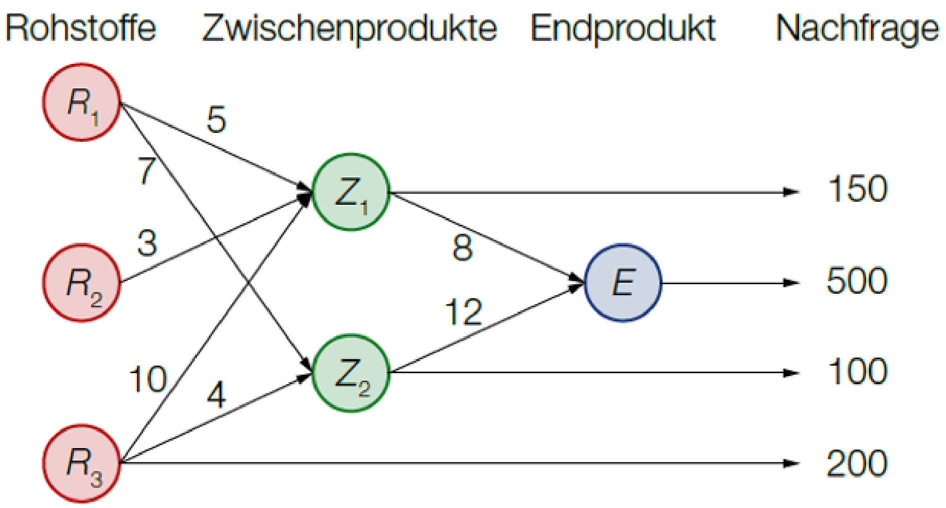
$$\cos(\alpha) = \frac{AK}{HYP} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{AK}{HYP}\right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{GK}{AK}\right)$$





MATRIZEN UND GOZINTO GRAPHEN



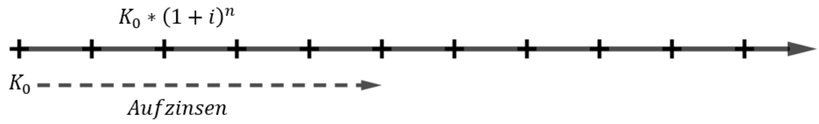
$$
\begin{array}{c}
 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ E
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} R_1 & R_2 & R_3 & Z_1 & Z_2 & E \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}
$$

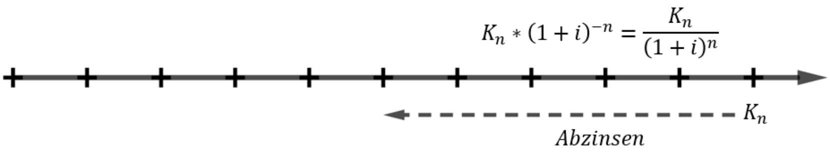
Produktionsprozesse

A ... quadratische Verflechtungsmatrix
$\vec{x}$ ... Produktionsvektor
E ... Einheitsmatrix
$\vec{n}$ ... Nachfragevektor

$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$ $\qquad$ $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{n}$ $\qquad$ $\vec{n} = (E - A) \cdot \vec{x}$

FINANZMATHEMATIK





Nomineller Zinssatz:	Bezieht sich auf die Verzinsungsperioden pro Jahr

$$i_4 = \frac{i}{4}$$

$$i = i_2 * 2$$

Äquivalenter Zinssatz:	Bezieht sich auf die rechnerische Verzinsung pro Zahlungsperiode

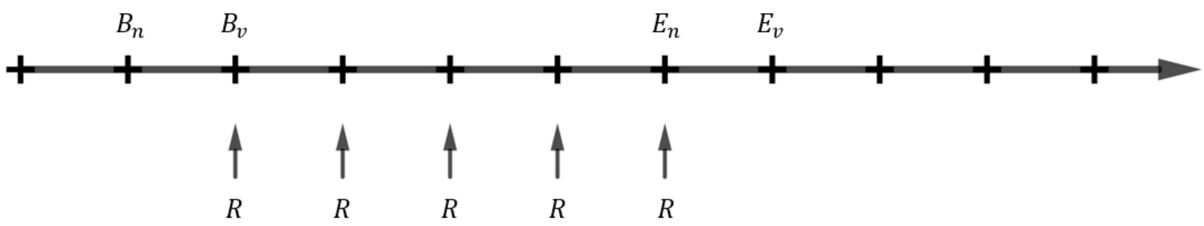
$$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1$$

$$i = (1+i_2)^2 - 1$$

Effektiver Zinssatz:	Bezieht sich auf die tatsächliche Verzinsung, z.B. nach Berücksichtigung von zusätzlichen Kosten oder der $KESt$

		Zahlung			
		Jährlich	Semesterweise	Quartalsweise	Monatlich
Verzinsung	Jährlich	i	$i_2 = \sqrt[2]{1+i} - 1$	$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1$	$i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1$
	Semesterweise		$i_2 = \frac{i}{2}$	$i_2 = \frac{i}{2}$ $i_4 = \sqrt[2]{1+i_2} - 1$	$i_2 = \frac{i}{2}$ $i_{12} = \sqrt[6]{1+i_2} - 1$
	Quartalsweise			$i_4 = \frac{i}{4}$	$i_4 = \frac{i}{4}$ $i_{12} = \sqrt[3]{1+i_4} - 1$
	Monatlich				$i_{12} = \frac{i}{12}$

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert E	$E_{nach} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{vor} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert B	$B_{nach} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{vor} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

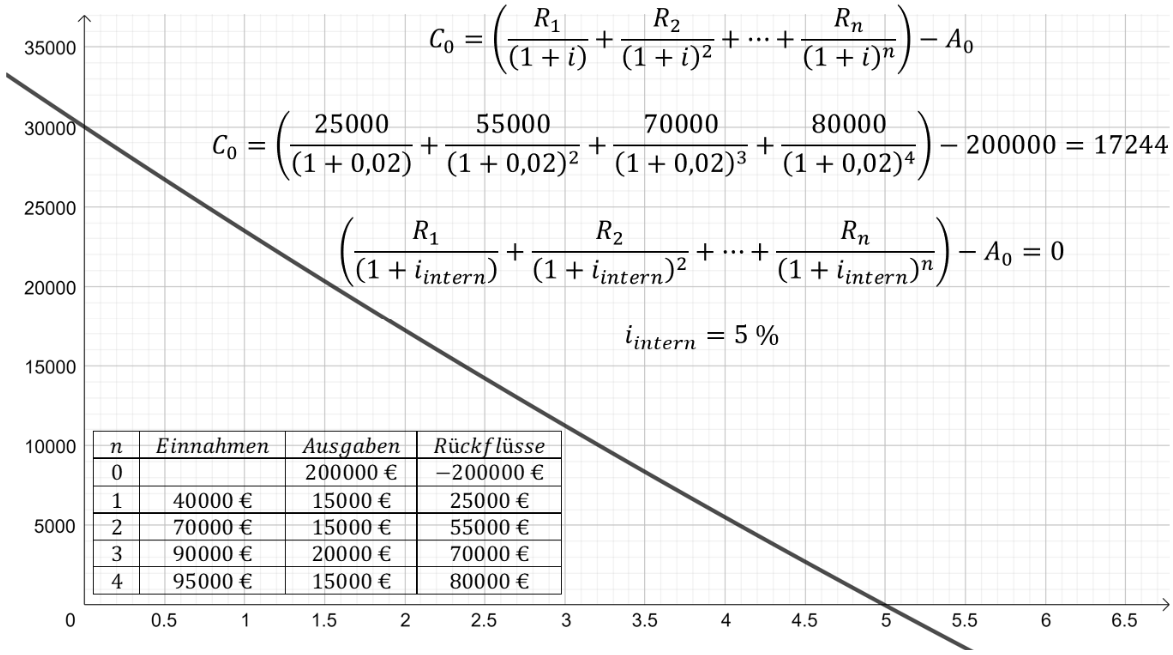


Zeit	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				K_0
1	$K_0 \cdot i$	T_1	$A_1 = K_0 \cdot i + T_1$	$K_1 = K_0 - T_1$
...	...	...	...	...

n	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 10 000,00
1	€ 250,00	€ 1 750,00	€ 2 000,00	€ 8 250,00
2	€ 206,25	€ 1 793,75	€ 2 000,00	€ 6 456,25
3	€ 161,41	€ 1 838,59	€ 2 000,00	€ 4 617,66
4	€ 115,44	€ 1 884,56	€ 2 000,00	€ 2 733,10
5	€ 68,33	€ 1 931,67	€ 2 000,00	€ 801,43
6	€ 20,04	€ 801,43	€ 821,46	€ -
7	€ -	€ -	€ -	€ -

i	2,50%
Annuität	€ 2 000,00

INVESTITIONSRECHNUNG



$$C_0 = \left(\frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n}\right) - A_0$$

$$C_0 = \left(\frac{25000}{(1+0{,}02)} + \frac{55000}{(1+0{,}02)^2} + \frac{70000}{(1+0{,}02)^3} + \frac{80000}{(1+0{,}02)^4}\right) - 200000 = 17244\text{ €}$$

$$\left(\frac{R_1}{(1+i_{intern})} + \frac{R_2}{(1+i_{intern})^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i_{intern})^n}\right) - A_0 = 0$$

$$i_{intern} = 5\ \%$$

n	$Einnahmen$	$Ausgaben$	$Rückflüsse$
0		200000 €	−200000 €
1	40000 €	15000 €	25000 €
2	70000 €	15000 €	55000 €
3	90000 €	20000 €	70000 €
4	95000 €	15000 €	80000 €

$$A_0 * (1+i_{mod})^n = E$$

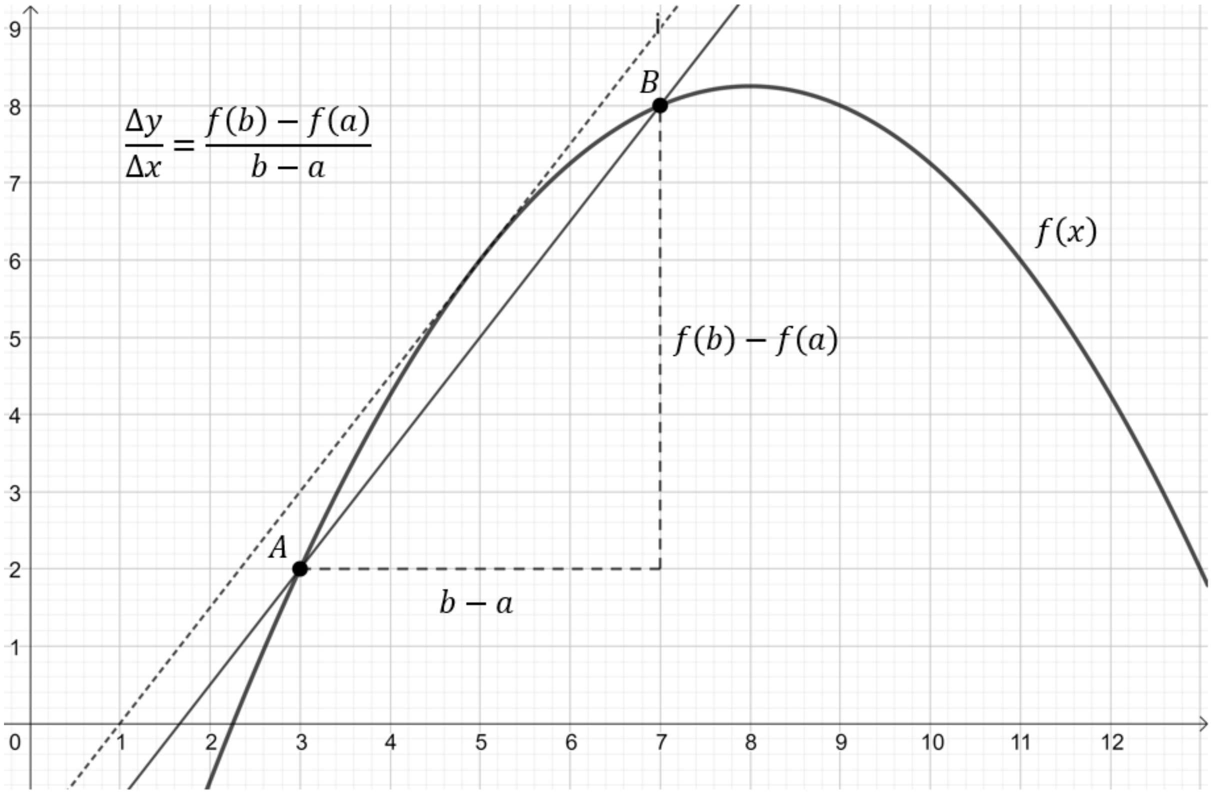
$$E = R_1 * (1+i_w)^{n-1} + R_2 * (1+i_w)^{n-2} + \cdots + R_{n-1} * (1+i_w) + R_n$$

$$E = 25000 * (1+0{,}03)^3 + 55000 * (1+0{,}03)^2 + 70000 * (1+0{,}03) + 80000 = 237767{,}675\text{ €}$$

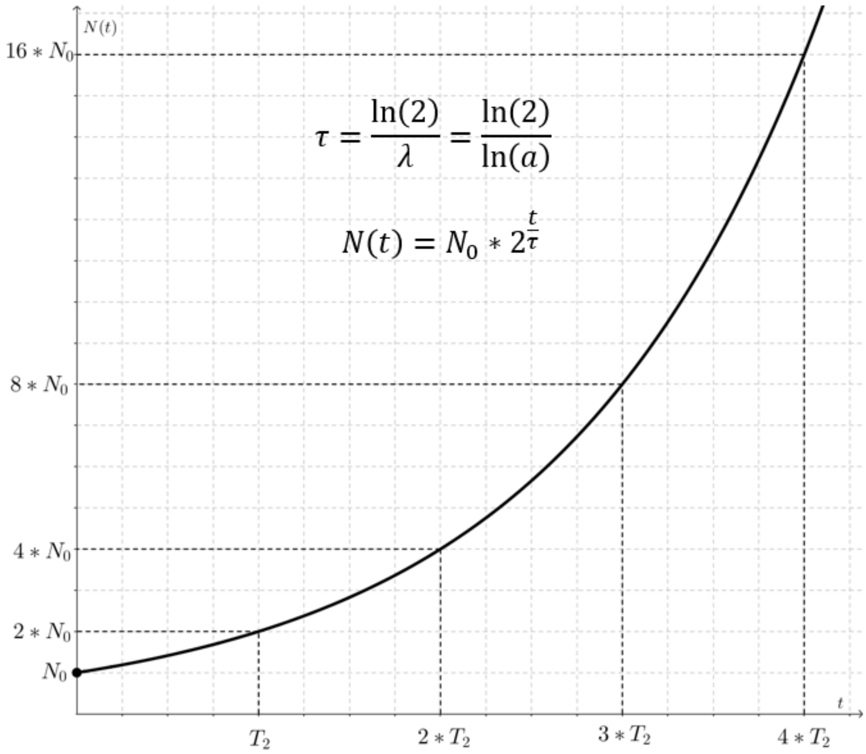
$$200000 * (1+i_{mod})^4 = 237767{,}675$$

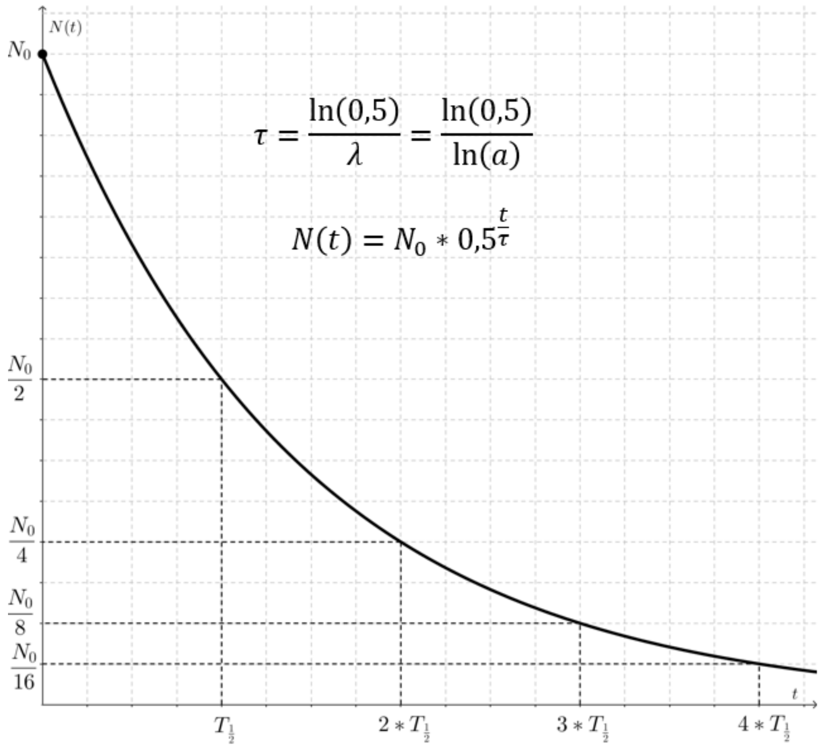
$$i_{mod} = 4{,}42\ \%$$

Änderungsmaße

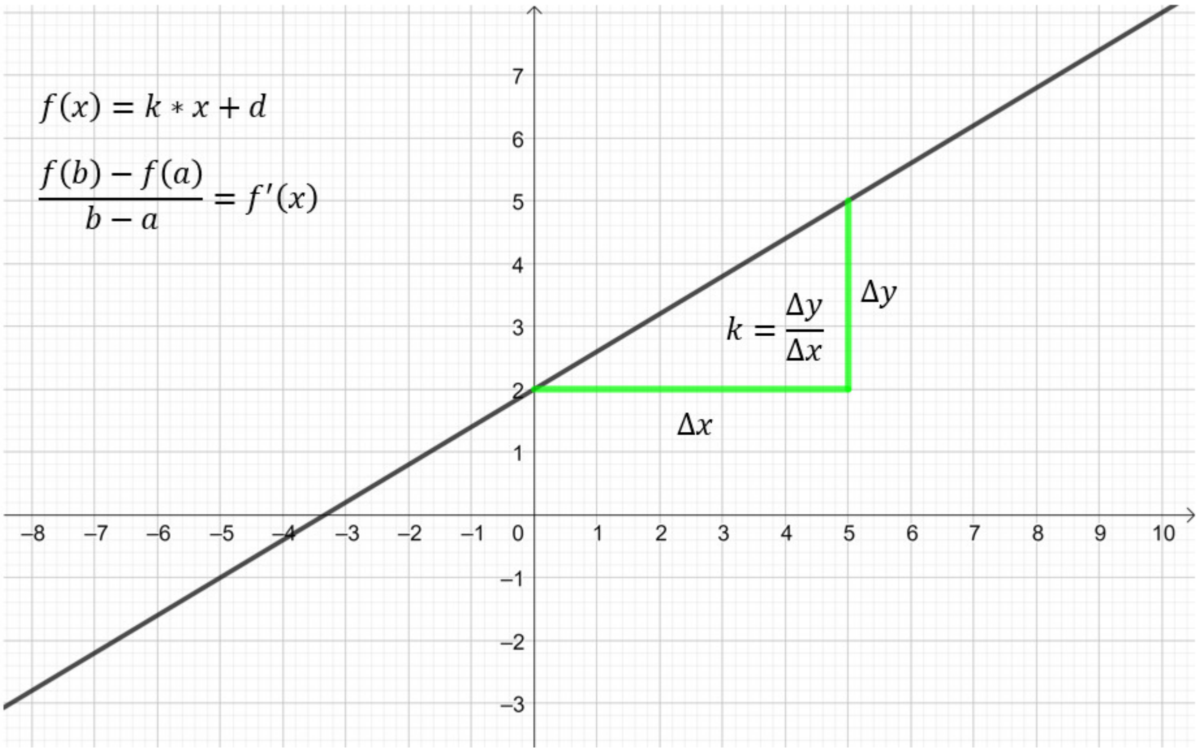


WACHSTUM & ZERFALL





LINEARE FUNKTION



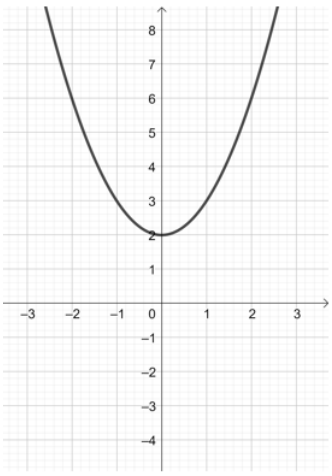
QUADRATISCHE FUNKTION

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

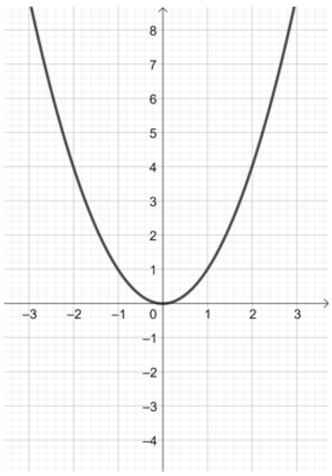
Wenn	Dann
$\boldsymbol{a < 0}$	Negativ gekrümmt (Hochpunkt)
$\boldsymbol{a > 0}$	Positiv gekrümmt (Tiefpunkt)
$\boldsymbol{b = 0}$	Symmetrisch um die y-Achse
$\boldsymbol{b \neq 0}$	Nicht symmetrisch um die y-Achse
$\boldsymbol{c}$	Schnittpunkt auf y-Achse bei c
$\boldsymbol{c = 0}$	Eine Nullstelle im Ursprung
$\boldsymbol{c = 0\ \&\ b \neq 0}$	2 Nullstellen, eine davon im Ursprung
$\boldsymbol{a < 0\ \&\ c > 0}$	2 Nullstellen
$\boldsymbol{a > 0\ \&\ c < 0}$	2 Nullstellen
$\boldsymbol{a < 0\ \&\ b = 0\ \&\ c < 0}$	Keine Nullstelle
$\boldsymbol{a > 0\ \&\ b = 0\ \&\ c > 0}$	Keine Nullstelle

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad$ $D = b^2 - 4ac$

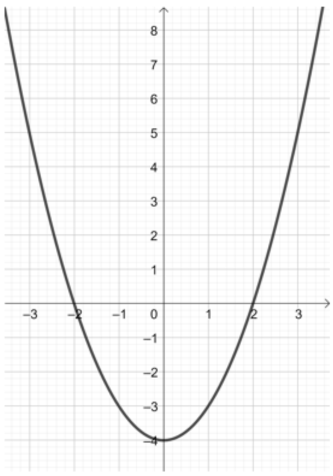
$D < 0$



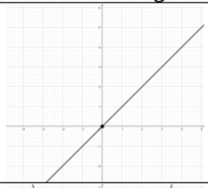
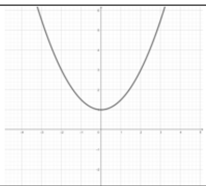
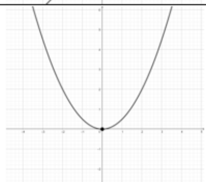
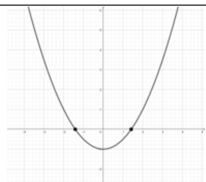
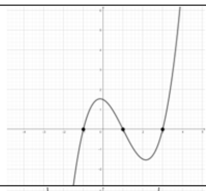
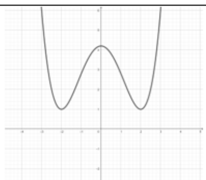
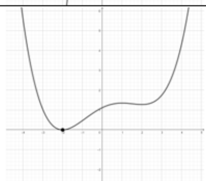
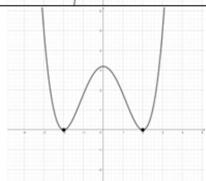
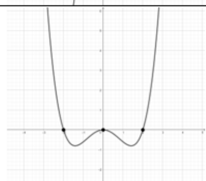
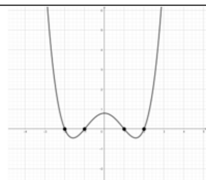
$D = 0$



$D > 0$



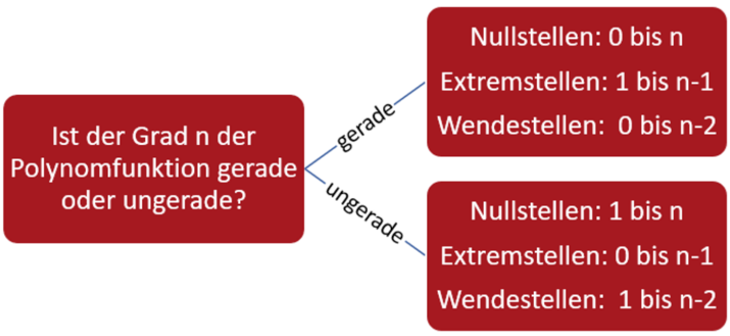
POLYNOMFUNKTION

Grad	***keine Lösung***	***eine Lösung***	***zwei Lösungen***	***drei Lösungen***	***vier Lösungen***
1					
2					
3					
4					

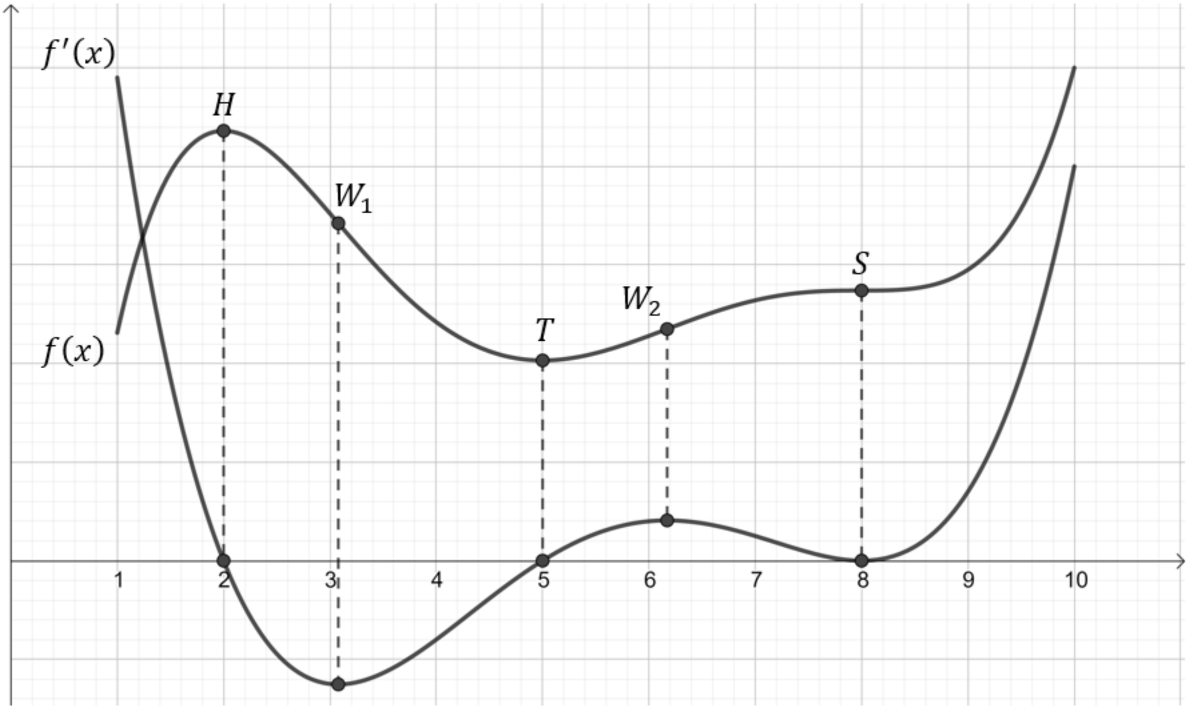
Der Grad einer Polynomfunktion gibt an, wie viele reele Lösungen diese Funktion maximal haben kann

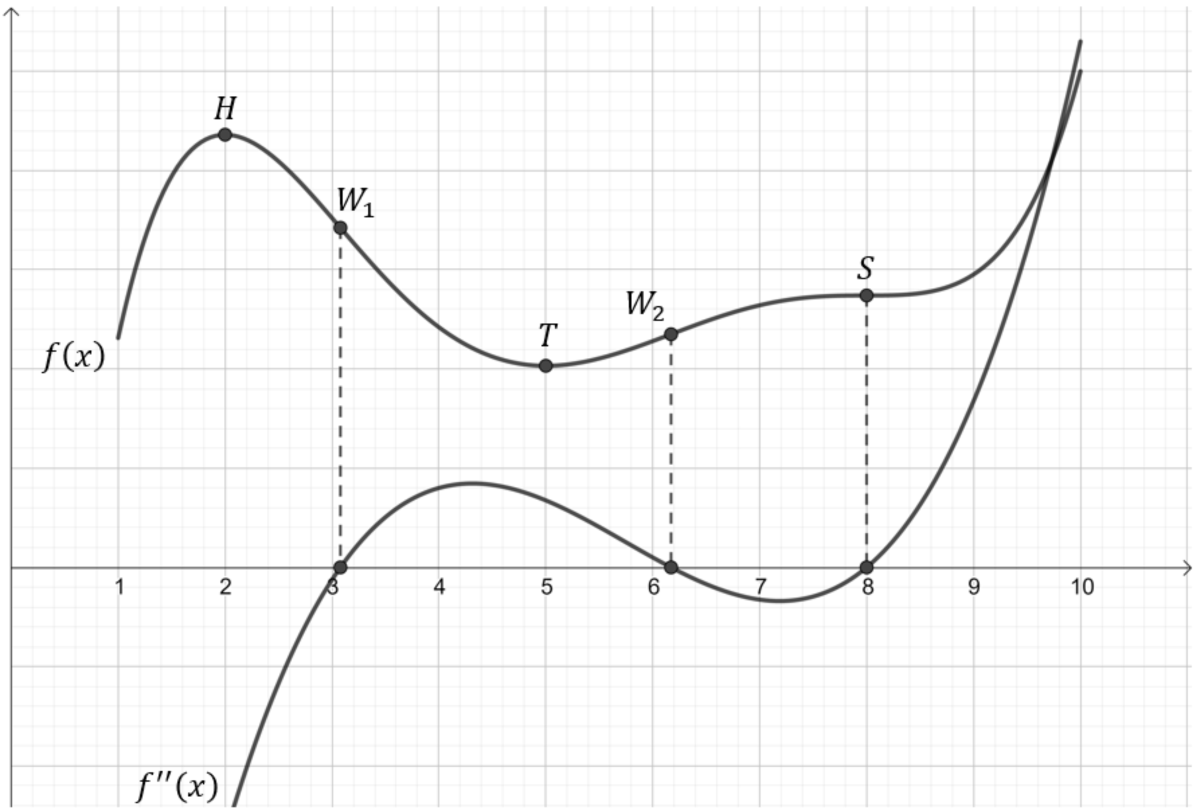
Polynomfunktionen geraden Grades können auch gar keine reele Lösung besitzen

Polynomfunktionen ungeraden Grades müssen mindestens eine reele Lösung haben



DIFFERENTIALRECHNUNG





$Nullstellen$: $f(x) = 0$

$Extremstellen$: $f'(x) = 0$

$f''(x_E) < 0 \;\rightarrow H$

$f''(x_E) = 0 \;\rightarrow S$

$f''(x_E) > 0 \;\rightarrow T$

$Wendestellen$: $f''(x) = 0$

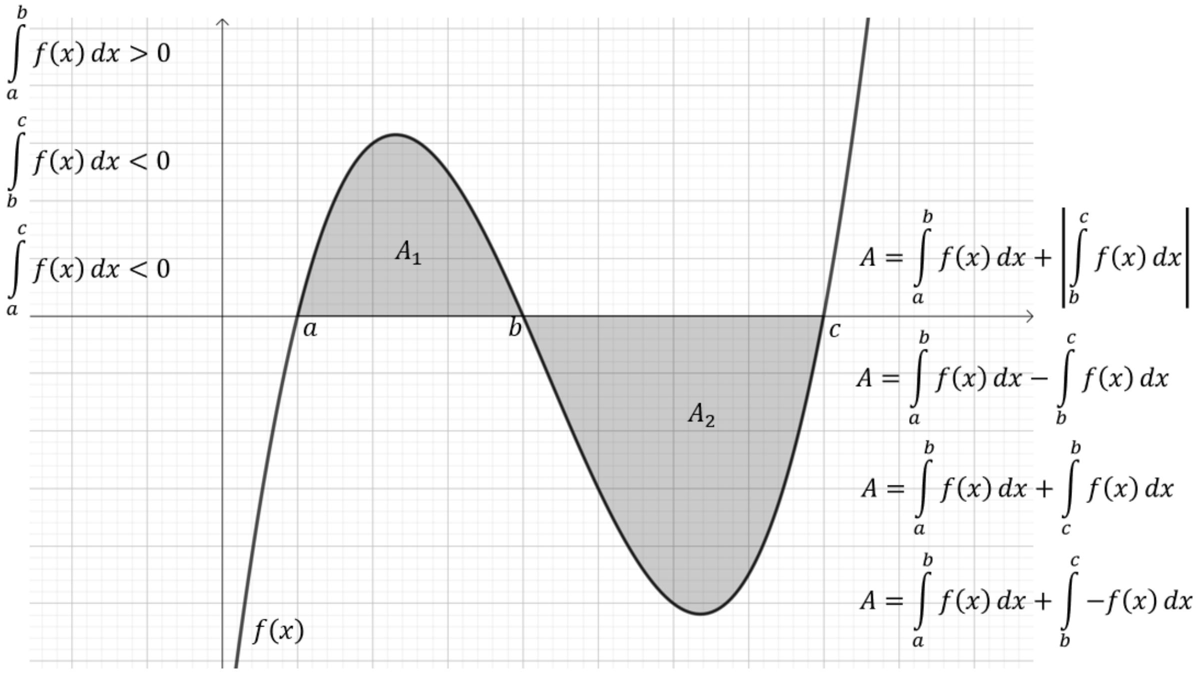
$Steigungswinkel$: $\alpha = \arctan\left(f'(x)\right)$

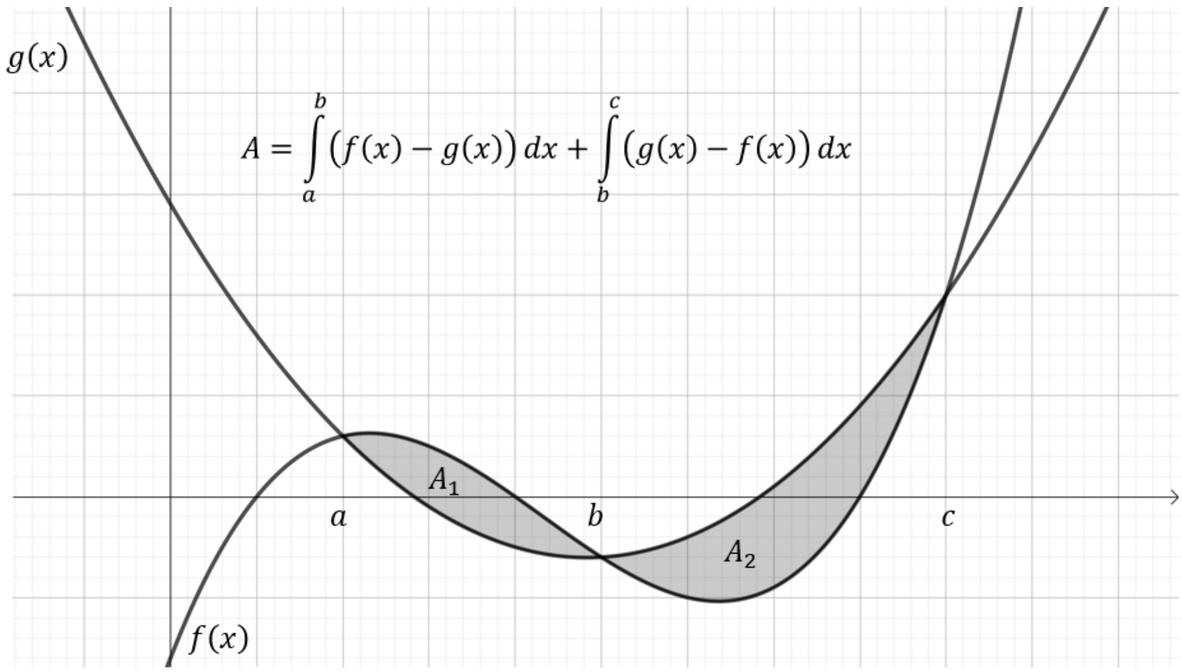
UMKEHRAUFGABEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	$f''(x) = 6ax + 2b$
Die Funktion f geht durch den Punkt $P(x_P/y_P)$.	$f(x_P) = y_P$
Bsp: Die Funktion f geht durch den Punkt $P(4/2)$.	$f(4) = 2$ $a * 4^3 + b * 4^2 + c * 4 + d = 2$
Die Funktion f hat bei $N(x_N/0)$ eine Nullstelle.	$f(x_N) = 0$
Bsp: Die Funktion f hat bei $N(-2/0)$ eine Nullstelle.	$f(-2) = 0$ $a * (-2)^3 + b * (-2)^2 + c * (-2) + d = 0$
Die Funktion f hat an der Stelle $x = x_1$ die Steigung k.	$f'(x_1) = k$
Bsp: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung -1.	$f'(3) = -1$ $3a * 3^2 + 2b * 3 + c = -1$
Die Funktion f hat an der Stelle $x = x_1$ den Steigungswinkel α.	$f'(x_1) = \tan(\alpha)$
Bsp: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ den Steigungswinkel $30°$.	$f'(2) = \tan(30°)$ $3a * 2^2 + 2b * 2 + c = \tan(30°)$
Die Funktion f hat den Extremwert $E(x_E/y_E)$.	$f(x_E) = y_E$ $f'(x_E) = 0$
Bsp: Die Funktion f hat den Extremwert $E(-1/5)$.	$f(-1) = 5$ $a * (-1)^3 + b * (-1)^2 + c * (-1) + d = 5$ $f'(-1) = 0$ $3a * (-1)^2 + 2b * (-1) + c = 0$
Die Funktion f hat den Wendepunkt $W(x_W/y_W)$.	$f(x_W) = y_W$ $f''(x_W) = 0$
Bsp: Die Funktion f hat den Wendepunkt $W(5/4)$.	$f(5) = 4$ $a * 5^3 + b * 5^2 + c * 5 + d = 4$ $f''(5) = 0$ $6a * 5 + 2b = 0$

Die Funktion $\boldsymbol{f}$ hat den Sattelpunkt $\boldsymbol{S(x_S/y_S)}$.	$f(x_S) = y_S$ $f'(x_S) = 0$ $f''(x_S) = 0$
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ schneidet die $\boldsymbol{x}$-Achse an der Stelle $\boldsymbol{x = x_1}$.	$f(x_1) = 0$
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ berührt die $\boldsymbol{x}$-Achse an der Stelle $\boldsymbol{x = x_1}$.	$f(x_1) = 0$ $f'(x_1) = 0$
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ berührt (knickfrei) die Funktion $\boldsymbol{g}$ an der Stelle $\boldsymbol{x = x_1}$.	$f(x_1) = g(x_1)$ $f'(x_1) = g'(x_1)$

INTEGRALRECHNUNG





BEWEGUNGSAUFGABEN

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \iint a(t)\,dt$$

$$s'(t) = v(t) = \int a(t)\,dt$$

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

$$s = v * t \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{s}{t}$$

$$\overline{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\overline{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

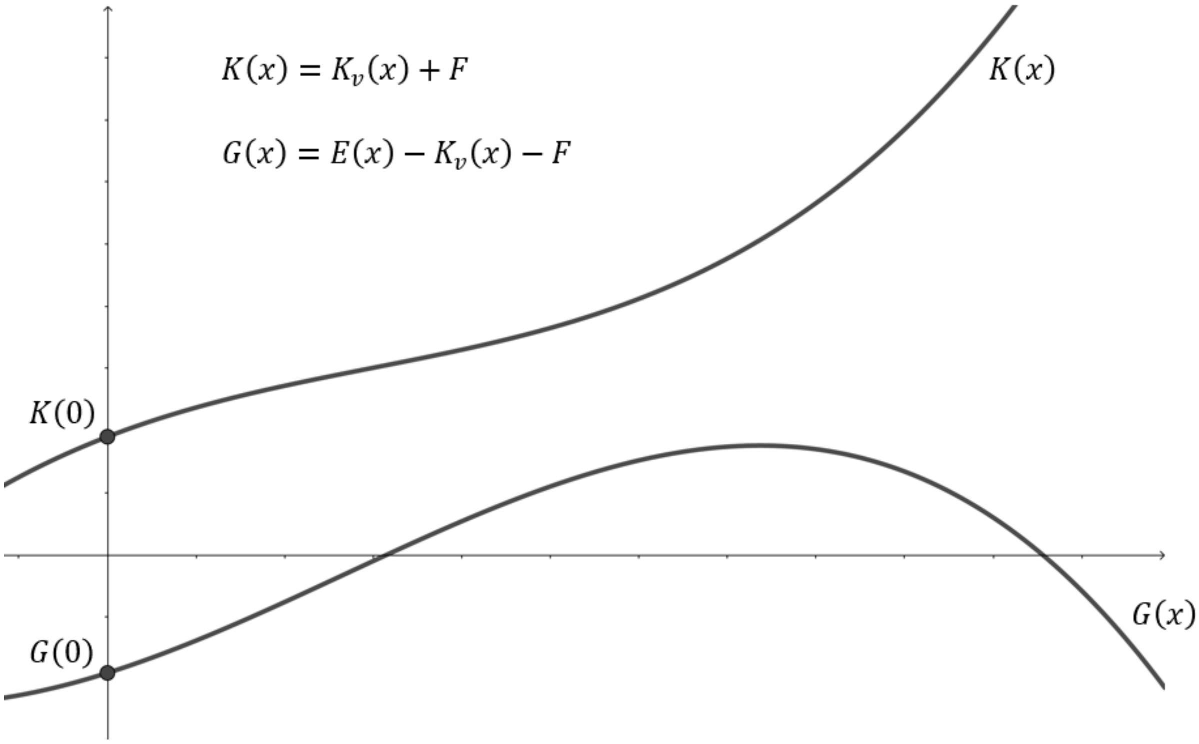
WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

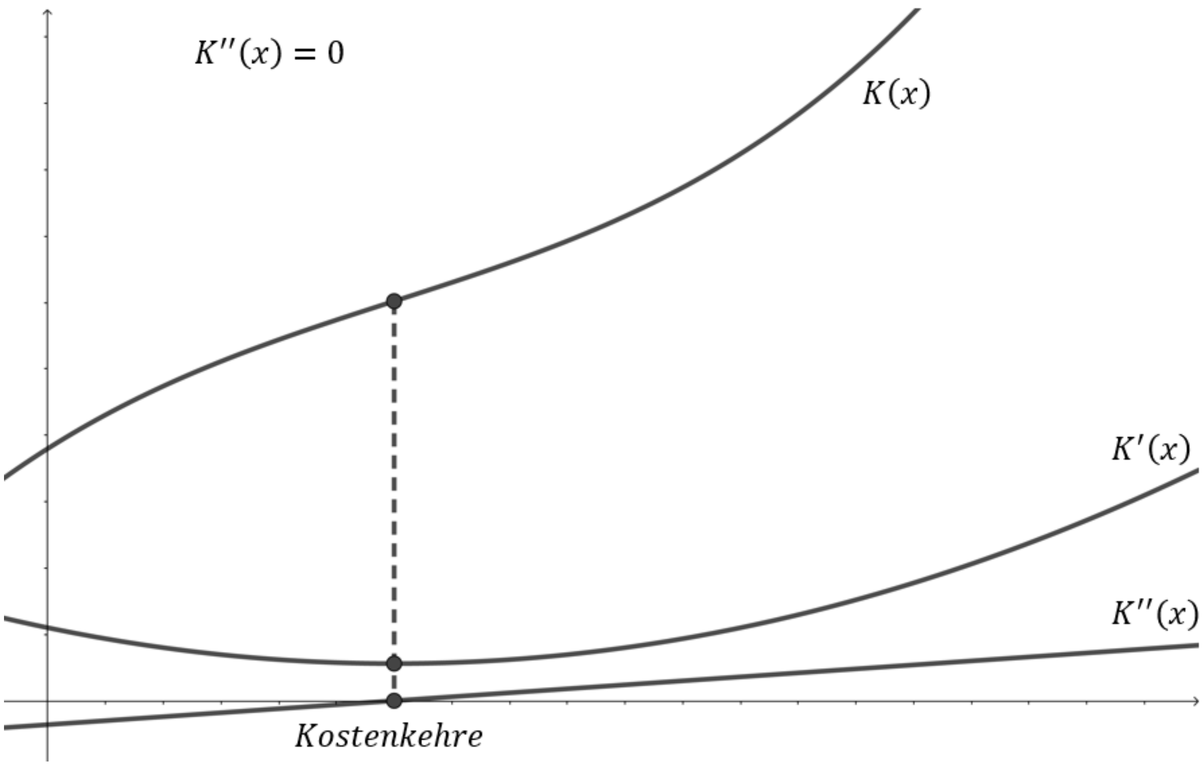
$K(x)$	**(Gesamt)Kostenfunktion**
$K(x) = K_v + F$ $K(x) = E(x) - G(x)$	
$\overline{K(x)}$	**Stückkostenfunktion / Durchschnittskostenfunktion**
$\overline{K(x)} = \frac{K(x)}{x}$	
$\overline{K_v(x)}$	**Variable Stückkostenfunktion / Durchschnittskostenfunktion**
$\overline{K_v(x)} = \frac{K_v(x)}{x}$	
$P(x)$	**Preisfunktion**
$P(x) = \frac{E(x)}{x}$	
$E(x)$	**Erlösfunktion**
$E(x) = P(x) * x$	
$G(x)$	**Gewinnfunktion**
$G(x) = E(x) - K(x)$	

Betriebsminimum	Jene Stückzahl, bei der die variablen Kosten pro Stück am geringsten sind.
Betriebsoptimum	Jene Stückzahl, bei der die Kosten pro Stück am geringsten sind.
Break-even-Point (Gewinnschwelle)	Jene Stückzahl, ab der Gewinn gemacht wird bzw. jene Stückzahl bei der sich die Kosten- und Erlösfunktion schneiden.
Cournot'scher Punkt	Hat als x-Koordinate jene Stückzahl, bei der der Gewinn maximal ist und als y-Koordinate den dazugehörigen Preis.
Fixkosten	Sind jene Kosten, die selbst dann anfallen, wenn man 0 Stück produziert.
Gewinngrenze	Jene Stückzahl, bis wohin Gewinn gemacht wird bzw. jene Stückzahl, bei der sich die Kosten- und Erlösfunktion ein zweites Mal schneiden.
Höchstpreis	Jener Preis, um den kein einziges Stück verkauft werden kann.
Kostenkehre	Jener Punkt, an dem der Verlauf der Kostenfunktion vom Degressiven ins Progressive übergeht. Ist weiters jener Punkt mit den geringst möglichen Grenzkosten.
Kurzfristige Preisuntergrenze	Geringst möglichen variablen Kosten pro Stück
Langfristige Preisuntergrenze	Geringst möglichen Kosten pro Stück
Sättigungsmenge	Jene Stückzahl, bei der der Markt gesättigt ist und das Produkt verschenkt wird

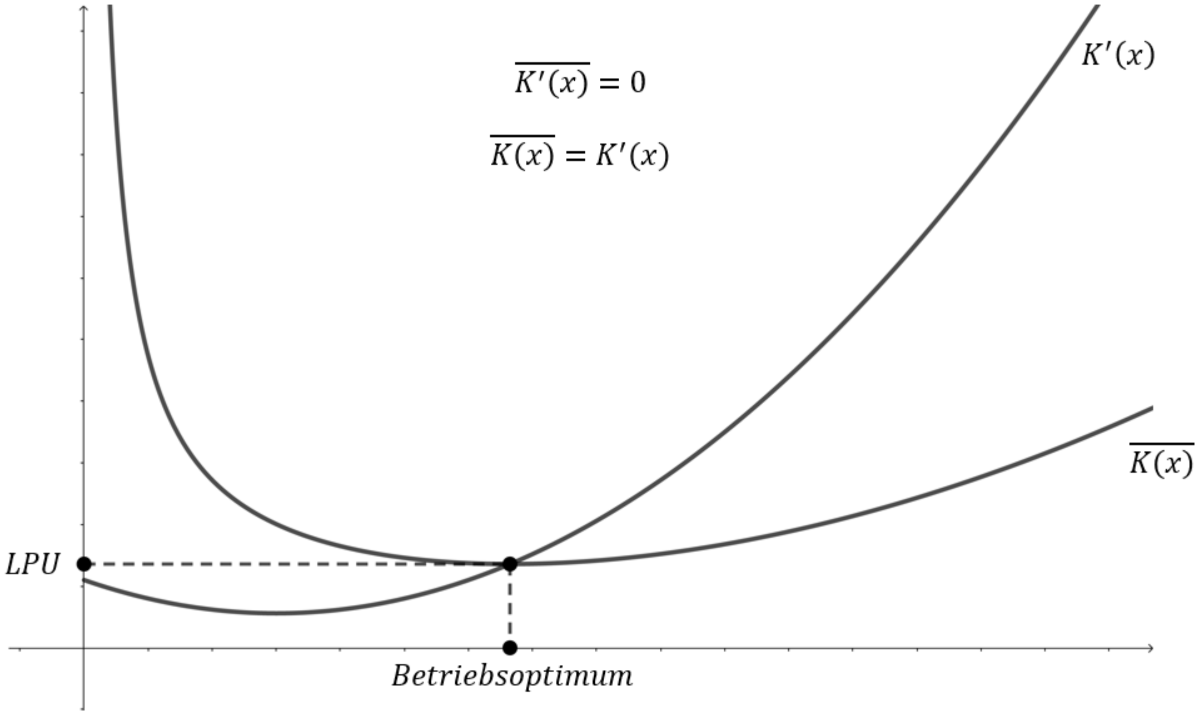
	Nullstellen	Hoch- und Tiefpunkte		Wendestellen
	x	x	y	x
$K(x)$	----	----	----	Kostenkehre
$\overline{K(x)}$	----	Betriebsoptimum	Langfristige Preisuntergrenze	----
$\overline{K_v(x)}$	----	Betriebsminimum	Kurzfristige Preisuntergrenze	----
$P(x)$	Sättigungsmenge	----	----	----
$E(x)$	Sättigungsmenge	Erlös maximierende Menge	Maximaler Erlös	----
$G(x)$	Gewinnschwelle (BEP) Gewinngrenze	Gewinn maximierende Menge	Maximaler Gewinn	----

FIXKOSTEN

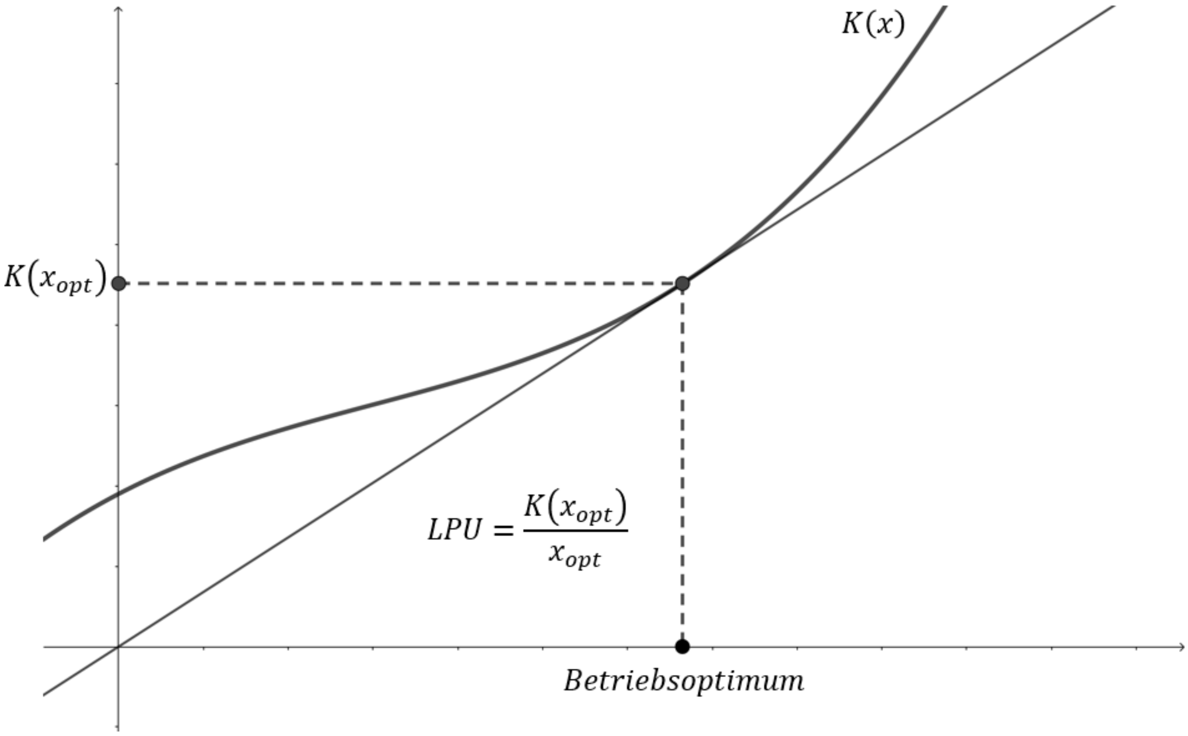




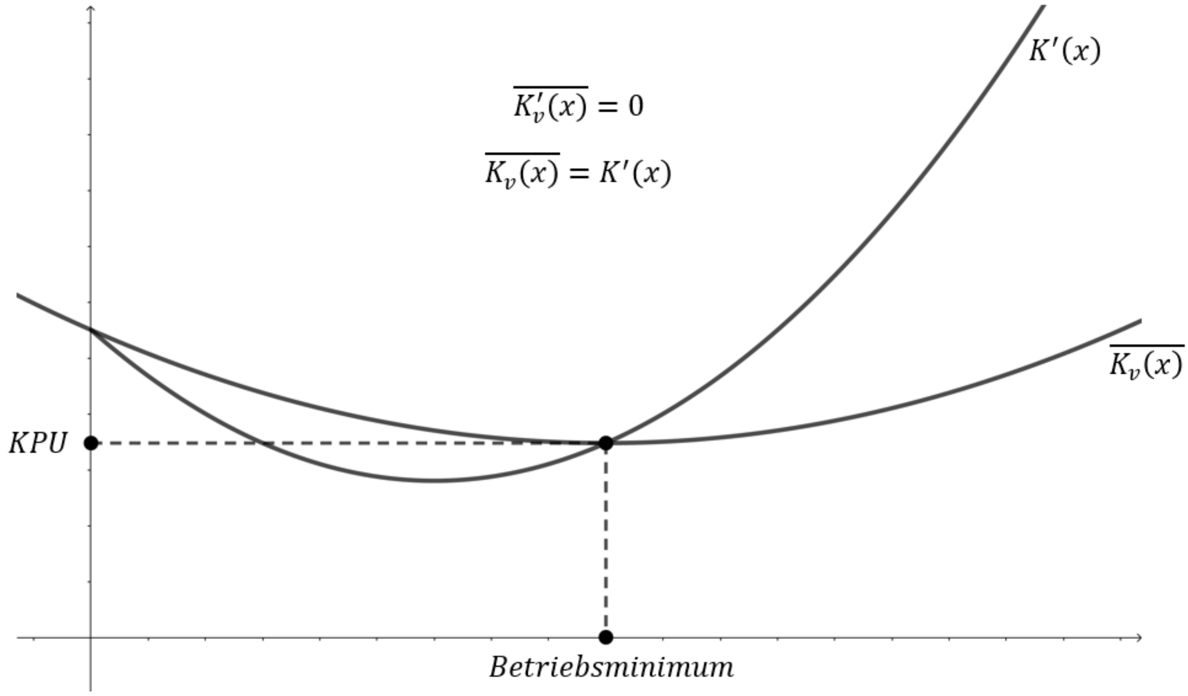
BETRIEBSOPTIMUM & LPU



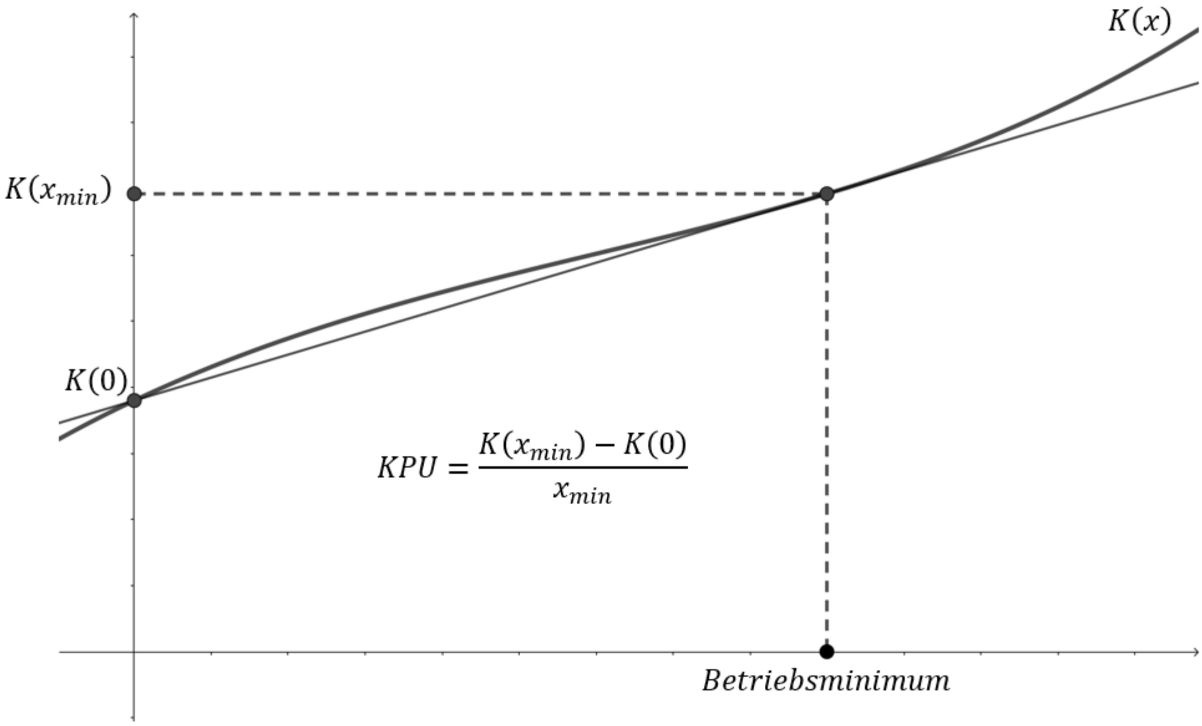
BETRIEBSOPTIMUM & LPU



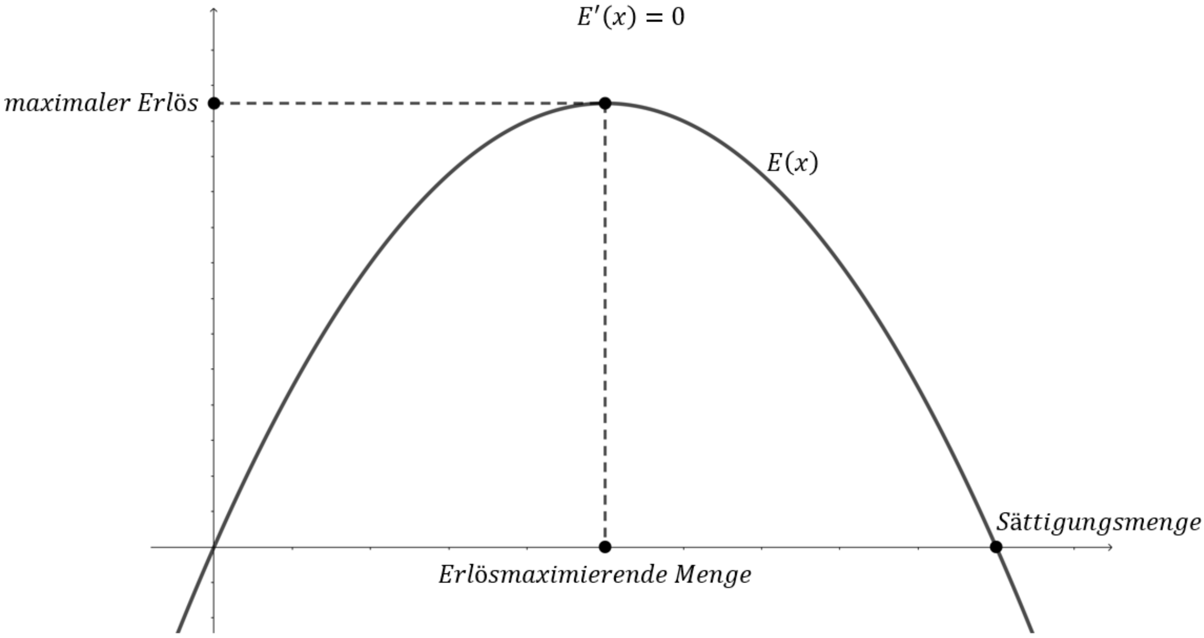
BETRIEBSMINIMUM & KPU



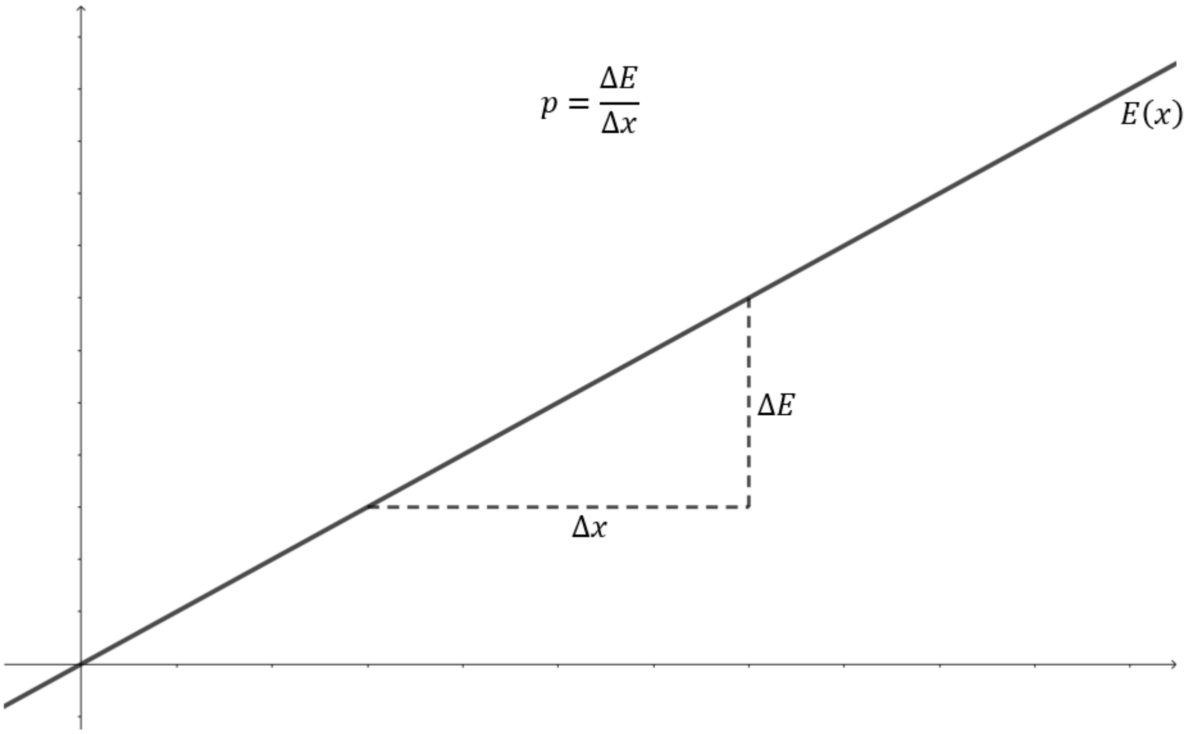
BETRIEBSMINIMUM & KPU



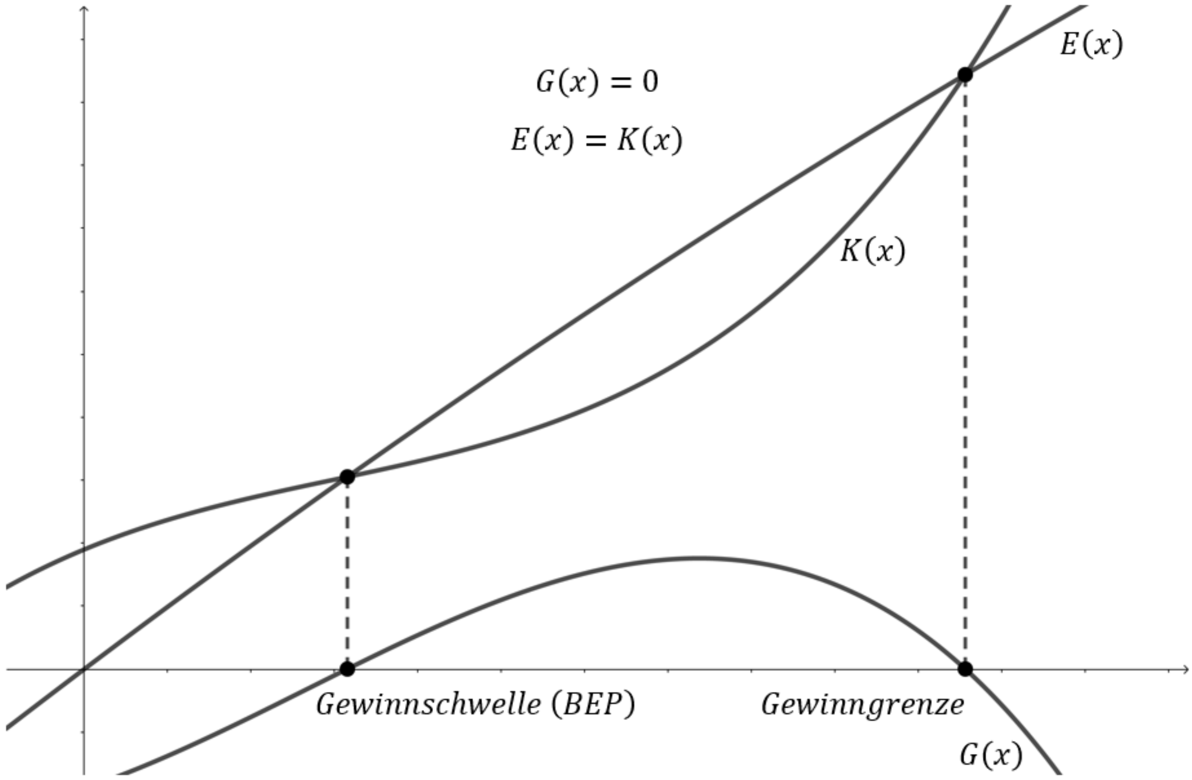
MAXIMALER ERLÖS



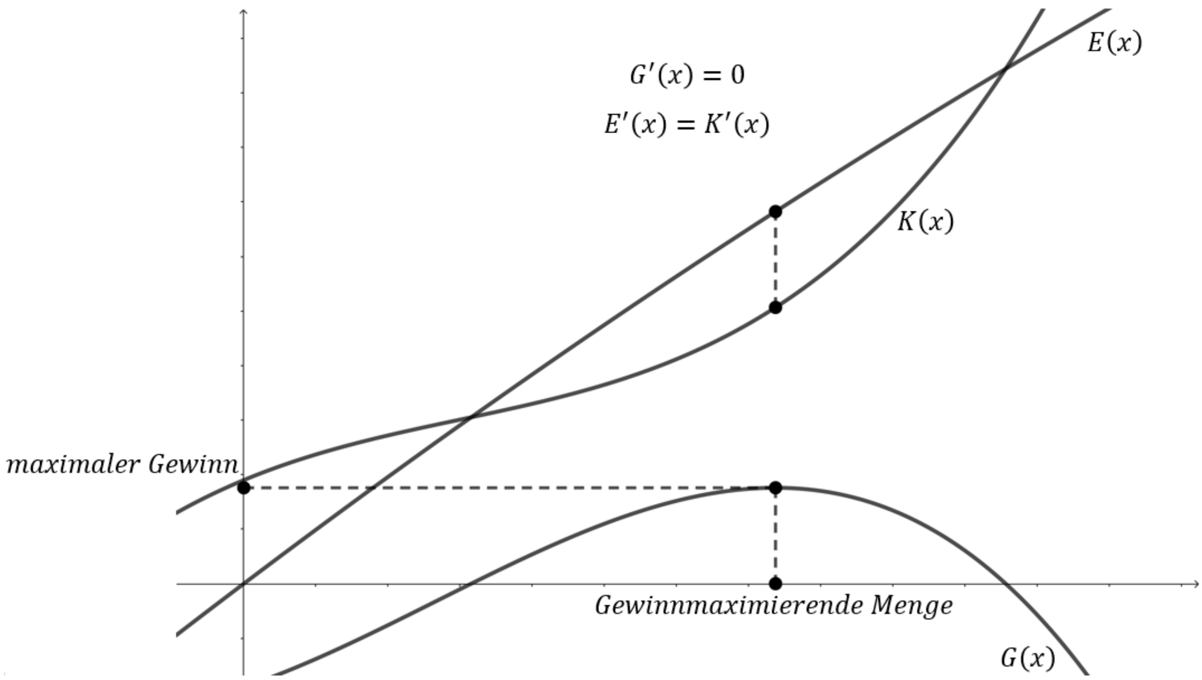
ERLÖS VS. PREIS



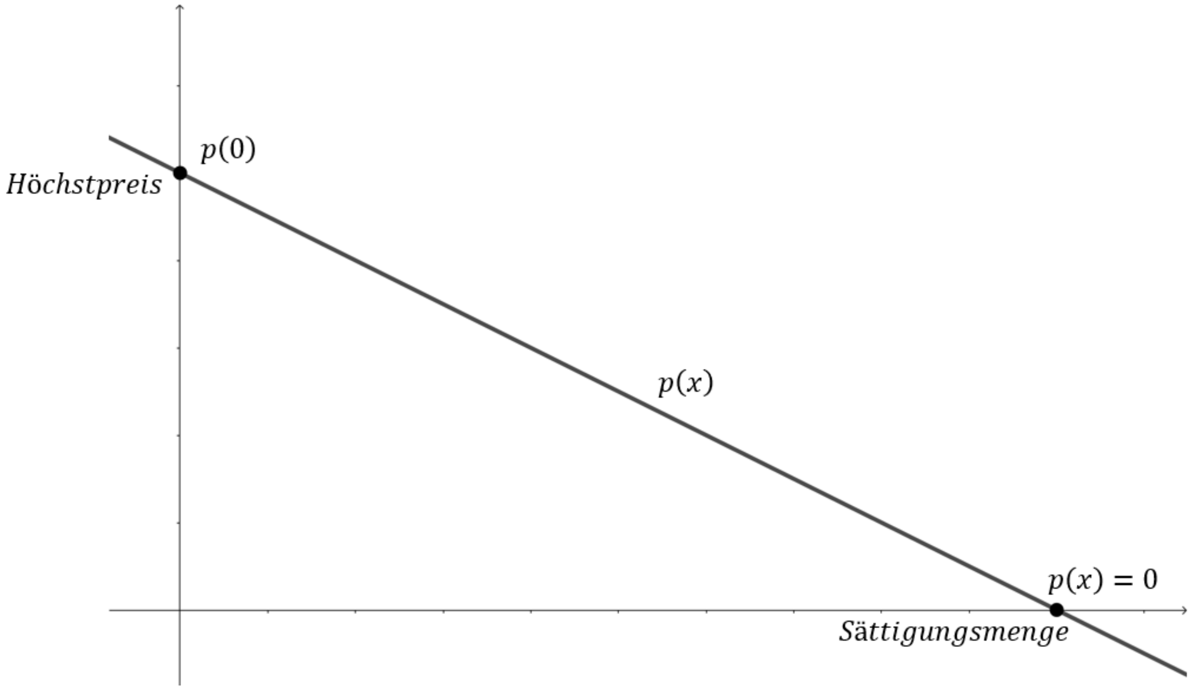
GEWINNGRENZEN



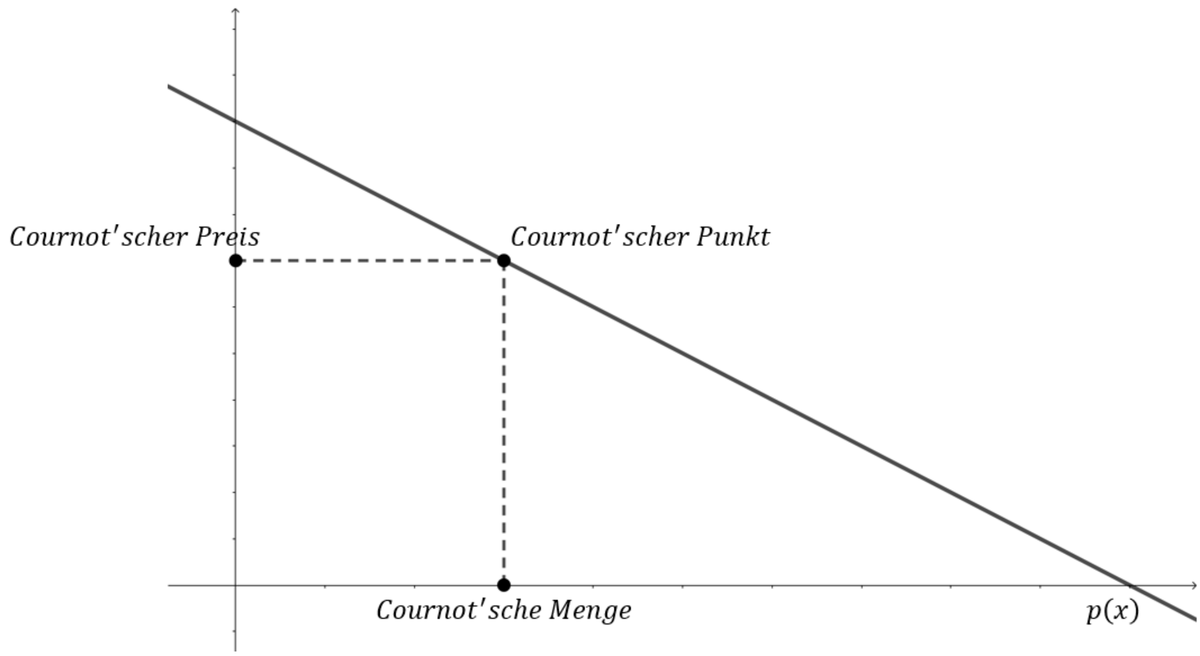
MAXIMALER GEWINN

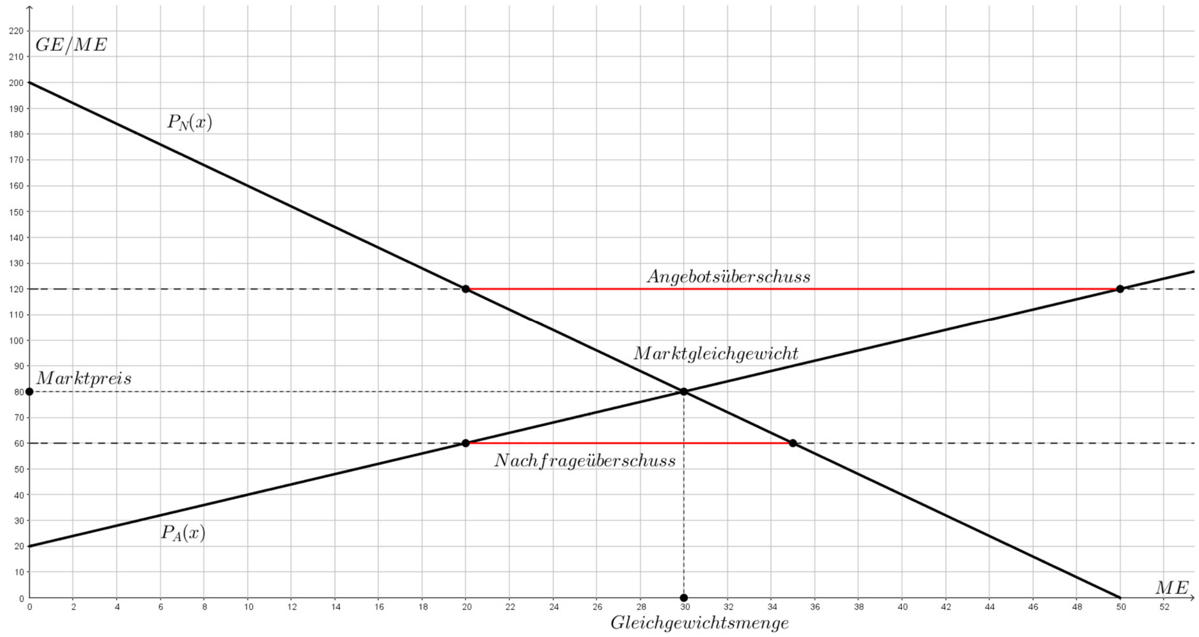


HÖCHSTPREIS & SÄTTIGUNGSMENGE



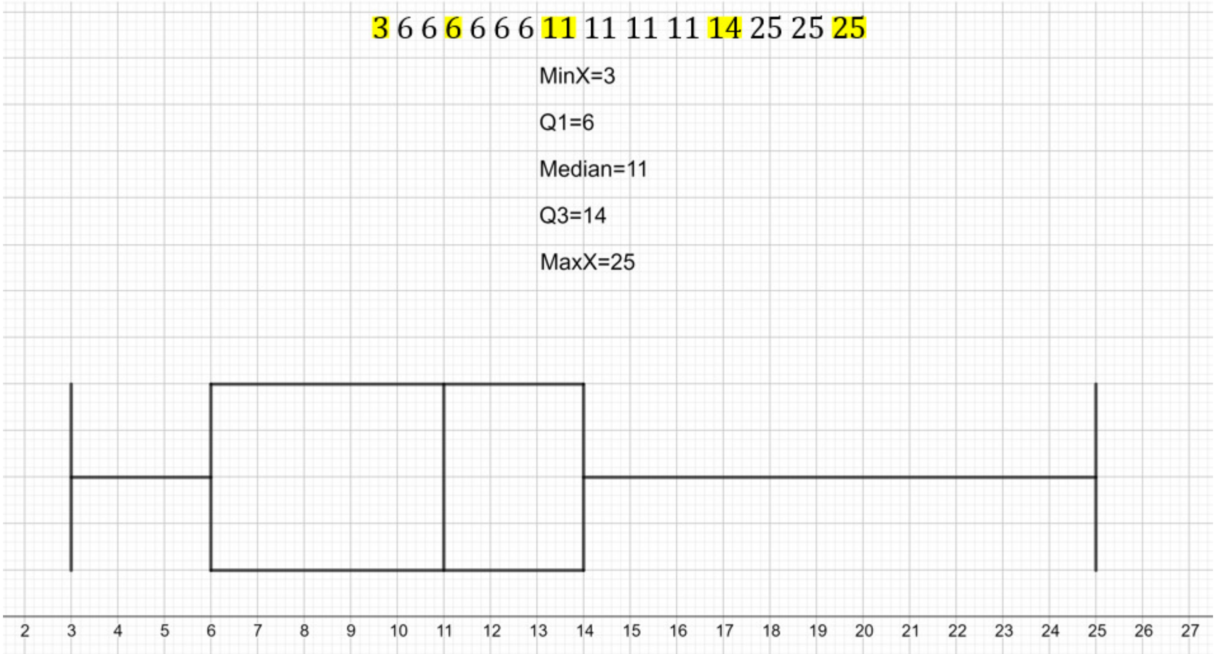
COURNOT'SCHER PUNKT



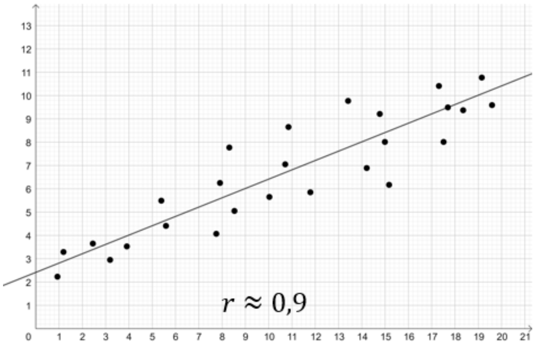

GE/ME
$P_N(x)$
Angebotsüberschuss
Marktgleichgewicht
Marktpreis
Nachfrageüberschuss
$P_A(x)$
ME
Gleichgewichtsmenge

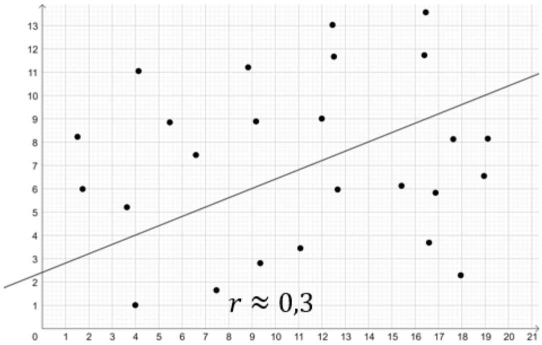
STATISTIK

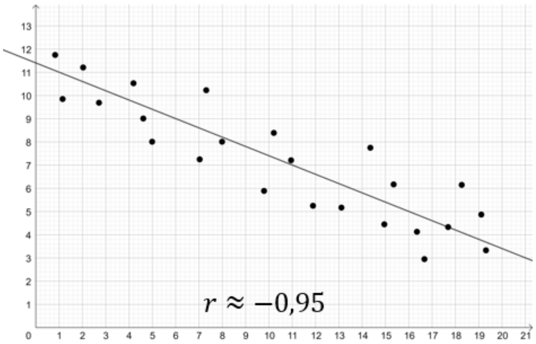
3 3 3 3 9 9 10 10 12 12 12 12 16 18 20 25

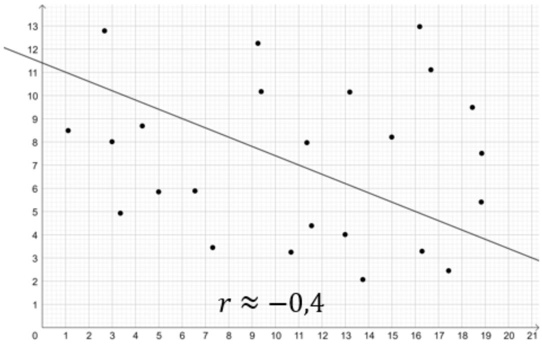


REGRESSIONSANALYSE









WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

AUGENSUMME ZWEIER SECHSSEITIGER WÜRFEL

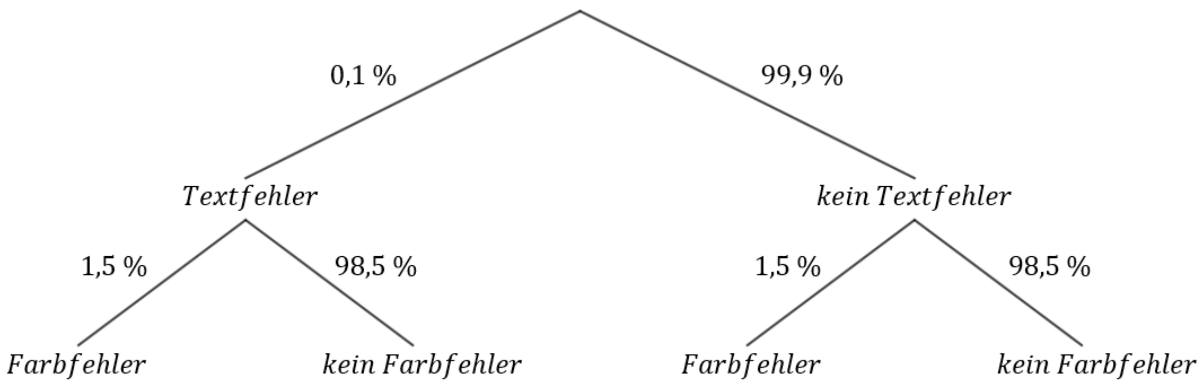
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$(6;3),(5;4),(4;5),(3;6)$$

$$P(9)=\frac{4}{36}$$

Bei der Produktion von bestimmten Spielkarten treten erfahrungsgemäß 2 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

P(„Textfehler“) = 0,1 %
P(„Farbfehler“) = 1,5 %



$$P(X < 5) = 1 - P(X \geq 5)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X \geq 4)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$$

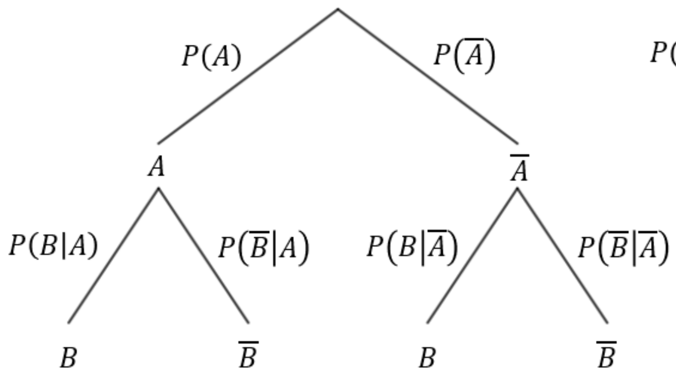
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$100\,\%$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$$

stochastisch unabhängig:

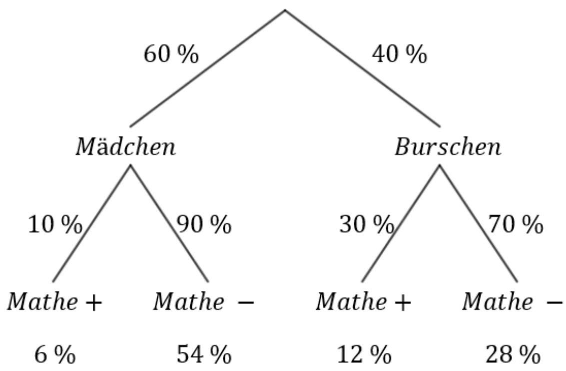
$$P(A) * P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = P(B|\overline{A})$$

$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 100\,\%$$

60 % *einer Klasse sind Mädchen.* 18 % *der Schüler sind gut in Mathe.* 6 % *der Schüler sind Mädchen und gut in Mathe.*

	Mathe +	*Mathe −*	
Mädchen	6 %	54 %	60 %
Burschen	12 %	28 %	40 %
	18 %	82 %	



BINOMIALVERTEILUNG

$$P(X=k)=\binom{n}{k}*p^k*(1-p)^{n-k}$$

$$P(X\leq k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}*p^i*(1-p)^{n-i}$$

$$P(X\geq k)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}*p^i*(1-p)^{n-i}$$

$$P(X\geq 1)=1-(1-p)^n$$

$$\mu=n*p$$

$$\sigma=\sqrt{n*p*(1-p)}$$

$6\ \%\ der\ BHS\ Schüler\ schrieben\ im\ Mai\ 2018\ ein\ Sehr\ Gut. In\ einer\ Klasse\ treten\ dieses\ Jahr\ 25\ Schüler\ an.$

$$\binom{25}{7}*0{,}06^7*0{,}94^{18}$$

$$25*0{,}06*0{,}94^{24}$$

$$0{,}94^{25}+\binom{25}{1}*0{,}06*0{,}94^{24}+\binom{25}{2}*0{,}06^2*0{,}94^{23}$$

$$1-0{,}06^{25}$$

$$1-0{,}94^{25}$$

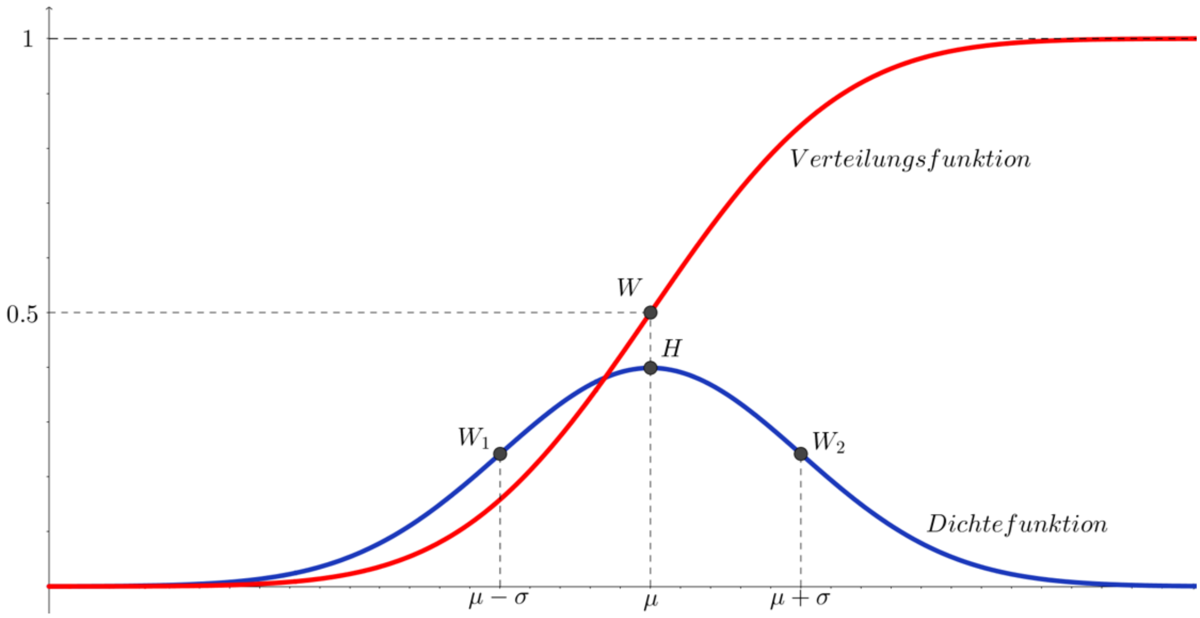
$$1-\left(\binom{25}{24}*0{,}06^{24}*0{,}94+0{,}06^{25}\right)$$

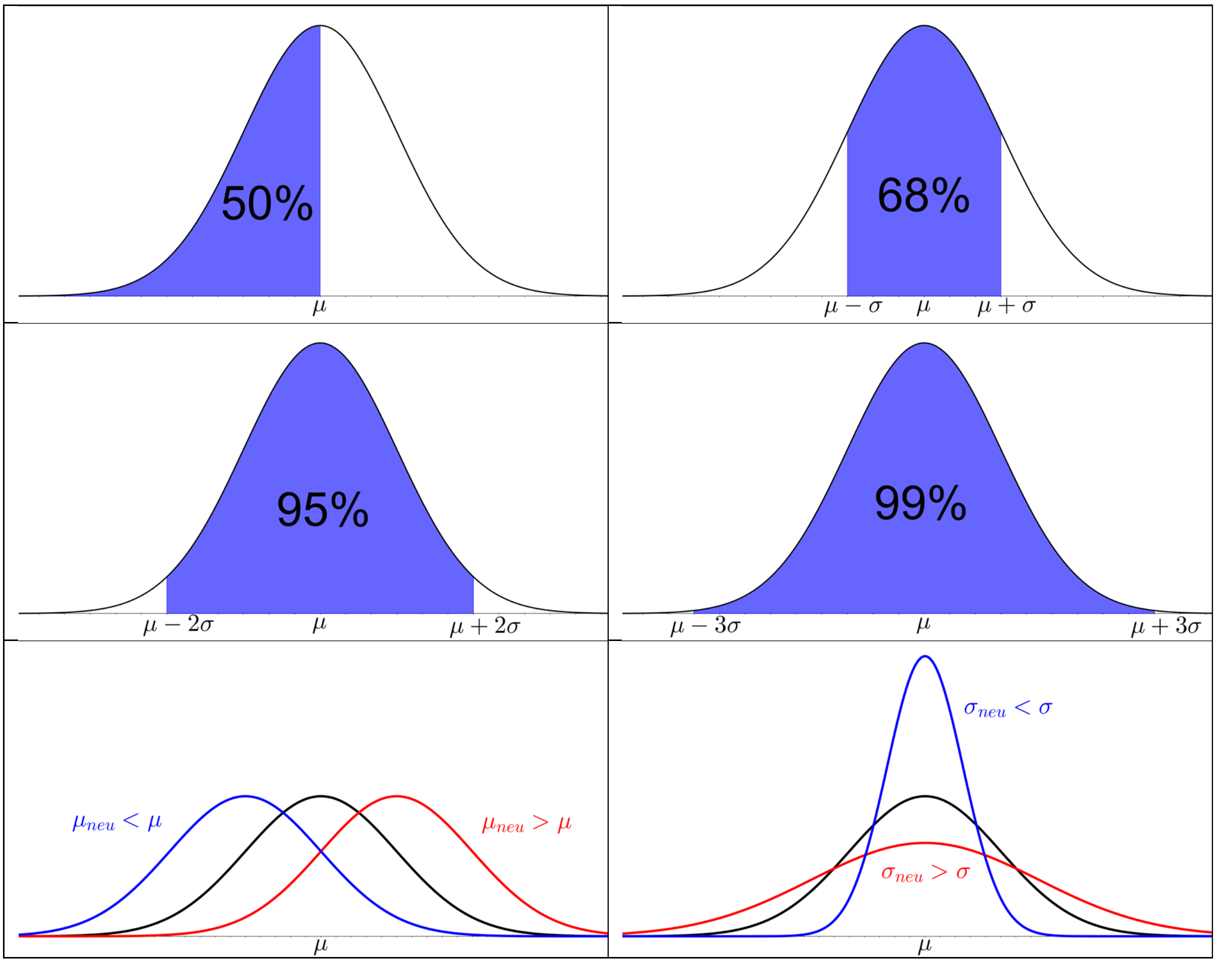
$$\sum_{i=0}^{6}\binom{25}{i}*0{,}06^i*0{,}94^{25-i}$$

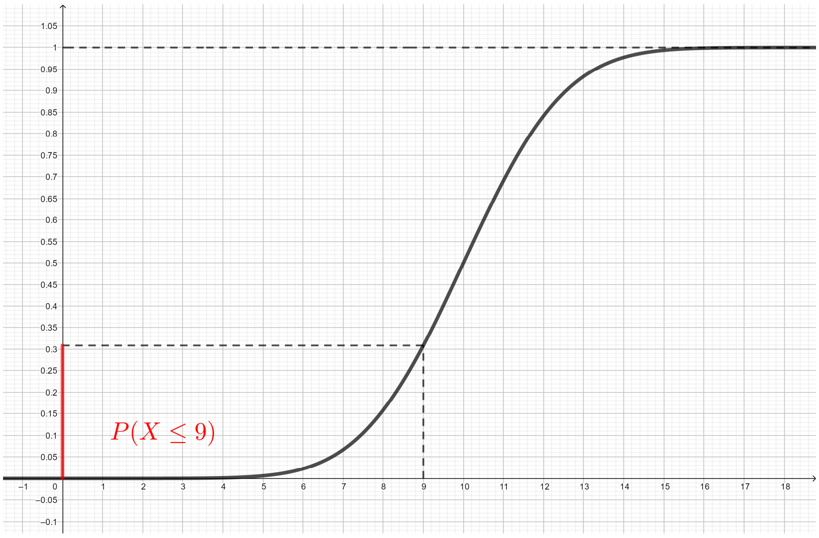
$$\sum_{i=10}^{25}\binom{25}{i}*0{,}06^{25-i}*0{,}94^i$$

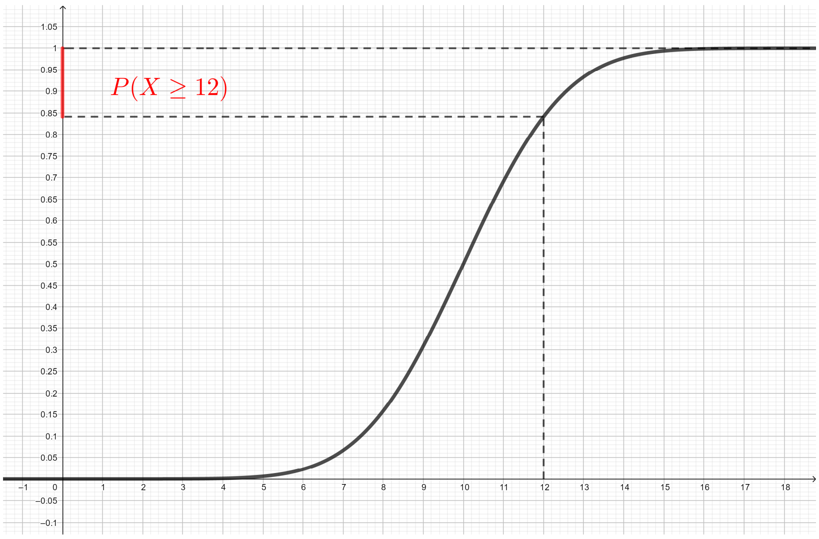
MATHAGO

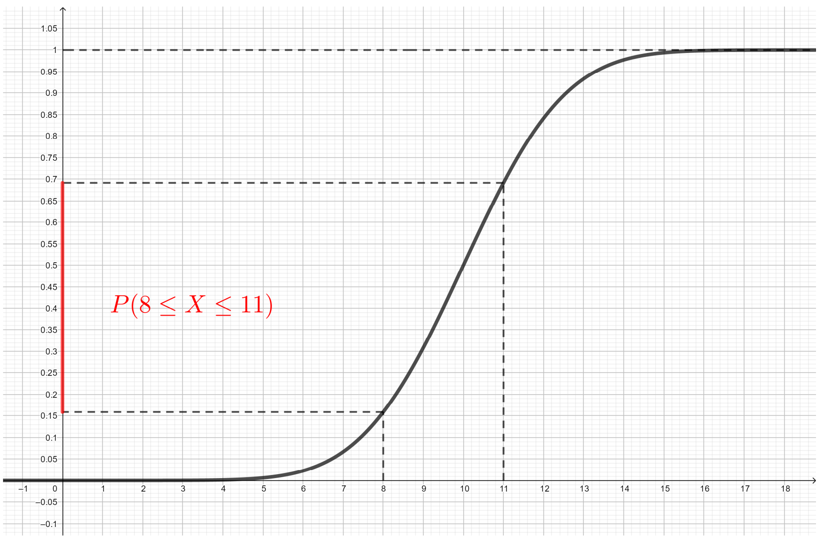
NORMALVERTEILUNG

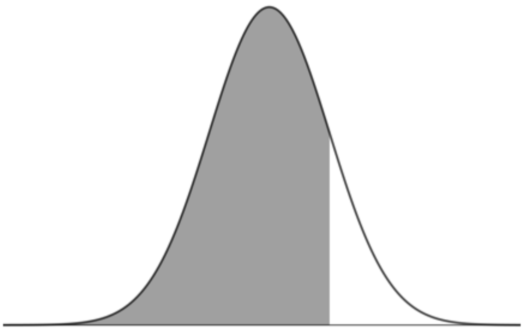




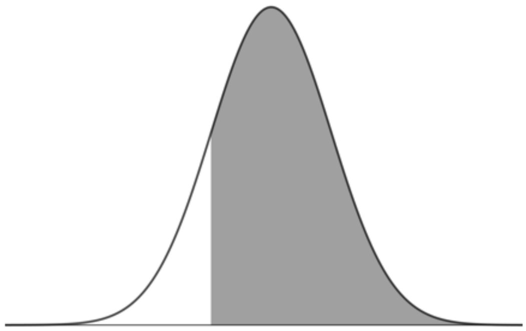

$P(X \leq 9)$


$P(X \geq 12)$

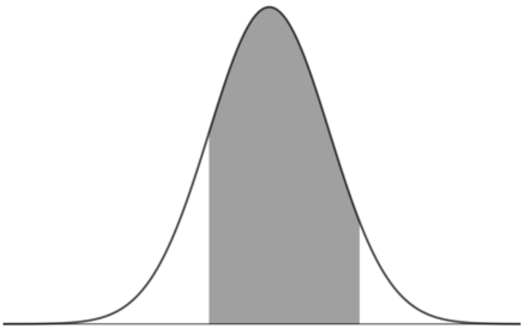

$P(8 \leq X \leq 11)$



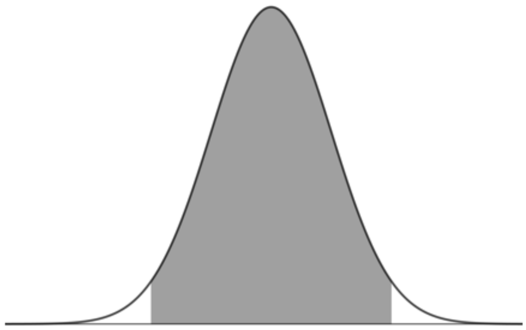
$P(X \leq a)$



$P(X \geq a)$



$P(a \leq X \leq b)$



$P(\mu - \epsilon \leq X \leq \mu + \epsilon)$