Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

20. September 2019

Mathematik

Teil-1- und Teil-2-Aufgaben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft enthält Teil-1-Aufgaben und Teil-2-Aufgaben (bestehend aus Teilaufgaben). Die Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen insgesamt *270 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft und das Ihnen zur Verfügung gestellte Arbeitspapier. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Klasse in die dafür vorgesehenen Felder auf dem Deckblatt des Aufgabenhefts sowie Ihren Namen und die fortlaufende Seitenzahl auf jedes verwendete Blatt Arbeitspapier. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung auf dem Arbeitspapier an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst.

Sie dürfen die für diesen Klausurtermin freigegebene Formelsammlung sowie zugelassene elektronische Hilfsmittel verwenden, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendaten im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Eine Erläuterung der Antwortformate liegt im Prüfungsraum auf und kann auf Wunsch eingesehen werden.

Das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter sind abzugeben.

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Bewertung

Die Aufgaben im Teil 1 werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bzw. 0 Punkten, ½ oder 1 Punkt bewertet. Die zu erreichenden Punkte pro Aufgabe sind bei jeder Teil-1-Aufgabe im Aufgabenheft angeführt.
Jede Teilaufgabe im Teil 2 wird mit 0, 1 oder 2 Punkten bewertet. Die mit $\boxed{A}$ markierten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

Zwei Beurteilungswege

1) Wenn Sie **mindestens 16** von 28 Punkten (24 Teil-1-Punkte + 4 $\boxed{A}$-Punkte aus Teil 2) erreicht haben, gilt der folgende Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23,5 Punkte
Befriedigend	24–32,5 Punkte
Gut	33–40,5 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

2) Wenn Sie **weniger als 16** von 28 Punkten (24 Teil-1-Punkte + 4 $\boxed{A}$-Punkte aus Teil 2) erreicht haben, aber **insgesamt 24 Punkte oder mehr** (aus Teil-1- und Teil-2-Aufgaben) erreicht haben, dann können Sie auf diesem Weg ein „Genügend“ oder „Befriedigend“ erreichen:

Genügend	24–28,5 Punkte
Befriedigend	29–35,5 Punkte

Ab 36 erreichten Punkten gilt der unter 1) angeführte Beurteilungsschlüssel.

Die Arbeit wird mit „Nicht genügend“ beurteilt, wenn im Teil 1 unter Berücksichtigung der mit $\boxed{A}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Punkte und insgesamt weniger als 24 Punkte erreicht wurden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Zwischen Zahlenmengen bestehen bestimmte Beziehungen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden wahren Aussagen an.

$\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{N}$	☐
$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^-$	☐
$\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{Q}$	☐
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 2

Lineares Gleichungssystem

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x_1 und x_2. Es gilt: $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 = a \\ \text{II:} & b \cdot x_1 + \phantom{4 \cdot{}} x_2 = a \\ \hline \end{array}$$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass für die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = \{(2; -2)\}$ ist.

a = ____________________

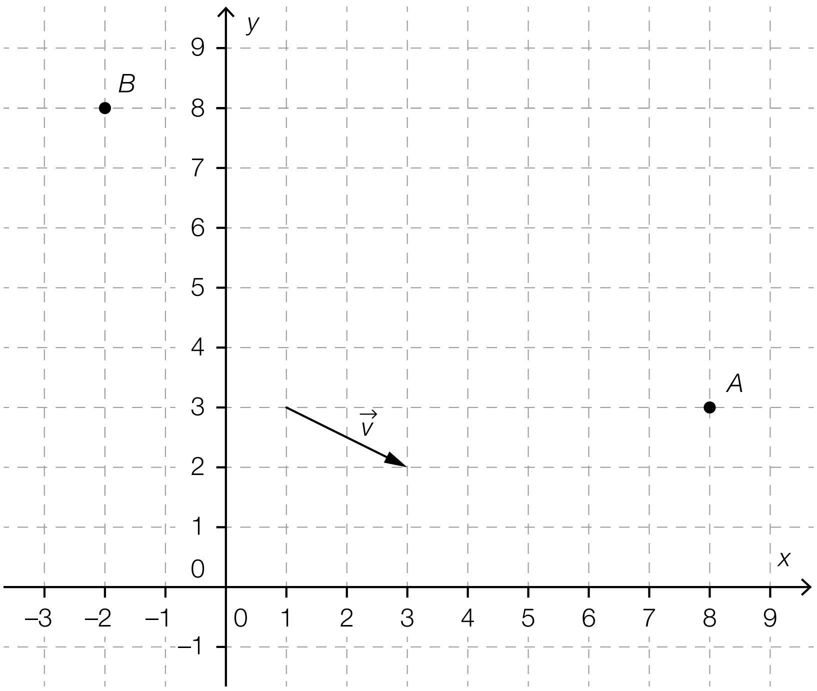
b = ____________________

[0/1 Punkt]

Aufgabe 3

Darstellung im Koordinatensystem

Im nachstehenden Koordinatensystem sind der Vektor $\vec{v}$ sowie die Punkte A und B dargestellt.
Die Komponenten des dargestellten Vektors $\vec{v}$ und die Koordinaten der beiden Punkte A und B sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Wert des Parameters t so, dass die Gleichung $B = A + t \cdot \vec{v}$ erfüllt ist.

t = ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 4

Gleichung einer Geraden aufstellen

Die Punkte $A = (7|6)$, $M = (-1|7)$ und $N = (8|1)$ sind gegeben.
Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A und steht normal auf die Verbindungsgerade durch die Punkte M und N.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 5

Drehkegel

Gegeben ist ein Drehkegel mit einer Höhe von 6 cm. Der Winkel zwischen der Kegelachse und der Erzeugenden (Mantellinie) beträgt 32°.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Radius *r* der Grundfläche des Drehkegels.

$r \approx$ ______________ cm

[0/1 Punkt]

Aufgabe 6

Winkel mit gleichem Sinuswert

Gegeben sei eine reelle Zahl c mit $0 < c < 1$. Für die zwei unterschiedlichen Winkel α und β soll gelten: $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = c$.
Dabei soll α ein spitzer Winkel und β ein Winkel aus dem Intervall (0°; 360°) sein.

Aufgabenstellung:

Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und β?
Kreuzen Sie die zutreffende Beziehung an.

$\alpha + \beta = 90°$	☐
$\alpha + \beta = 180°$	☐
$\alpha + \beta = 270°$	☐
$\alpha + \beta = 360°$	☐
$\beta - \alpha = 270°$	☐
$\beta - \alpha = 180°$	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 7

Quadratische Funktion

Gegeben ist eine quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn _____①_____ gilt, so hat die Funktion *f* auf jeden Fall _____②_____.

①	
$a < 0$	☐
$b = 0$	☐
$c > 0$	☐

②	
einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen	☐
zwei reelle Nullstellen	☐
ein lokales Minimum	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 8

Schwingung einer Saite

Die Frequenz f der Grundschwingung einer Saite eines Musikinstruments kann mithilfe der nachstehenden Formel berechnet werden.

$$f = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\varrho \cdot A}}$$

l … Länge der Saite
A … Querschnittsfläche der Saite
ϱ … Dichte des Materials der Saite
F … Kraft, mit der die Saite gespannt ist

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie die Länge l einer Saite zu ändern ist, wenn die Saite mit einer doppelt so hohen Frequenz schwingen soll und die anderen Größen (F, ϱ, A) dabei konstant gehalten werden.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 9

Kerzenhöhe

Eine brennende Kerze, die vor t Stunden angezündet wurde, hat die Höhe $h(t)$. Für die Höhe der Kerze gilt dabei näherungsweise $h(t) = a \cdot t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

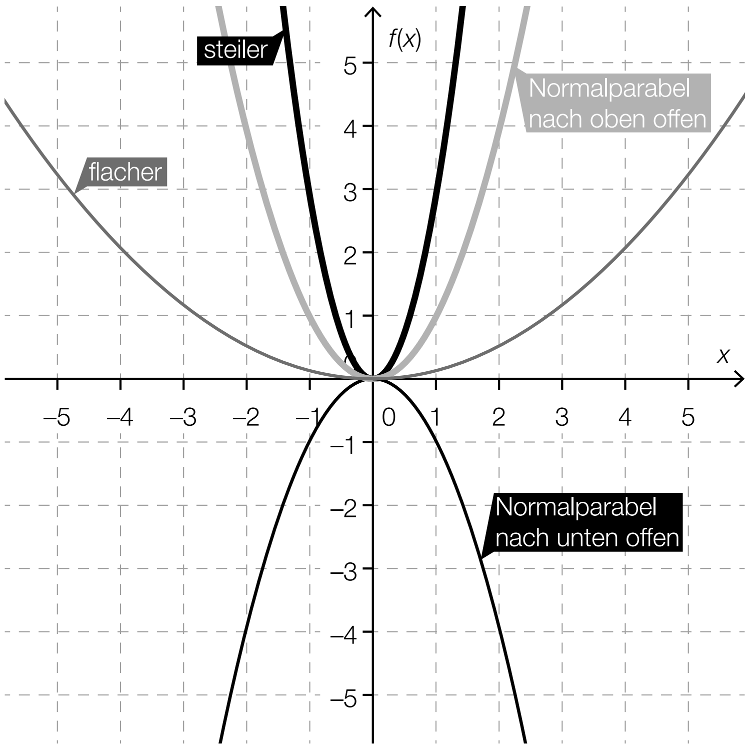
Geben Sie für jeden der Koeffizienten a und b an, ob er positiv, negativ oder genau null sein muss.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 10

Parabeln

Die Graphen von Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind Parabeln. Für $a = 1$ erhält man den oft als *Normalparabel* bezeichneten Graphen. Je nach Wert des Parameters a erhält man Parabeln, die im Vergleich zur Normalparabel „steiler" oder „flacher" bzw. „nach unten offen" oder „nach oben offen" sind.



Aufgabenstellung:

Nachstehend sind vier Parabeln beschrieben. Ordnen Sie den vier Beschreibungen jeweils diejenige Bedingung (aus A bis F) zu, die der Parameter a erfüllen muss.

Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „flacher" und „nach oben offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel weder „flacher" noch „steiler", aber „nach unten offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler" und „nach unten offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler" und „nach oben offen".	

A	$a < -1$
B	$a = -1$
C	$-1 < a < 0$
D	$0 < a < 1$
E	$a = 1$
F	$a > 1$

[0/½/1 Punkt]

Aufgabe 11

Funktion mit einer besonderen Eigenschaft

Für eine nicht konstante Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ______________________________

[0/1 Punkt]

Aufgabe 12

Periodenlänge

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot x\right)$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Länge der (kleinsten) Periode p der Funktion f.

$p =$ ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 13

Differenzenquotient

Der Graph einer Funktion f verläuft durch die Punkte $P = (-1|2)$ und $Q = (3|f(3))$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie $f(3)$ so, dass der Differenzenquotient von f im Intervall $[-1; 3]$ den Wert 1 hat.

$f(3) =$ ______________________________

[0/1 Punkt]

Aufgabe 14

Ableitungsfunktion und Stammfunktion

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion.

Aufgabenstellung:

Zwei der folgenden Aussagen über die Funktion f treffen auf jeden Fall zu.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion f hat genau eine Stammfunktion F.	☐
Die Funktion f hat genau eine Ableitungsfunktion f'.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $f' = F$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $F'' = f'$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0)$.	☐

[0/1 Punkt]

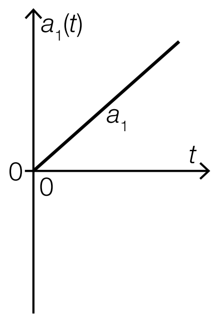
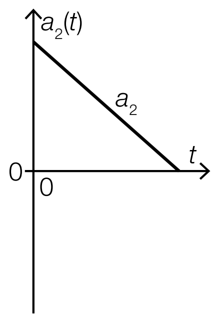
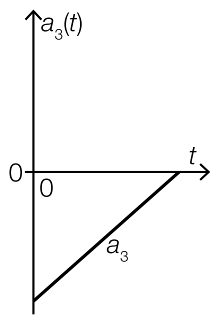
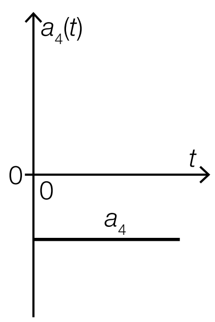
Aufgabe 15

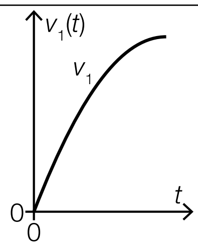
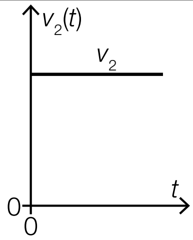
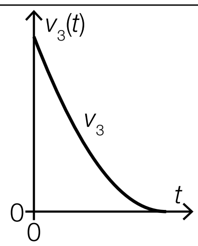
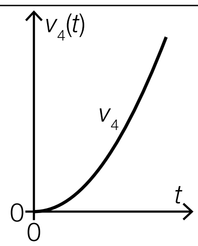
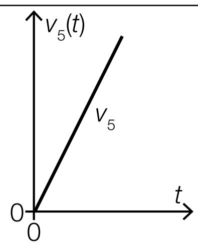
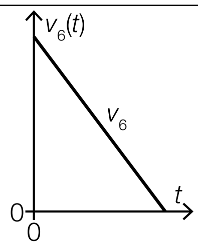
Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen von vier Beschleunigungsfunktionen (a_1, a_2, a_3, a_4) und von sechs Geschwindigkeitsfunktionen (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Graphen von a_1 bis a_4 jeweils den zugehörigen Graphen von v_1 bis v_6 (aus A bis F) zu.

A	
B	
C	
D	
E	
F	

[0/½/1 Punkt]

Aufgabe 16

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. An den beiden Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ gelten folgende Bedingungen:

$f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) < 0$
$f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die Funktion f auf jeden Fall zutreffen.

$f(x_1) > f(x_2)$	☐
Es gibt eine weitere Stelle x_3 mit $f'(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f(x_3) > f(x_1)$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f''(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f'(x_3) > 0$.	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 17

Bestimmen eines Koeffizienten

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + 2$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Koeffizienten a so an, dass die Gleichung $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ erfüllt ist.

$a =$ ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 18

Wurfhöhe eines Körpers

Ein Körper wird aus einer Höhe von 1 m über dem Erdboden senkrecht nach oben geworfen.
Die Geschwindigkeit des Körpers nach t Sekunden wird modellhaft durch die Funktion v mit
$v(t) = 15 - 10 \cdot t$ beschrieben ($v(t)$ in Metern pro Sekunde, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

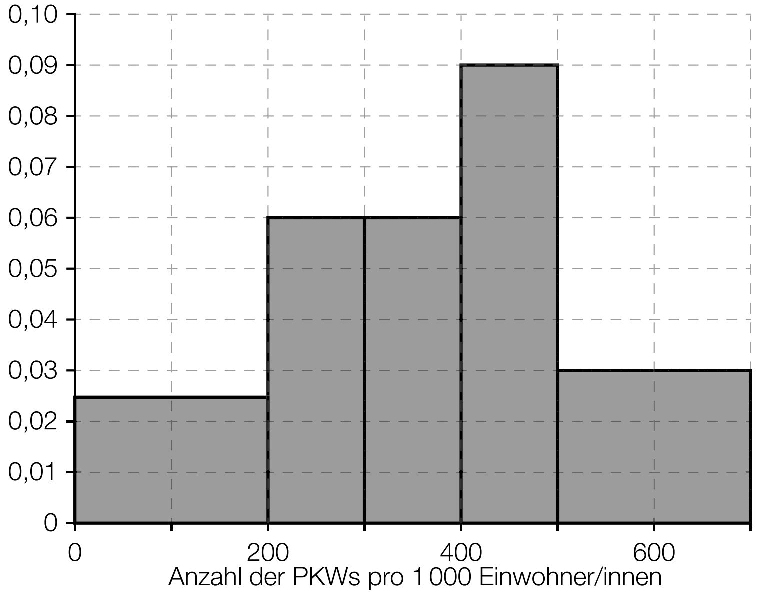
Geben Sie diejenige Höhe (in Metern) über dem Erdboden an, in der sich der Körper nach 2 s befindet.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 19

PKW-Dichte

In 32 europäischen Ländern wurde die Anzahl der Personenkraftwagen (PKWs) pro 1 000 Einwohner/innen erhoben. Aus diesen Daten ist das nachstehende Histogramm erstellt worden. Dabei sind die absoluten Häufigkeiten der Länder als Flächeninhalte von Rechtecken dargestellt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, in wie vielen Ländern die Anzahl der PKWs pro 1 000 Einwohner/innen zwischen 500 und 700 PKWs liegt.

Anzahl der Länder = ________________

[0/1 Punkt]

Aufgabe 20

Datenliste

Gegeben ist die nachstehende geordnete Datenliste. Einer der Werte ist k mit $k \in \mathbb{R}$.

1	2	3	5	k	8	8	8	9	10

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert k so an, dass das arithmetische Mittel der gesamten Datenliste den Wert 6 annimmt.

k = ______________

[0/1 Punkt]

Aufgabe 21

Ziehungswahrscheinlichkeit

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen (dabei wird angenommen, dass jede Ziehung von zwei Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit hat). Zwei der fünf Kugeln im Behälter sind blau, die anderen Kugeln sind rot. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, beim zweiten Zug eine blaue Kugel zu ziehen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p an.

p = ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 22

Spielkarten

Fünf Spielkarten (drei Könige und zwei Damen) werden gemischt und verdeckt auf einen Tisch gelegt. Laura dreht während eines Spieldurchgangs nacheinander die Karten einzeln um und lässt sie aufgedeckt liegen, bis die erste Dame aufgedeckt ist.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der am Ende eines Spieldurchgangs aufgedeckten Spielkarten an.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

$E(X)$ = ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 23

Pasch

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei Würfel geworfen. Zeigen nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl, spricht man von einem *Pasch*. Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, beträgt $\frac{1}{6}$.

Bildquelle: BMBWF

Aufgabenstellung:

Es werden acht Runden (unabhängig voneinander) gespielt. Die Zufallsvariable X bezeichnet dabei die Anzahl der geworfenen Pasche.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Anzahl X der geworfenen Pasche unter dem Erwartungswert $E(X)$ liegt.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 24

Sonntagsfrage

Sonntagsfrage nennt man in der Meinungsforschung die Frage „Welche Partei würden Sie wählen, wenn am kommenden Sonntag Wahlen wären?“. Bei einer solchen Sonntagsfrage, bei der die Parteien *A* und *B* zur Auswahl standen, gaben 234 von 1 000 befragten Personen an, Partei *A* zu wählen. Bei der darauffolgenden Wahl lag der tatsächliche Anteil der Personen, die die Partei *A* gewählt haben, bei 29,5 %.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie auf Basis dieses Umfrageergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den (unbekannten) Stimmenanteil der Partei *A* und geben Sie an, ob der tatsächliche Anteil in diesem Intervall enthalten ist.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 25 (Teil 2)

Bremsvorgang

Der Bremsweg s_B ist die Länge derjenigen Strecke, die ein Fahrzeug ab dem Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand zurücklegt. Entscheidend für den Bremsweg sind die Fahrgeschwindigkeit v_0 des Fahrzeugs zu Beginn des Bremsvorgangs und die Bremsverzögerung b. Der Bremsweg s_B kann mit der Formel $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ berechnet werden (v_0 in m/s, b in m/s², s_B in m).

Der Anhalteweg s_A berücksichtigt zusätzlich zum Bremsweg den während der Reaktionszeit t_R zurückgelegten Weg. Dieser sogenannte *Reaktionsweg* s_R kann mit der Formel $s_R = v_0 \cdot t_R$ berechnet werden (v_0 in m/s, t_R in s, s_R in m).

Der Anhalteweg s_A ist gleich der Summe aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B.

Aufgabenstellung:

a) 1) $\boxed{\text{A}}$ Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Fahrgeschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit vom Bremsweg s_B und von der Bremsverzögerung b auf.

$v_0 =$ ______________________________

2) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Reaktionszeit t_R.	☐

b) Die oft in Fahrschulen verwendeten Formeln für die näherungsweise Berechnung des Reaktions- und des Bremswegs (jeweils in m) lauten:
$s_R = \frac{v_0}{10} \cdot 3$ und $s_B = \left(\frac{v_0}{10}\right)^2$ mit v_0 in km/h und s_R bzw. s_B in m

1) Zeigen Sie anhand geeigneter Umformungen, dass die für die näherungsweise Berechnung des Reaktionswegs verwendete Formel für eine Reaktionszeit von etwa einer Sekunde annähernd die gleichen Ergebnisse wie die Formel für s_R aus der Einleitung liefert.

2) Berechnen Sie, welcher Wert für die Bremsverzögerung bei der Näherungsformel für den Bremsweg angenommen wird.

c) Es kann eine Bremsverzögerung b von 8 m/s² bei trockener Fahrbahn, von 6 m/s² bei nasser Fahrbahn und von höchstens 4 m/s² bei Schneefahrbahn angenommen werden.

1) Geben Sie denjenigen Bruchteil an, um den bei gleicher Fahrgeschwindigkeit der Bremsweg bei nasser Fahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn ist.

Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/s. Der Anhalteweg ist bei Schneefahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn.

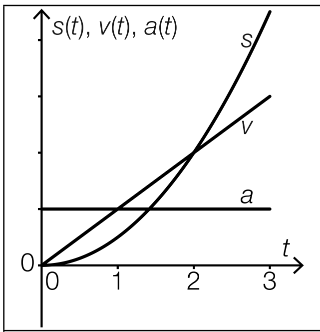
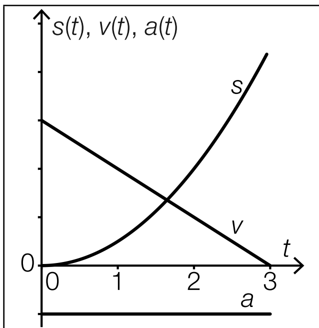
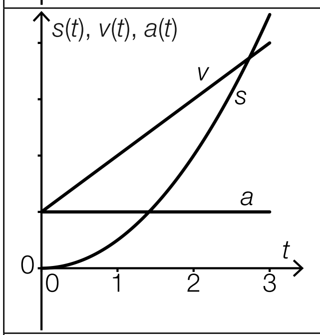
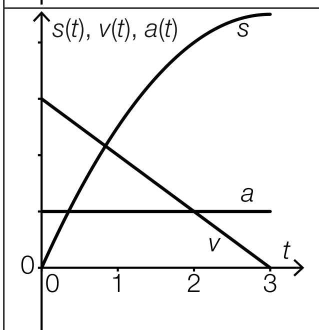
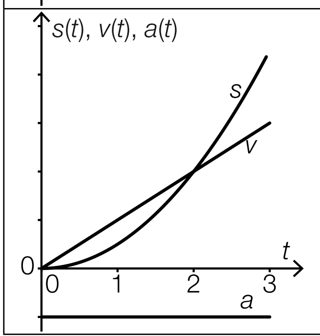
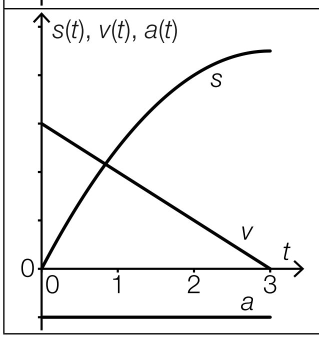
2) Ermitteln Sie unter der Annahme $t_R = 1$ s für diese beiden Fahrbahnzustände den Mindestwert für die absolute Zunahme des Anhaltewegs.

d) Das Wirksamwerden der Bremsen eines Fahrzeugs beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs kann für das Zeitintervall [0; 3] durch die Funktion v modelliert werden, die Beschleunigung $a(t)$ durch die Funktion a und der in diesem Zeitintervall zurückgelegte Weg $s(t)$ durch die Funktion s ($v(t)$ in m/s, $a(t)$ in m/s², $s(t)$ in m, t in s).

1) Interpretieren Sie die Bedeutung des bestimmten Integrals $\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext.

Jede der sechs nachstehenden Abbildungen zeigt – jeweils im Zeitintervall [0; 3] – den Graphen einer Beschleunigungsfunktion a, den Graphen einer Geschwindigkeitsfunktion v und den Graphen einer Wegfunktion s.

2) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die drei zusammengehörige Graphen eines drei Sekunden dauernden Bremsvorgangs zeigt.

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

Aufgabe 26 (Teil 2)

Kostenfunktion

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Aufgabenstellung:

a) 1) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie für dieses Produkt den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall [100 ME; 200 ME].

2) Ermitteln Sie, ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen.

b) Die Produktionsmenge x_{opt}, für die die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal ist, heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K.

1) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum x_{opt}.

Der Hersteller berechnet die Produktionskosten für die Produktionsmenge x_{opt}. Dabei stellt er fest, dass diese Kosten 65 % seines für die Produktion dieses Produkts verfügbaren Kapitals ausmachen.

2) Berechnen Sie das dem Hersteller für die Produktion dieses Produkts zur Verfügung stehende Kapital.

c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

1) Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d.

2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

Die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* werden für $n \in \mathbb{N}$ und $n > 2$ durch die Differenzengleichung $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ mit den Startwerten $f(1) = 1$ und $f(2) = 1$ definiert.

Das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ nähert sich für große Werte von n dem *Goldenen Schnitt* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ an.

Aufgabenstellung:

a) 1) $\boxed{A}$ Geben Sie dasjenige n an, für das das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ erstmals auf zwei Nachkommastellen mit dem Goldenen Schnitt ϕ übereinstimmt.

Für Fibonacci-Zahlen gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $k > 2$ folgende Gleichung:
$f(n+k) = f(n-1) \cdot f(k) + f(n) \cdot f(k+1)$

2) Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung für $n = 3$ und $k = 5$.

b) Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Bestimmung von Fibonacci-Zahlen durch einen einfachen expliziten Ausdruck ist die Approximation $f(n) \approx g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Die Zahl 832 040 ist eine Fibonacci-Zahl, das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 832\,040$ bzw. $g(n) \approx 832\,040$.

1) Bestimmen Sie dieses n.

Eine exakte explizite Möglichkeit zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen $f(n)$ ist die Formel von Moivre/Binet:
$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1^{\,n} - x_2^{\,n})$
Dabei sind $x_1 = \phi$ und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + a \cdot x - 1 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2) Berechnen Sie a und x_2.

Aufgabe 28 (Teil 2)

Kino

Ein Kino hat drei Säle. Im ersten Saal sind 185 Sitzplätze, im zweiten Saal 94 und im dritten Saal 76.

Neue Filme starten üblicherweise an einem Donnerstag. Der Kinobetreiber nimmt modellhaft an, dass an so einem Donnerstag bei einer Vorstellung eines neuen Films in allen drei Sälen jeder einzelne Sitzplatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % belegt ist.

Aufgabenstellung:

a) Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 355$ und $p = 0{,}95$.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P(X < 350)$ im gegebenen Kontext.

Zum Schulschluss mietet eine Schule alle drei Säle für denselben Film zur selben Beginnzeit. Alle Sitzplätze werden vergeben, jede Besucherin / jeder Besucher bekommt ein Ticket für einen bestimmten Sitzplatz in einem der drei Säle. Alle Tickets haben zusätzlich zur Platznummer noch eine fortlaufende, jeweils unterschiedliche Losnummer. Unmittelbar vor der Vorstellung werden zwei Losnummern ausgelost. Die beiden Personen, die die entsprechenden Tickets besitzen, erhalten jeweils eine große Portion Popcorn.

2) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass diese beiden Personen Tickets für denselben Saal haben.

b) Der Betreiber des Kinos möchte wissen, wie zufrieden seine Kundschaft mit dem gebotenen Service (Buffet, Sauberkeit etc.) ist. Bei einer Umfrage geben von 628 Besucherinnen und Besuchern 515 Besucher/innen an, dass sie mit dem gebotenen Service im Kino insgesamt zufrieden sind.

1) $\boxed{\text{A}}$ Bestimmen Sie auf Basis dieser Befragung ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil aller Besucher/innen dieses Kinos, die mit dem gebotenen Service insgesamt zufrieden sind.

Bei einer zweiten Befragung werden viermal so viele Personen befragt, wobei der relative Anteil der mit dem gebotenen Service insgesamt zufriedenen Besucher/innen wieder genauso groß wie bei der ersten Befragung ist.

2) Geben Sie an, wie sich diese Vergrößerung der Stichprobe konkret auf die Breite des aus der ersten Befragung ermittelten symmetrischen 95-%-Konfidenzintervalls auswirkt.