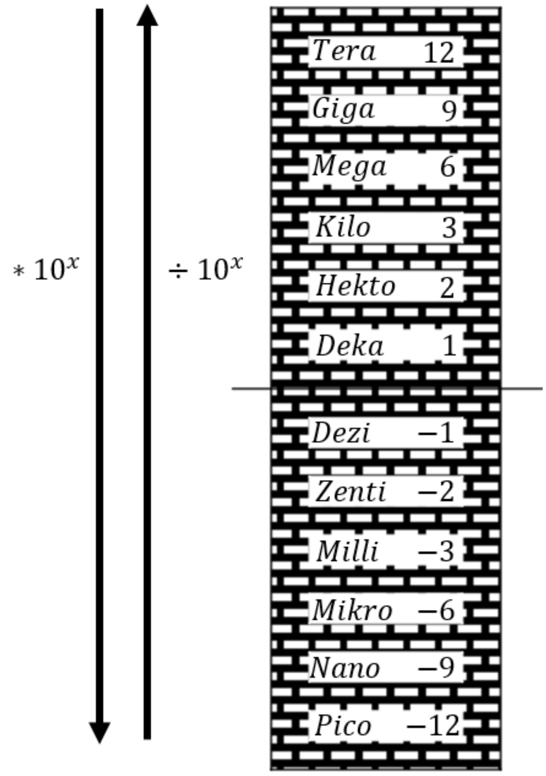
MATHAGO

MATHEMATIK MATURA VORBEREITUNGSKURS BHS – CLUSTER P

INHALTSVERZEICHNIS

GRUNDLAGEN



$$cm \xrightarrow{\div 10^5} km$$

$$MW \xrightarrow{\div 10^3} GW$$

$$hl \xrightarrow{* 10^3} dl$$

$$dm \xrightarrow{* 10^5} \mu m$$

$Meter, Gramm, Liter, Watt, Byte, Pascal, etc.$

$$cm^2 \xrightarrow{\div (10^5)^2} km^2$$

$$mm^3 \xrightarrow{\div (10^2)^3} dm^3$$

$$km^2 \xrightarrow{* (10^3)^2} m^2$$

$$m^3 \xrightarrow{* (10^3)^3} mm^3$$

p Prozent eines Wertes x berechnen:

$$x * \frac{p}{100}$$

p Prozent zu einem Wert x hinzufügen:

$$x * \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

p Prozent von einem Wert x abziehen:

$$x * \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

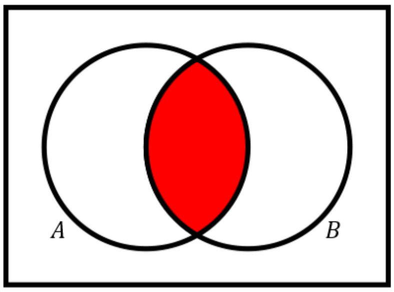
Prozentuellen Anteil an der Gesamtheit berechnen:

$$\frac{Anteil}{Gesamtheit}$$

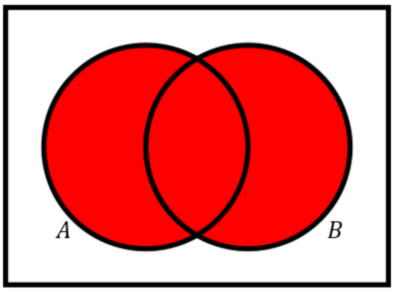
Prozentuelle Veränderung zwischen einem neuen und einem alten Wert berechnen:

$$\frac{Neu - Alt}{Alt}$$

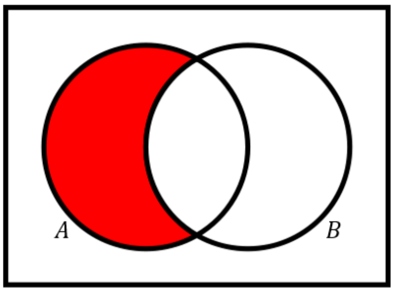
VENN DIAGRAMM



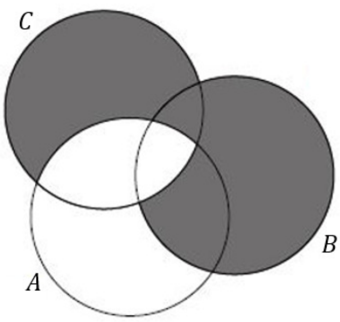
$A \cap B$



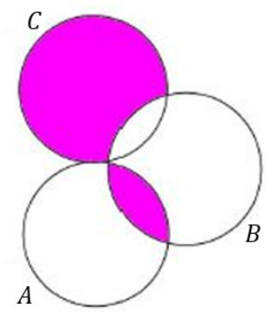
$A \cup B$



$A \backslash \mathrm{B}$



$(B \cup C) \backslash (A \cap C)$



$(C \backslash \mathrm{B}) \cup (A \cap B)$

FOLGEN & REIHEN

Arithmetische Folge

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

$d = a_{n+1} - a_n$

Rekursives Bildungsgesetz

$a_{n+1} = a_n + d$

Explizites Bildungsgesetz

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Geometrische Folge

$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Rekursives Bildungsgesetz

$b_{n+1} = b_n \cdot q$

Explizites Bildungsgesetz

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Endliche arithmetische Reihe

Summe der ersten *n* Glieder

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$

Endliche geometrische Reihe

Summe der ersten *n* Glieder

$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$

$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ mit $q \neq 1$

Unendliche geometrische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$

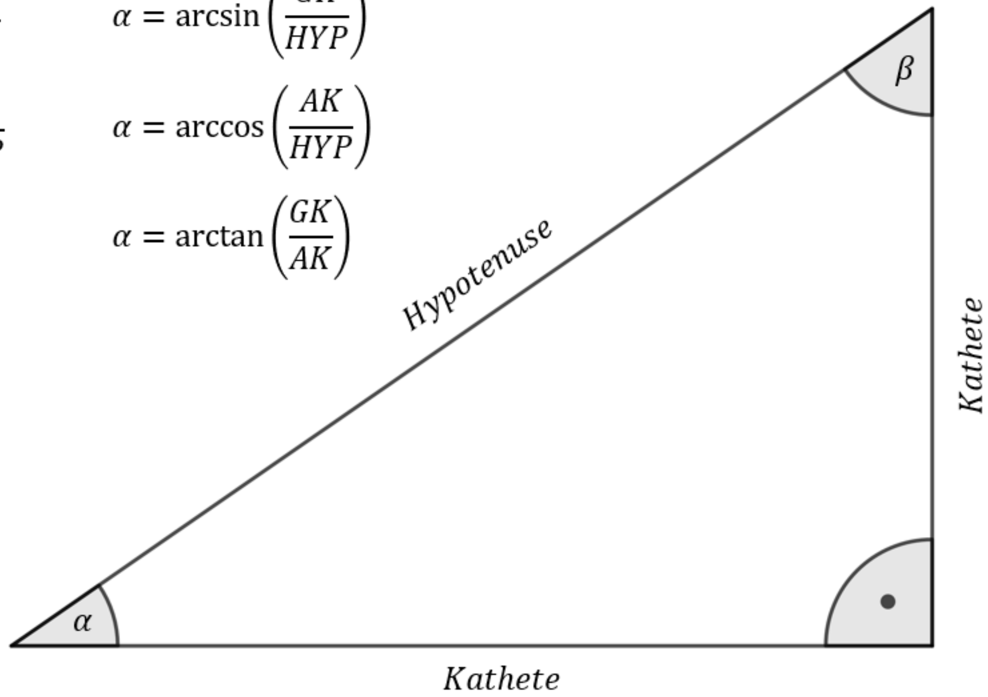
$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{b_1}{1-q}$ für $|q| < 1$

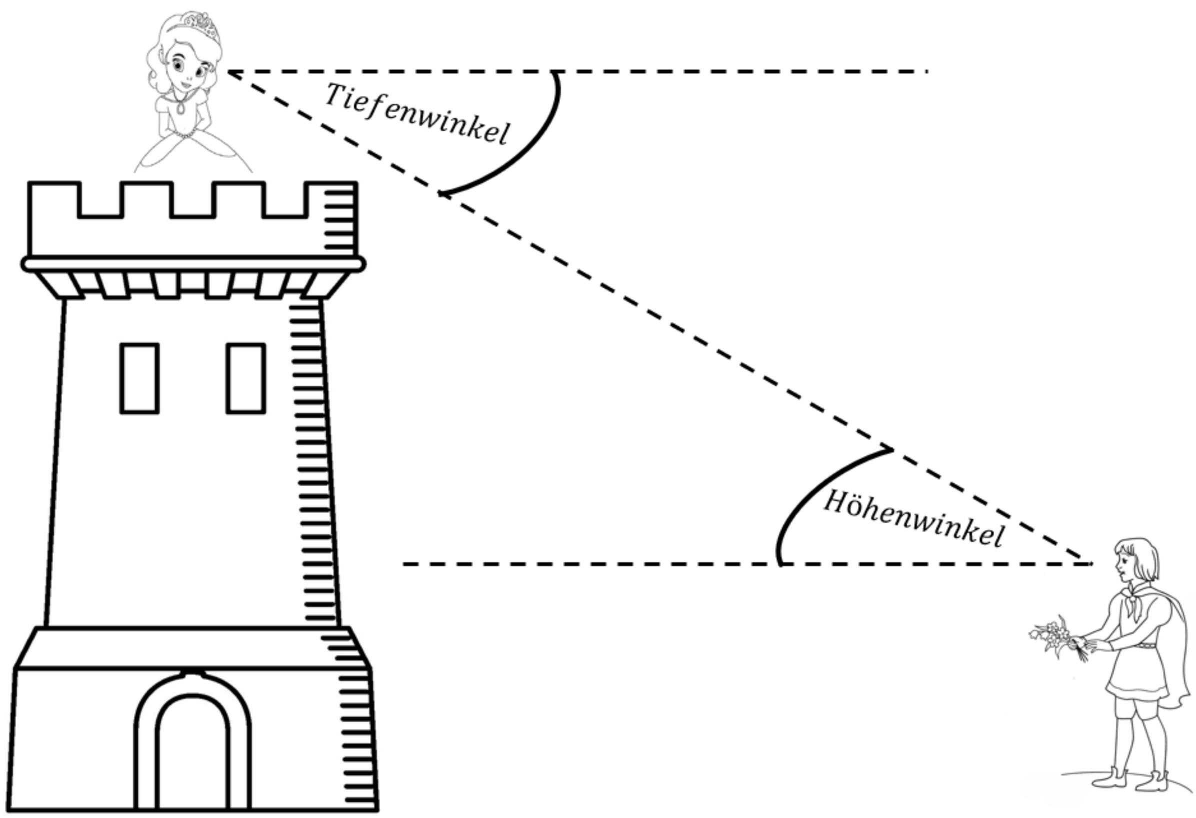
TRIGONOMETRIE IM RECHTWINKELIGEN DREIECK

$$\sin(\alpha) = \frac{GK}{HYP} \qquad \alpha = \arcsin\left(\frac{GK}{HYP}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AK}{HYP} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{AK}{HYP}\right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{GK}{AK}\right)$$





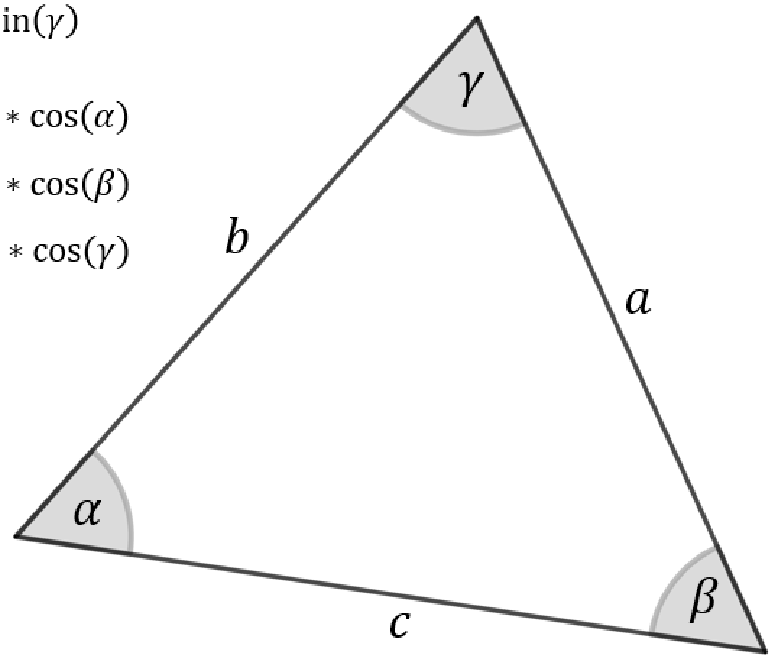
TRIGONOMETRIE IM ALLGEMEINEN DREIECK

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos(\gamma)$$



$$A = \frac{b * c * \sin(\alpha)}{2} = \frac{a * c * \sin(\beta)}{2} = \frac{a * b * \sin(\gamma)}{2}$$

VEKTOREN IN R2

Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Pfeil von P nach Q:

$P = (p_1|p_2)$, $Q = (q_1|q_2)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Betrag (Länge) eines Vektors in $\mathbb{R}^2$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Normalvektoren zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ und } |\vec{a}| \neq 0$$

Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$

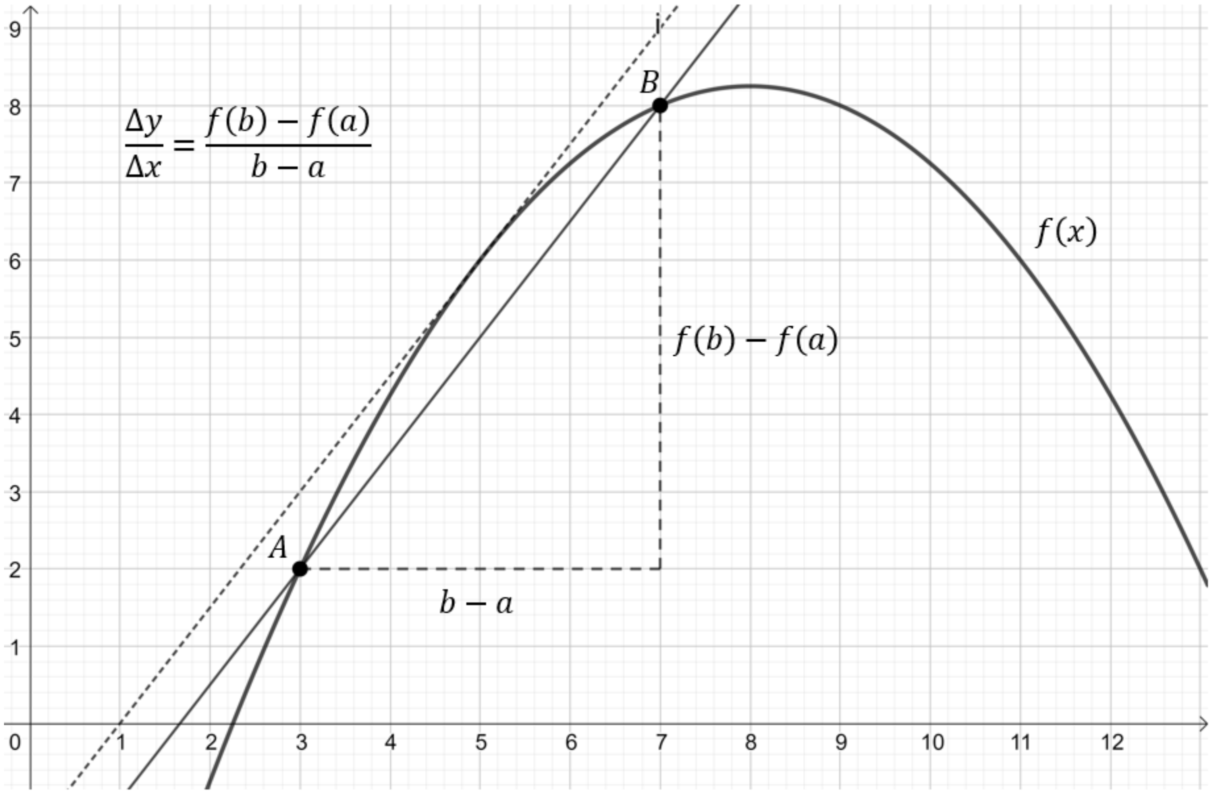
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

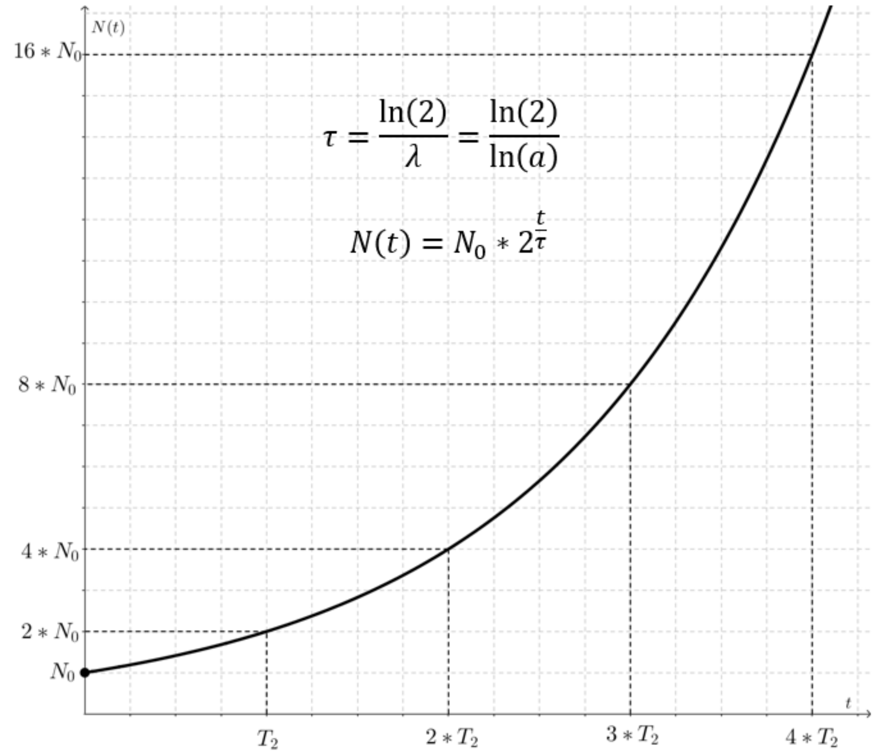
Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$

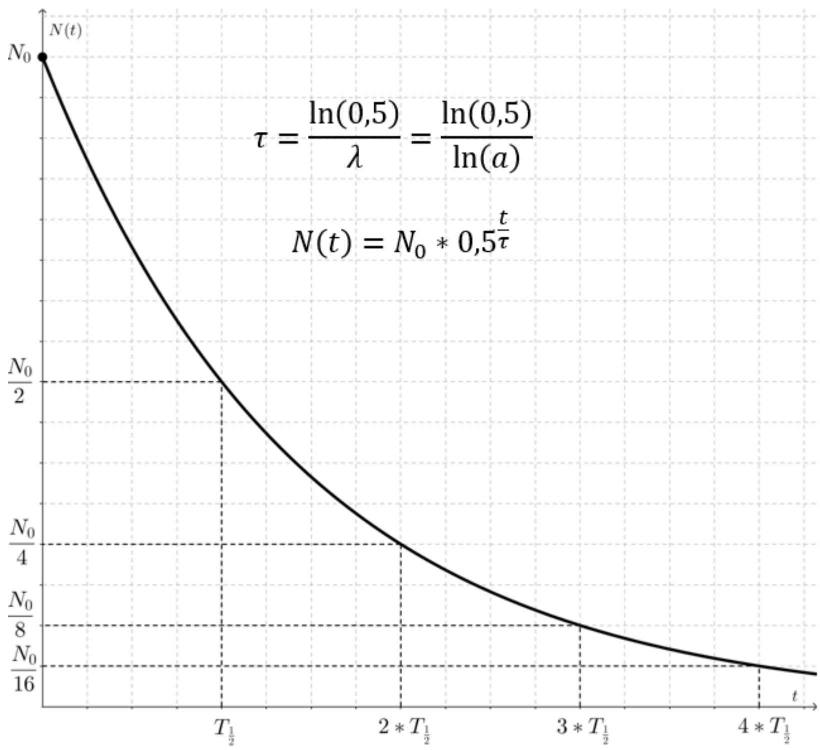
$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \text{ mit } |\vec{a}| \neq 0$$

ÄNDERUNGSMASSE

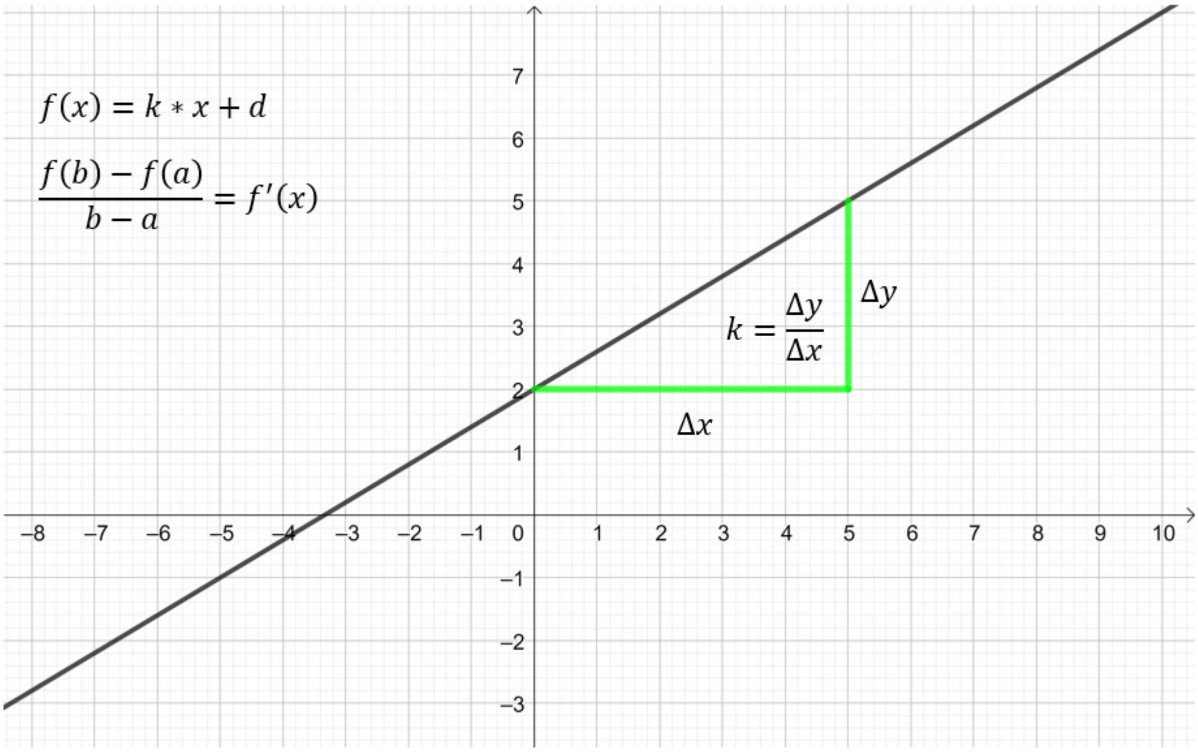


WACHSTUM & ZERFALL





LINEARE FUNKTION



QUADRATISCHE FUNKTION

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

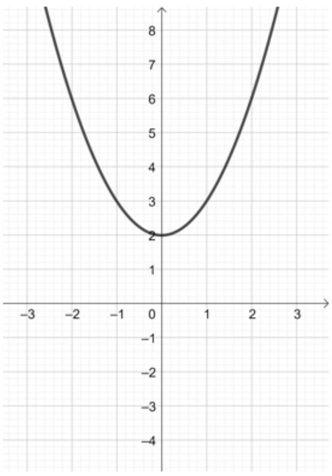
Wenn	Dann
$a < 0$	Negativ gekrümmt (Hochpunkt)
$a > 0$	Positiv gekrümmt (Tiefpunkt)
$b = 0$	Symmetrisch um die y-Achse
$b \neq 0$	Nicht symmetrisch um die y-Achse
c	Schnittpunkt auf y-Achse bei c
$c = 0$	Eine Nullstelle im Ursprung
$c = 0 \,\&\, b \neq 0$	2 Nullstellen, eine davon im Ursprung
$a < 0 \,\&\, c > 0$	2 Nullstellen
$a > 0 \,\&\, c < 0$	2 Nullstellen
$a < 0 \,\&\, b = 0 \,\&\, c < 0$	Keine Nullstelle
$a > 0 \,\&\, b = 0 \,\&\, c > 0$	Keine Nullstelle

$ax^2 + bx + c = 0$

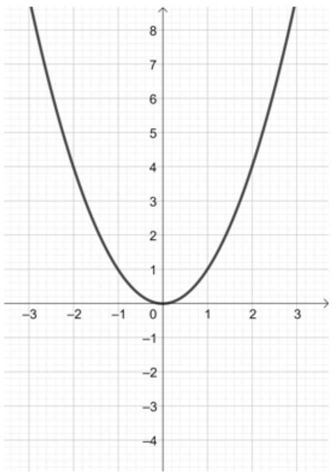
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$

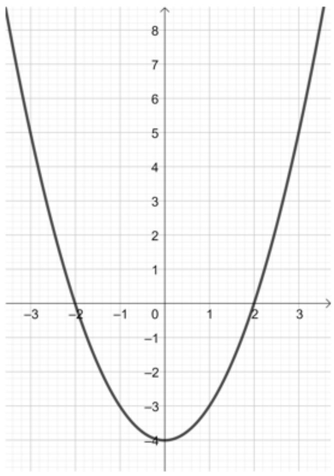
$D < 0$



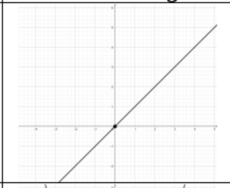
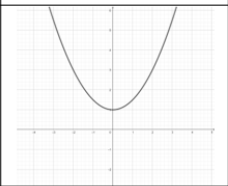
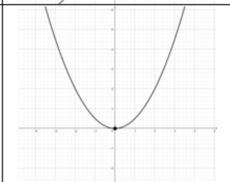
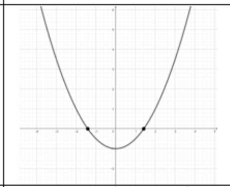
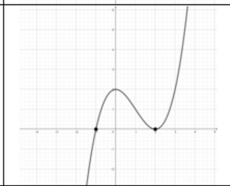
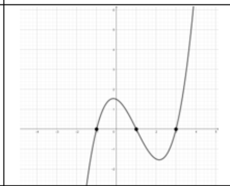
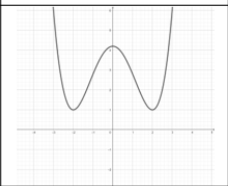
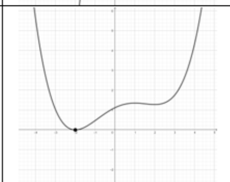
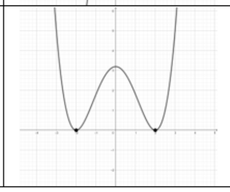
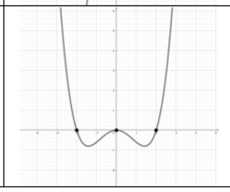
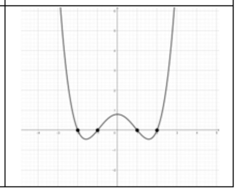
$D = 0$



$D > 0$



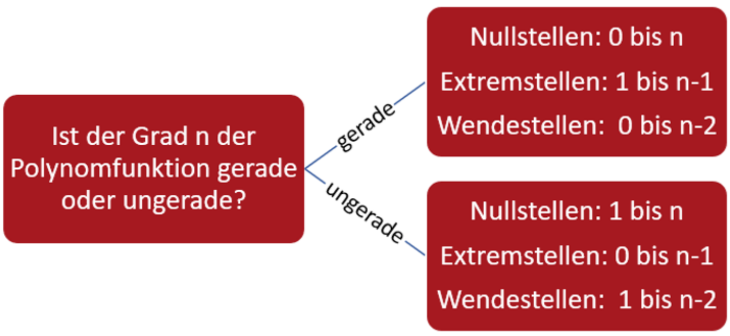
POLYNOMFUNKTION

Grad	*keine Lösung*	*eine Lösung*	*zwei Lösungen*	*drei Lösungen*	*vier Lösungen*
1					
2					
3					
4					

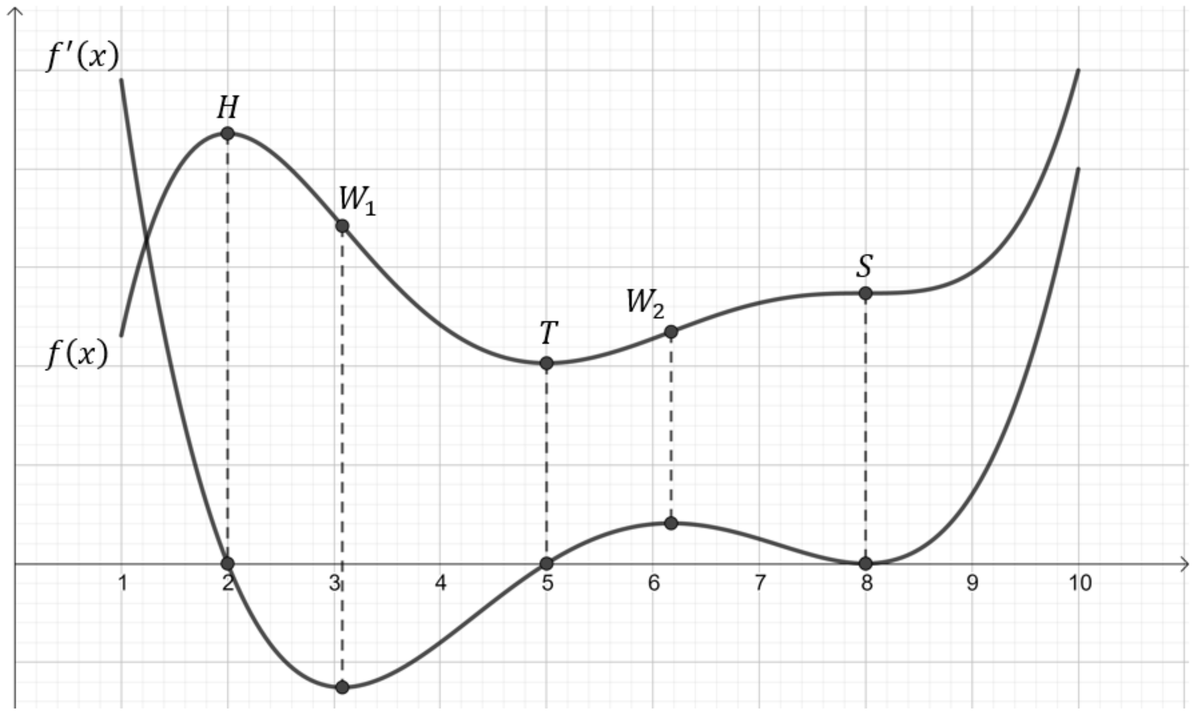
Der Grad einer Polynomfunktion gibt an, wie viele reele Lösungen diese Funktion maximal haben kann

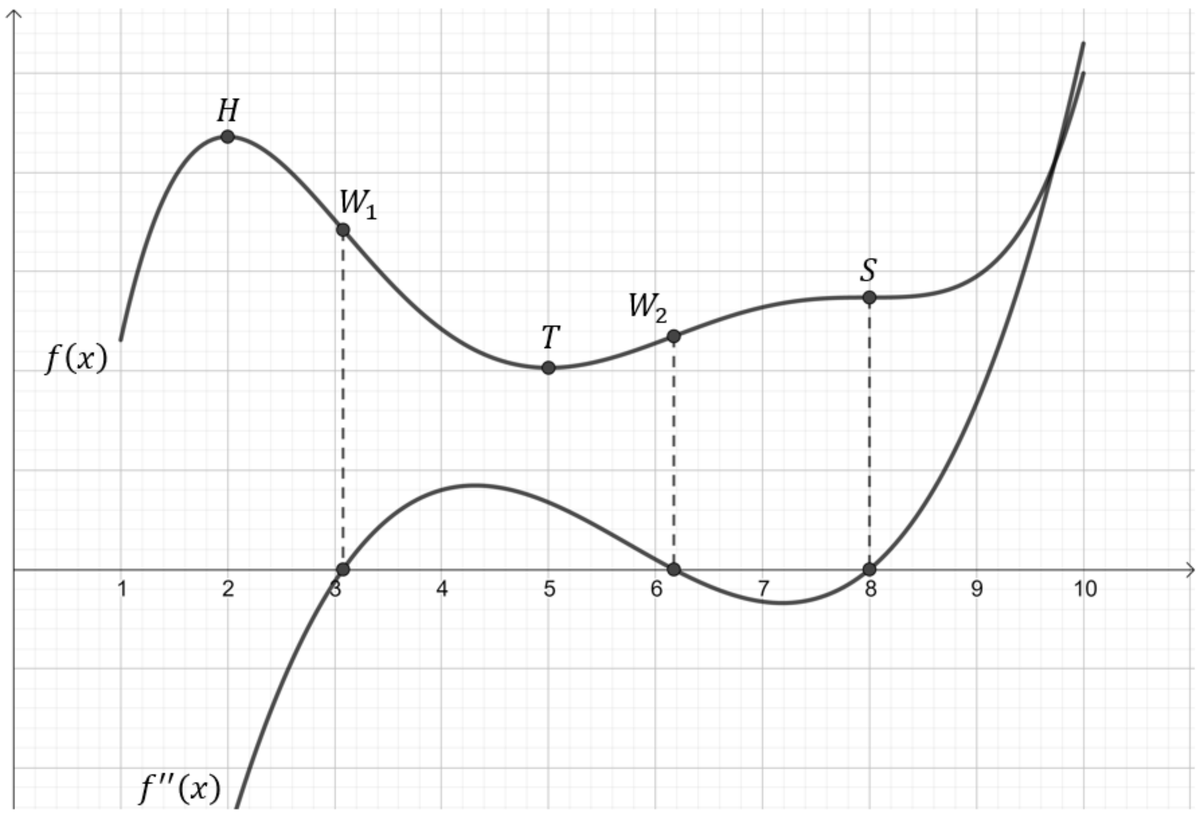
Polynomfunktionen geraden Grades können auch gar keine reele Lösung besitzen

Polynomfunktionen ungeraden Grades müssen mindestens eine reele Lösung haben



DIFFERENTIALRECHNUNG





$Nullstellen$: $f(x) = 0$

$Extremstellen$: $f'(x) = 0$

$f''(x_E) < 0 \rightarrow H$

$f''(x_E) = 0 \rightarrow S$

$f''(x_E) > 0 \rightarrow T$

$Wendestellen$: $f''(x) = 0$

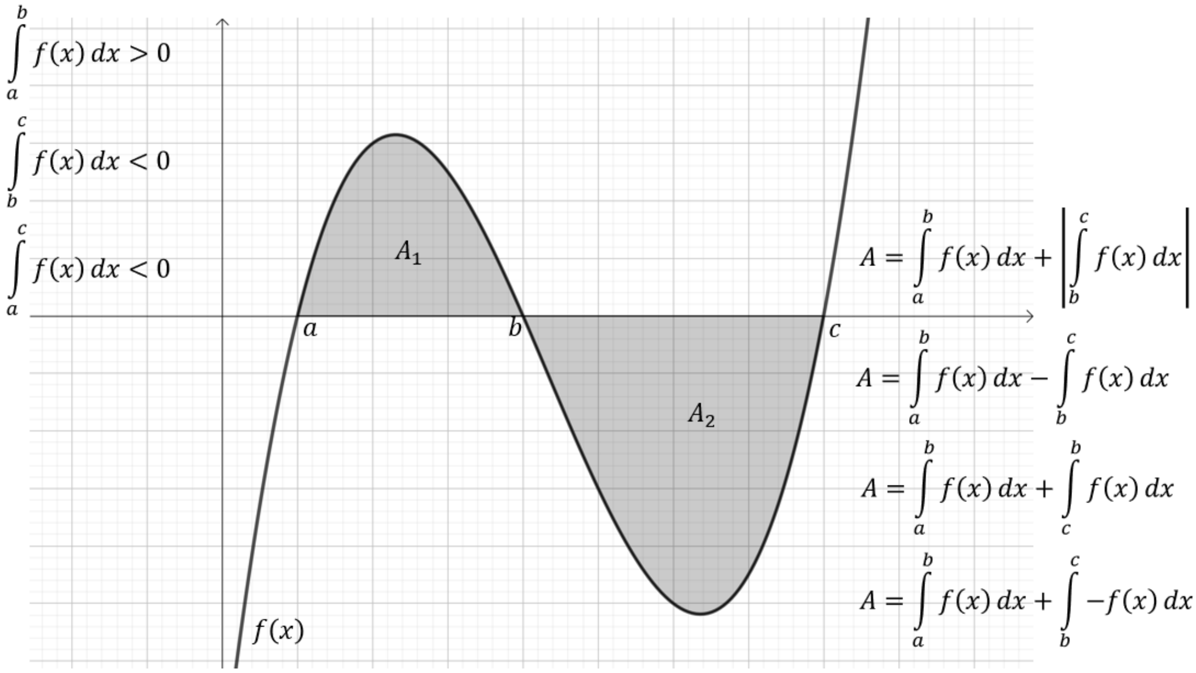
$Steigungswinkel$: $\alpha = \arctan(f'(x))$

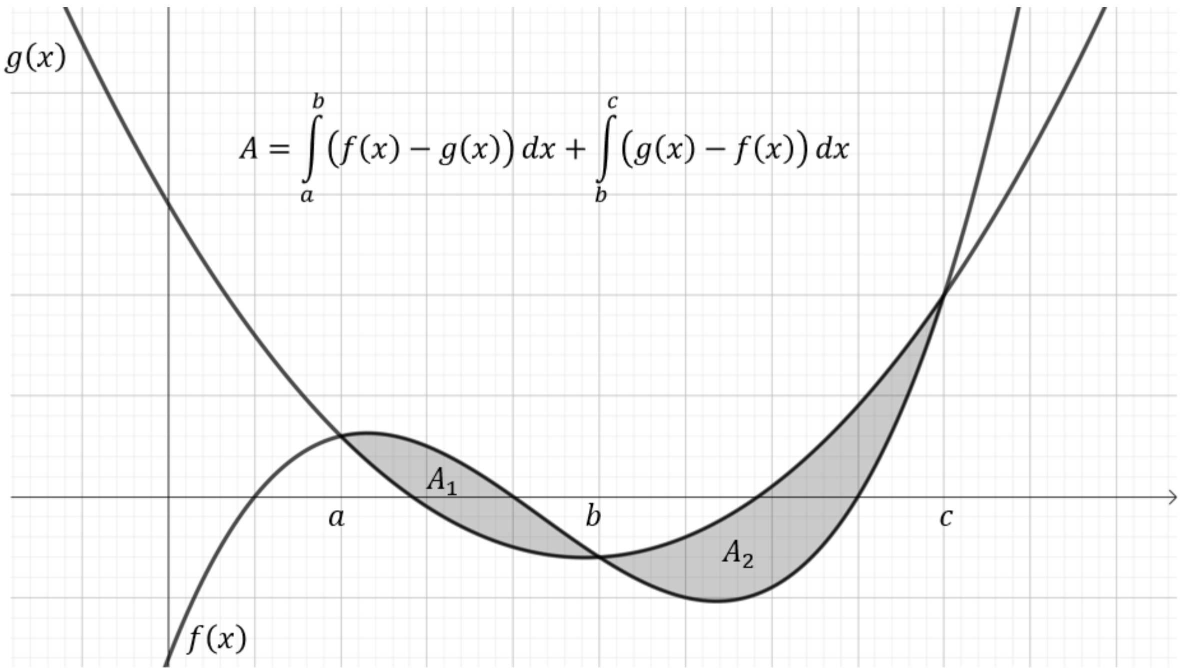
UMKEHRAUFGABEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$
Die Funktion f geht durch den Punkt $P(x_P/y_P)$.	$f(x_P) = y_P$
Bsp: Die Funktion f geht durch den Punkt $P(4/2)$.	$f(4) = 2$ $a * 4^3 + b * 4^2 + c * 4 + d = 2$
Die Funktion f hat bei $N(x_N/0)$ eine Nullstelle.	$f(x_N) = 0$
Bsp: Die Funktion f hat bei $N(-2/0)$ eine Nullstelle.	$f(-2) = 0$ $a * (-2)^3 + b * (-2)^2 + c * (-2) + d = 0$
Die Funktion f hat an der Stelle $x = x_1$ die Steigung k.	$f'(x_1) = k$
Bsp: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung -1.	$f'(3) = -1$ $3a * 3^2 + 2b * 3 + c = -1$
Die Funktion f hat an der Stelle $x = x_1$ den Steigungswinkel α.	$f'(x_1) = \tan(\alpha)$
Bsp: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ den Steigungswinkel $30°$.	$f'(2) = \tan(30°)$ $3a * 2^2 + 2b * 2 + c = \tan(30°)$
Die Funktion f hat den Extremwert $E(x_E/y_E)$.	$f(x_E) = y_E$ $f'(x_E) = 0$
Bsp: Die Funktion f hat den Extremwert $E(-1/5)$.	$f(-1) = 5$ $a * (-1)^3 + b * (-1)^2 + c * (-1) + d = 5$ $f'(-1) = 0$ $3a * (-1)^2 + 2b * (-1) + c = 0$
Die Funktion f hat den Wendepunkt $W(x_W/y_W)$.	$f(x_W) = y_W$ $f''(x_W) = 0$
Bsp: Die Funktion f hat den Wendepunkt $W(5/4)$.	$f(5) = 4$ $a * 5^3 + b * 5^2 + c * 5 + d = 4$ $f''(5) = 0$ $6a * 5 + 2b = 0$

Die Funktion $\boldsymbol{f}$ hat den Sattelpunkt $\boldsymbol{S(x_S/y_S)}$.	$f(x_S) = y_S$ $f'(x_S) = 0$ $f''(x_S) = 0$
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ schneidet die $\boldsymbol{x}$-Achse an der Stelle $\boldsymbol{x = x_1}$.	$f(x_1) = 0$
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ berührt die $\boldsymbol{x}$-Achse an der Stelle $\boldsymbol{x = x_1}$.	$f(x_1) = 0$ $f'(x_1) = 0$
Die Funktion $\boldsymbol{f}$ berührt (knickfrei) die Funktion $\boldsymbol{g}$ an der Stelle $\boldsymbol{x = x_1}$.	$f(x_1) = g(x_1)$ $f'(x_1) = g'(x_1)$

INTEGRALRECHNUNG





BEWEGUNGSAUFGABEN

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \iint a(t)\,dt$$

$$s'(t) = v(t) = \int a(t)\,dt$$

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

$$s = v * t \quad \rightarrow \quad v = \frac{s}{t}$$

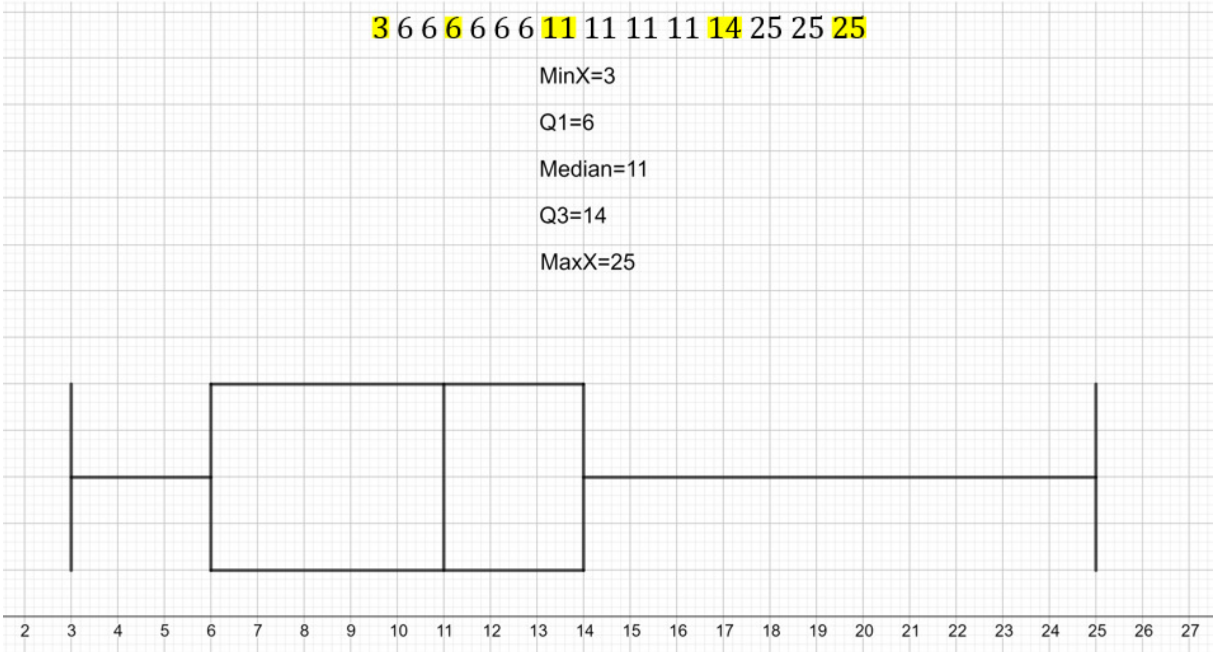
$$\overline{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\overline{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

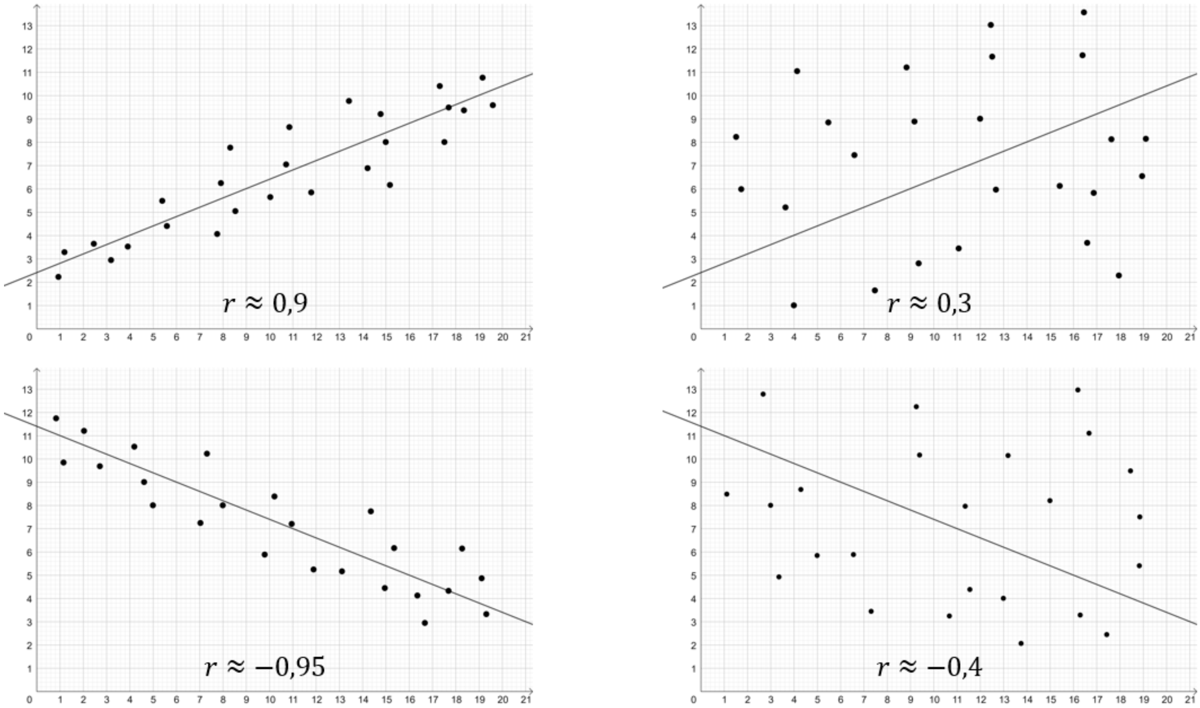
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

STATISTIK

3 3 3 3 9 9 10 10 12 12 12 12 16 18 20 25



REGRESSIONSANALYSE



WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

AUGENSUMME ZWEIER SECHSSEITIGER WÜRFEL

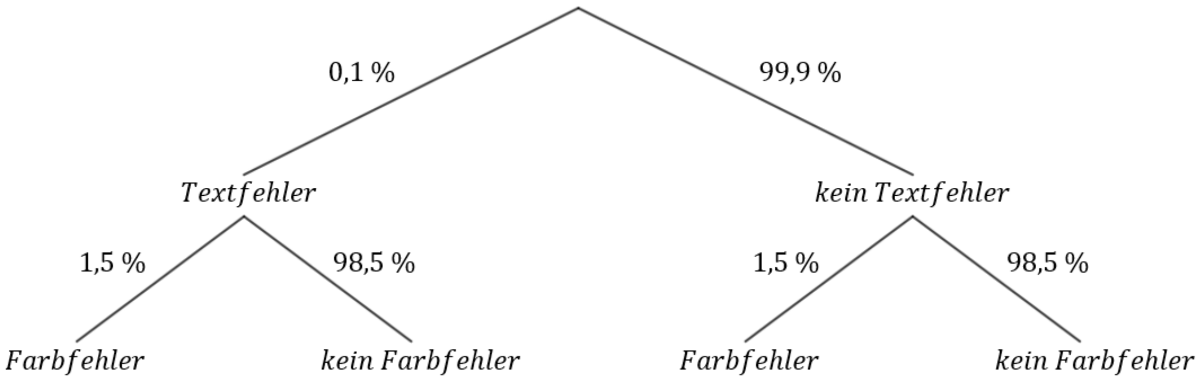
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$(6;3),(5;4),(4;5),(3;6)$$

$$P(9)=\frac{4}{36}$$

Bei der Produktion von bestimmten Spielkarten treten erfahrungsgemäß 2 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

$P(„\text{Textfehler}“) = 0{,}1\ \%$
$P(„\text{Farbfehler}“) = 1{,}5\ \%$



$$P(X < 5) = 1 - P(X \geq 5)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X \geq 4)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n-1	n

WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG

Erwartungswert μ einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz σ^2 einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

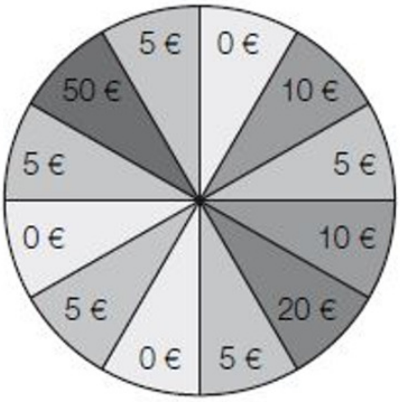
$$P(X = 0) = \frac{3}{12}$$

$$P(X = 5) = \frac{5}{12}$$

$$P(X = 10) = \frac{2}{12}$$

$$P(X = 20) = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 50) = \frac{1}{12}$$



$$E(X) = 0 * \frac{3}{12} + 5 * \frac{5}{12} + 10 * \frac{2}{12} + 20 * \frac{1}{12} + 50 * \frac{1}{12} = 9{,}58\ €$$

BINOMIALVERTEILUNG

$$P(X=k)=\binom{n}{k}*p^k*(1-p)^{n-k}$$

$$P(X\leq k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}*p^i*(1-p)^{n-i}$$

$$P(X\geq k)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}*p^i*(1-p)^{n-i}$$

$$P(X\geq 1)=1-(1-p)^n$$

$$\mu=n*p$$

$$\sigma=\sqrt{n*p*(1-p)}$$

$6\ \%\ der\ BHS\ Schüler\ schrieben\ im\ Mai\ 2018\ ein\ Sehr\ Gut. In\ einer\ Klasse\ treten\ dieses\ Jahr\ 25\ Schüler\ an.$

$$\binom{25}{7}*0{,}06^7*0{,}94^{18}$$

$$25*0{,}06*0{,}94^{24}$$

$$0{,}94^{25}+\binom{25}{1}*0{,}06*0{,}94^{24}+\binom{25}{2}*0{,}06^2*0{,}94^{23}$$

$$1-0{,}06^{25}$$

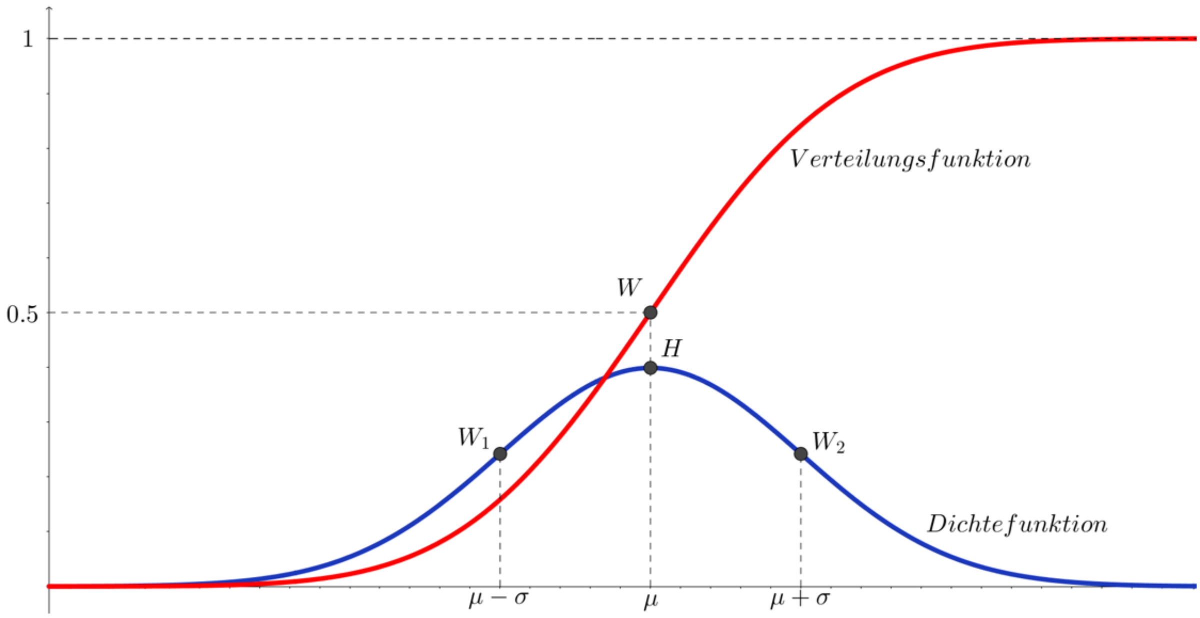
$$1-0{,}94^{25}$$

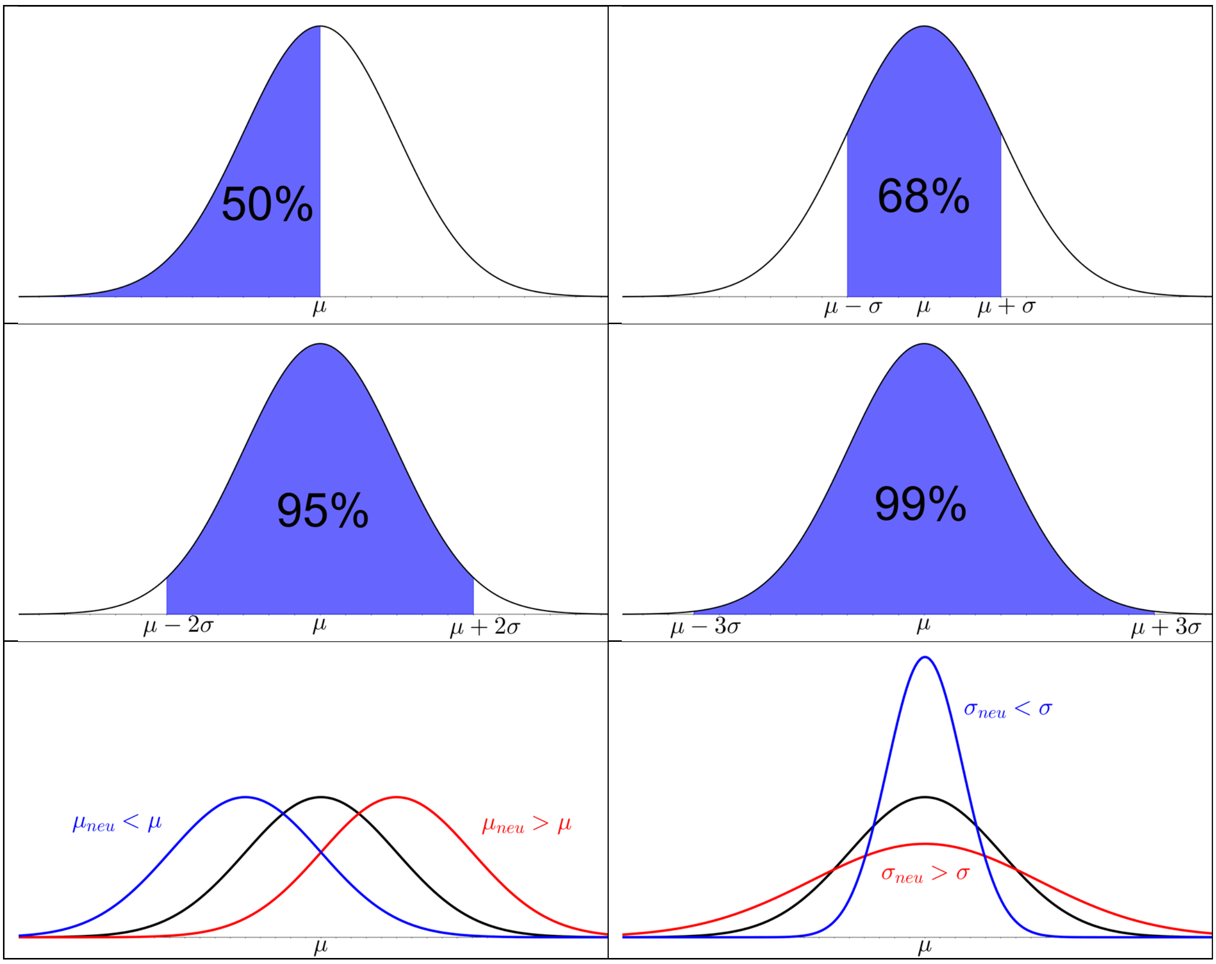
$$1-\left(\binom{25}{24}*0{,}06^{24}*0{,}94+0{,}06^{25}\right)$$

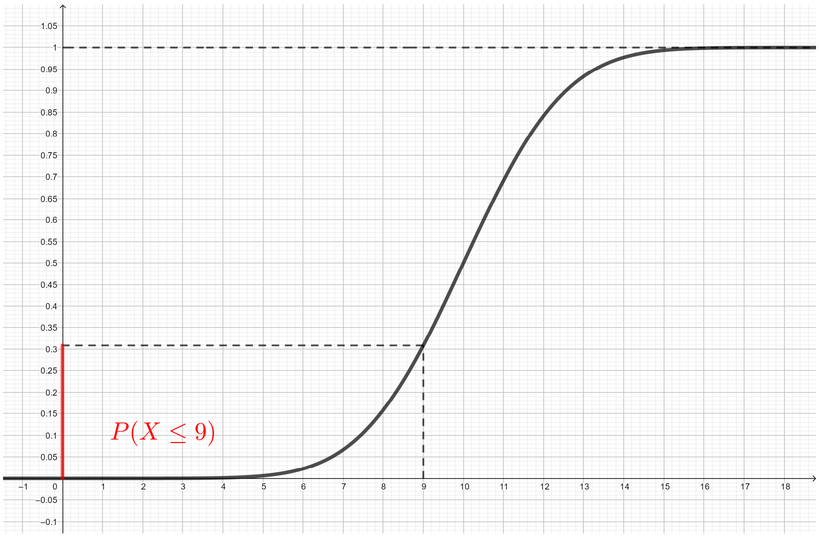
$$\sum_{i=0}^{6}\binom{25}{i}*0{,}06^i*0{,}94^{25-i}$$

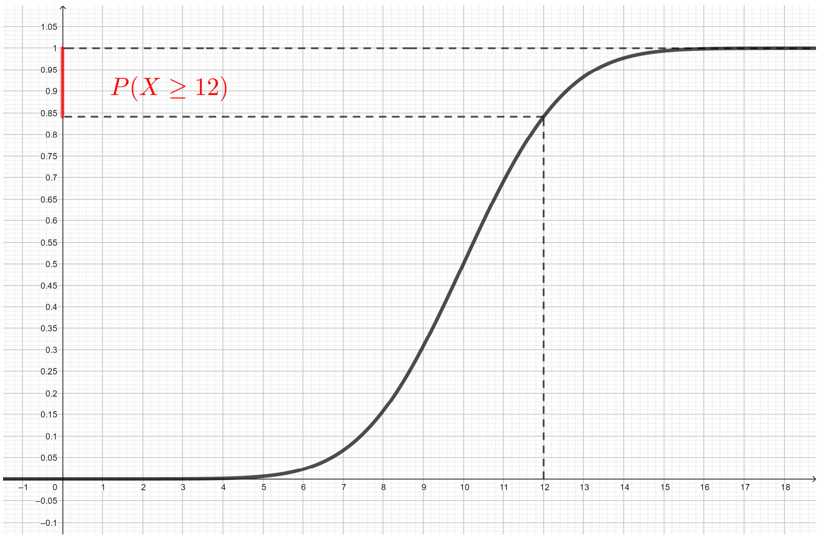
$$\sum_{i=10}^{25}\binom{25}{i}*0{,}06^{25-i}*0{,}94^i$$

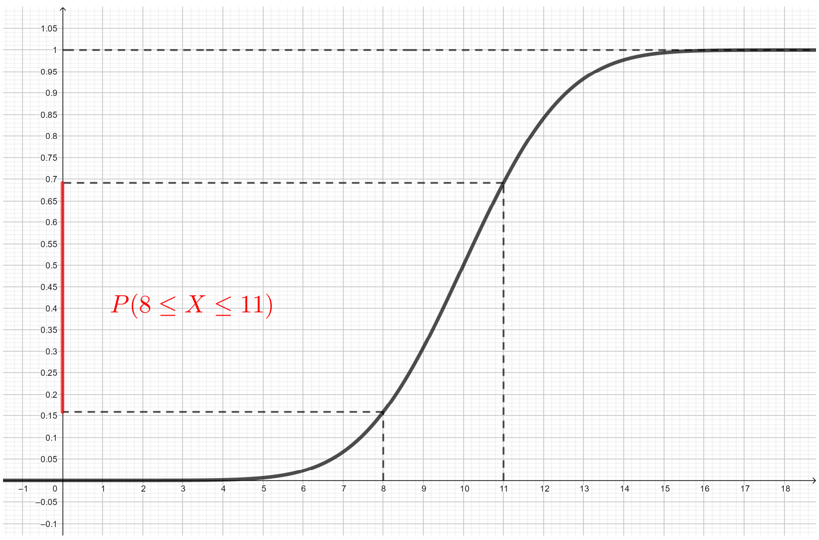
NORMALVERTEILUNG

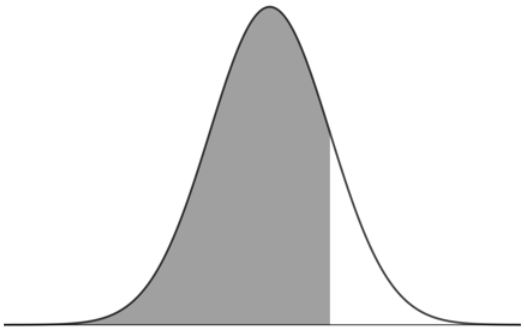




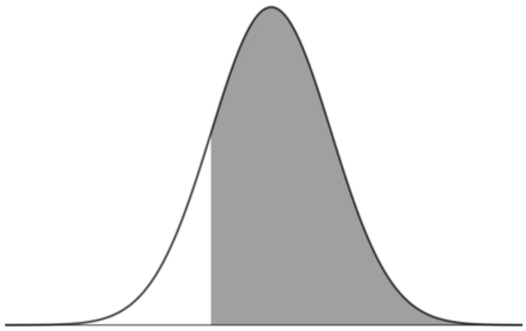

$P(X \leq 9)$


$P(X \geq 12)$

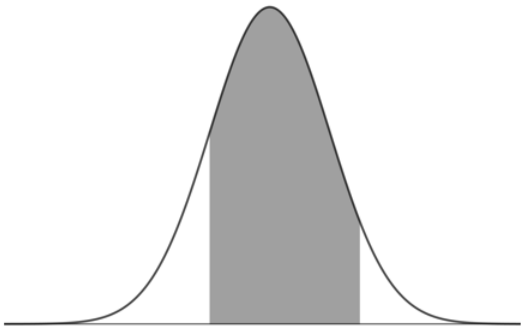

$P(8 \leq X \leq 11)$



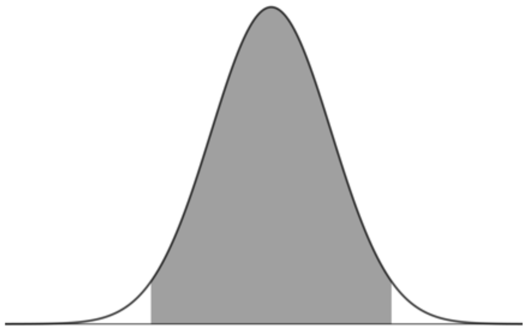
$P(X \leq a)$



$P(X \geq a)$



$P(a \leq X \leq b)$



$P(\mu - \epsilon \leq X \leq \mu + \epsilon)$