Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Thermistor*

Aufgabennummer: B_050

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

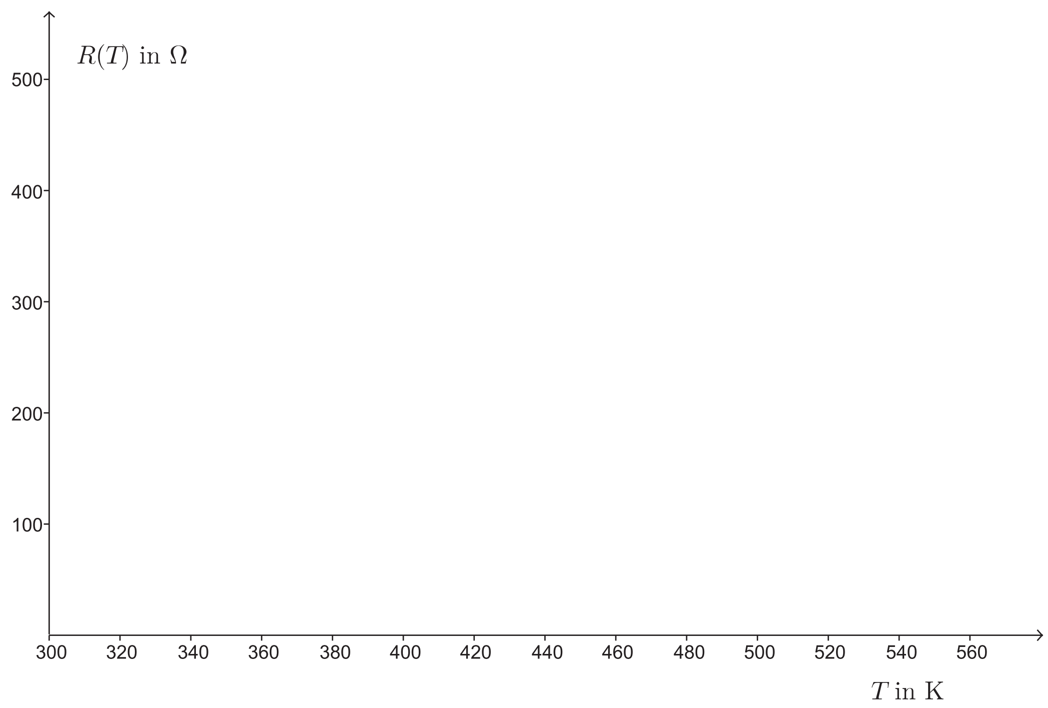
Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand mit zunehmender Temperatur T abnimmt. Die Funktion R beschreibt diesen Zusammenhang:

$$R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

T ... Temperatur in Kelvin (K)
$R(T)$ ... elektrischer Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)
a ... Konstante in Ω ($a > 0$)
b ... Konstante in K ($b > 0$)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion R monoton fallend ist.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion R im Bereich $300\text{ K} \leq T \leq 550\text{ K}$ für $a = 0{,}1\ \Omega$ und $b = 2\,500\text{ K}$ im nachstehenden Koordinatensystem.



b) Verwenden Sie $a = 0{,}1\ \Omega$ und $b = 2\,500\text{ K}$.

– Linearisieren Sie die Funktion R an der Stelle $T_0 = 373{,}15\text{ K}$, d. h., bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von R im Punkt $(T_0 | R(T_0))$.
– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man an der Stelle $T = 390\text{ K}$ den Widerstand mit der linearisierten Funktion anstatt mit der Funktion R berechnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

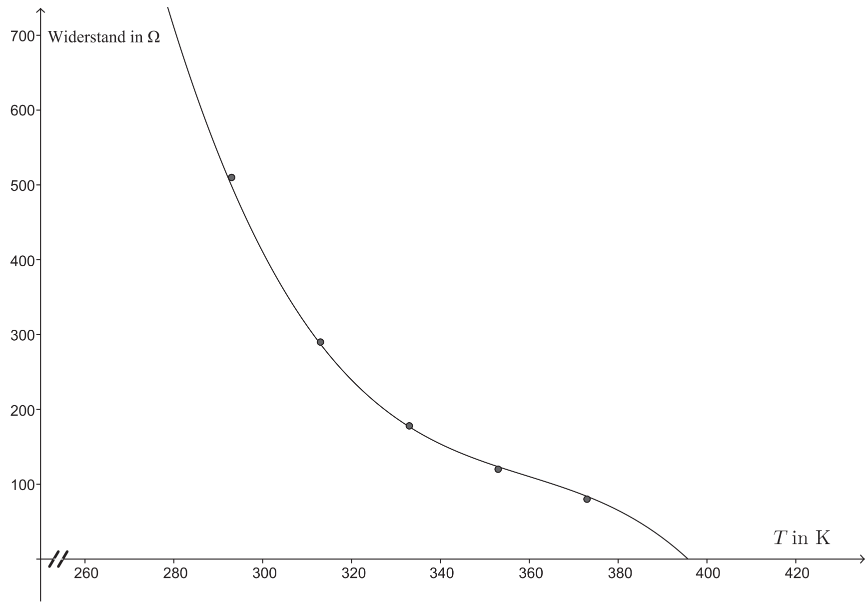
c) Für einen bestimmten Heißleiter wurden folgende Werte gemessen:

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

– Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zu ermittelnden Ausgleichsfunktion P bereits eingezeichnet.

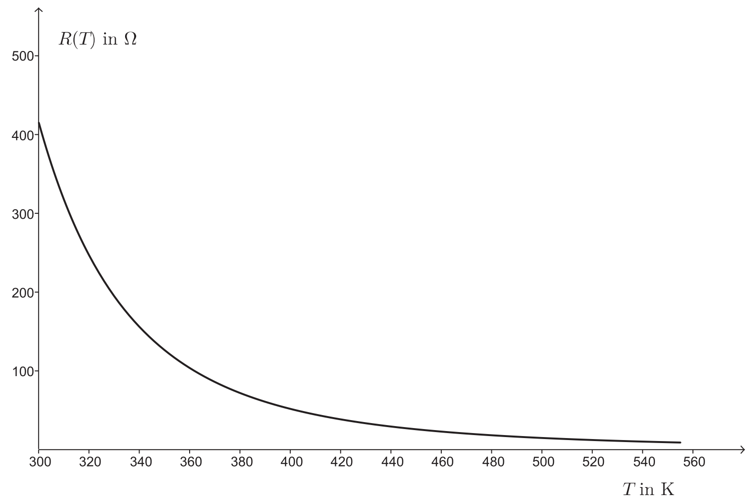


– Erklären Sie ausgehend von der obigen Abbildung, warum die 1. Ableitung dieser Polynomfunktion 3. Grades keine reellen Nullstellen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Begründung für die Monotonie:
Für größer werdendes T (und $b > 0$) wird die Hochzahl $\frac{b}{T}$ immer kleiner und damit (wegen $a > 0$) auch $a \cdot e^{\frac{b}{T}}$.



b) $g(T) = k \cdot T + d$

$R'(T) = -a \cdot b \cdot \frac{1}{T^2} \cdot e^{\frac{b}{T}}$

Steigung: $k = R'(373{,}15)$ ergibt $k = -1{,}458... \approx -1{,}46$.

Achsenabschnitt: $d = R(373{,}15) - k \cdot 373{,}15$ ergibt $d = 625{,}353... \approx 625{,}35$.

Betrag des relativen Fehlers an der Stelle $T = 390$ K: $\left| \frac{R(390) - g(390)}{R(390)} \right| \approx 6{,}8\ \%$

c) Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$P(T) = -9{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + T^2 - 365 \cdot T + 4{,}4 \cdot 10^4$

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Da in der Abbildung der Wendepunkt erkennbar ist, ist diese Polynomfunktion 3. Grades streng monoton fallend und es liegen somit keine Stellen mit horizontaler Tangentensteigung vor. Daher hat die 1. Ableitung von P keine reellen Nullstellen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung zur Monotonie (Verweis auf die Grafik ist nicht ausreichend)
   1 × B: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im angegebenen Intervall

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Linearisierung der Funktion R
   1 × B1: für die richtige Berechnung der Tangente
   1 × B2: für die richtige Ermittlung des Betrags des relativen Fehlers

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
   1 × D: für die richtige Erklärung ausgehend von der Abbildung