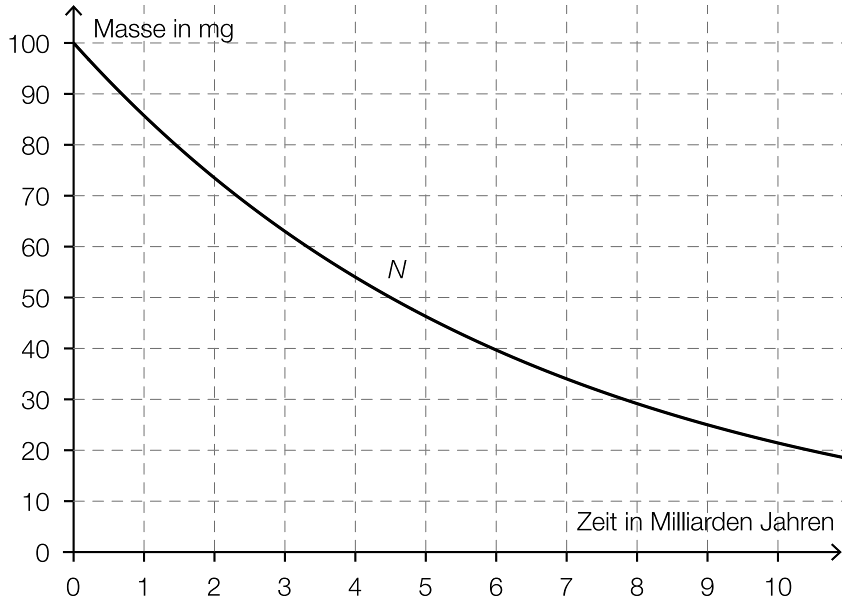
a) Der radioaktive Zerfall von bestimmten Uran-Atomen lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschreiben (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion N beschreibt die Masse einer Probe in mg in Abhängigkeit von der Zeit t in Milliarden Jahren.

– Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Halbwertszeit ab. (R)
– Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Funktion N auf. (A)
– Bestimmen Sie, wie viel Prozent der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Masse nach 200 Millionen Jahren noch vorhanden sind. (B)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

Jemand behautet: „Verringert man die anfängliche Masse N_0 um 30 mg, so verschiebt sich dadurch auch der Graph der zugehörigen Exponentialfunktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ in vertikaler Richtung. Somit wären nach 8 Milliarden Jahren alle Uran-Atome zerfallen.“

– Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist. (R)

a) In einem Labor wird das Wachstum einer bestimmten Zellkultur untersucht. Dabei ergeben sich folgende Messwerte für die Masse in Abhängigkeit von der Zeit:

t ... Zeit in Wochen	$A(t)$ ... Masse der Zellkultur zur Zeit t in Mikrogramm (µg)
0	100,0
2	170,0
4	289,0
6	491,3

– Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten ein exponentielles Modell nahelegen. (R)

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Exponentialfunktion A auf. Verwenden Sie dazu die Messwerte zur Zeit $t = 0$ und $t = 2$ aus der Tabelle. (A)

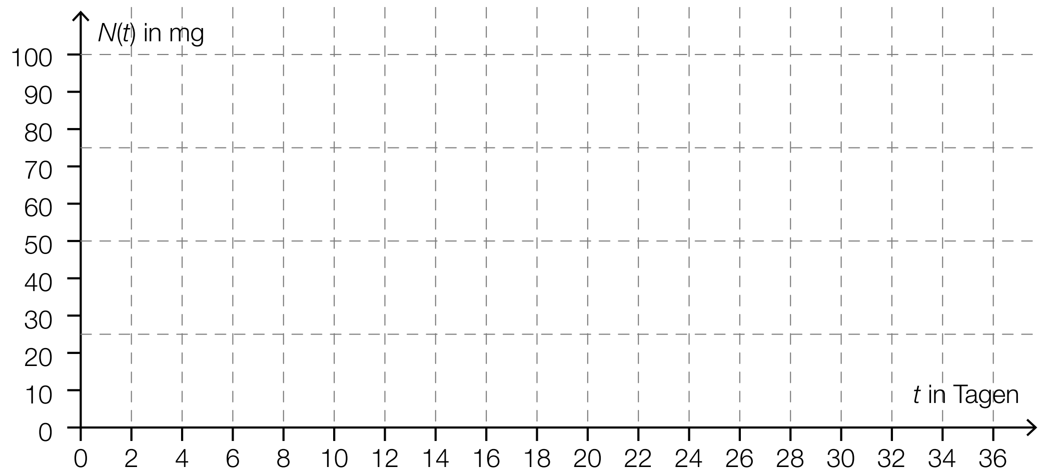
– Berechnen Sie, nach wie vielen Wochen sich die Masse der Zellkultur gemäß diesem Modell versechsfacht. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

– Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters b einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ (mit $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$) auf das Monotonieverhalten von f. (R)

a) Die Halbwertszeit eines radioaktiven Jod-Isotops beträgt 8 Tage. Die Masse der noch nicht zerfallenen Atome dieses Isotops in Abhängigkeit von der Zeit t kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden und beträgt zu Beginn der Beobachtung 100 mg.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion N im Intervall [0; 32]. (A)



– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion N auf. (A)

– Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Masse der noch nicht zerfallenen Atome dieses Isotops nur noch 1 mg beträgt. (B)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

Maria behauptet: „Eine Halbwertszeit von 8 Tagen bedeutet, dass an jedem Tag $\frac{1}{16}$ der zu Beginn ursprünglich vorhandenen Masse zerfällt.“

– Erklären Sie, warum diese Behauptung falsch ist. (R)

a) Über den Schadstoffgehalt in einem Gewässer liegen folgende Daten vor:

Zeit ab Untersuchungsbeginn in Wochen	Schadstoffgehalt in mg/m³
0	10
1	6

Die Abnahme des Schadstoffgehalts kann näherungsweise mit folgender Funktion C beschrieben werden:

$C(t) = 10 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{7}}$

t ... Zeit ab Untersuchungsbeginn in Tagen
$C(t)$ ... Schadstoffgehalt zur Zeit t in Milligramm pro Kubikmeter (mg/m³)

– Zeigen Sie, dass die vorliegenden Daten der gegebenen Funktion C genügen. (R)
– Berechnen Sie die zugehörige Halbwertszeit. (B)
– Erstellen Sie einen Ausdruck, der im Zeitintervall $[0; a]$ die relative Änderung des Schadstoffgehalts beschreibt. (A)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Jemand führt eine Berechnung mit den obigen Daten, aber einem anderen mathematischen Modell durch. Er behauptet, dass aufgrund der vorhandenen Daten Folgendes berechnet werden kann: „Nach genau 2,5 Wochen ist der Schadstoffgehalt vollständig abgebaut.“

– Zeigen Sie, dass es ein lineares Modell gibt, das zu dieser Behauptung passt. (R)

c) Die Schärfe von Chilischoten gibt man entweder in Scoville-Graden oder in Schärfegraden an. Die Umrechnungsformel lautet:

$S = 10^{\frac{G+5}{3}}$

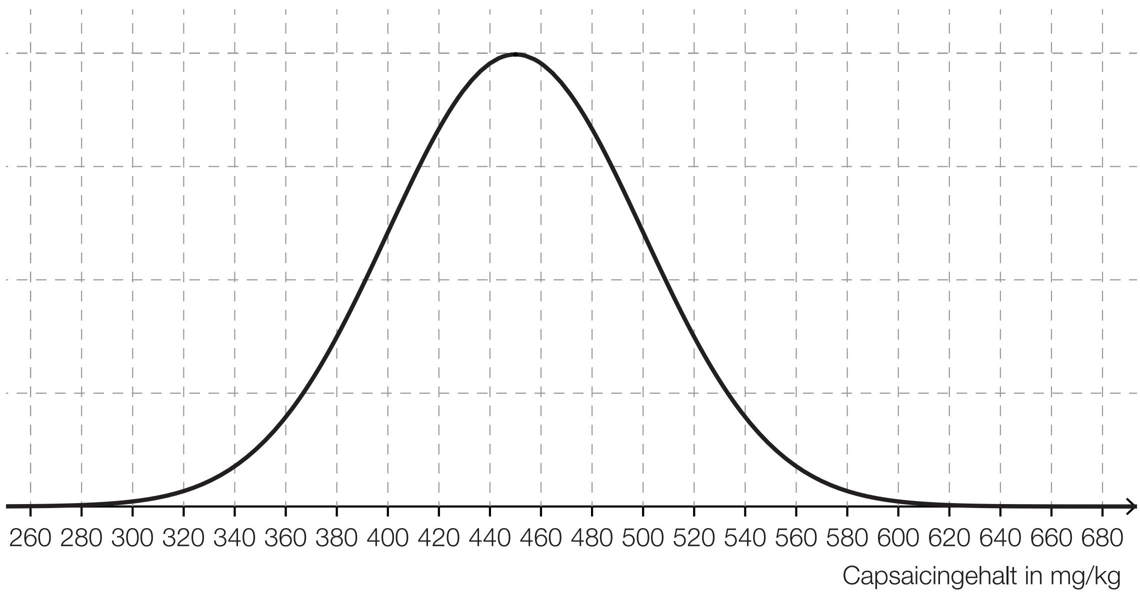
G ... Schärfe in Schärfegraden
S ... Schärfe in Scoville-Graden

– Berechnen Sie diejenige Schärfe in Schärfegraden, die einem Wert von 10^5 Scoville-Graden entspricht. (B)

Für die Schärfe von Chilischoten ist der Wirkstoff Capsaicin verantwortlich. Der Capsaicingehalt einer bestimmten Sorte ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 450 mg/kg und der Standardabweichung σ = 50 mg/kg.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällig ausgewählte Chilischote dieser Sorte einen Capsaicingehalt von mindestens 400 mg/kg aufweist. (B)

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Chilischote einen Capsaicingehalt von höchstens 520 mg/kg aufweist. (A)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

– Begründen Sie, warum eine Schärfe von 0 Scoville-Graden nicht mithilfe der obigen Formel in Schärfegrade umgerechnet werden kann. (R)

a) Zur Überprüfung des Stromverbrauchs wurde ein bereits vorgeheizter Minibackofen an einen Stromzähler angeschlossen. Der Stromzähler zeigte zu Beginn des 1. Backvorgangs 23,1 Kilowattstunden (kWh) an.

Nach 2 Stunden unmittelbar aufeinanderfolgender Backvorgänge zeigt der Stromzähler 24,9 kWh an.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion auf, mit der der Anzeigewert des Stromzählers in kWh in Abhängigkeit von der seit Beginn des 1. Backvorgangs vergangenen Zeit in h beschrieben werden kann. (A)

Der Stromzähler zeigte zu Beginn des 1. Backvorgangs 23,1 kWh an. Nach einer bestimmten Anzahl von unmittelbar aufeinanderfolgenden Backvorgängen zeigt er 25,86 kWh an. Ein Backvorgang dauert 8 min.

– Berechnen Sie, wie viele Backvorgänge insgesamt durchgeführt wurden. (B)

Die Temperatur des Minibackofens nach dem Abschalten kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden:

$T(t) = 20 + 200 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit nach dem Abschalten des Minibackofens in h
$T(t)$ ... Temperatur des Minibackofens zur Zeit t in °C
k ... positiver Parameter

– Geben Sie die Temperatur des Minibackofens zum Zeitpunkt des Abschaltens an. (R)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

– Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a einer Exponentialfunktion g mit $g(x) = a^x$ (mit $a > 0$, $a \neq 1$) auf das Monotonieverhalten von g. (R)

b) Eine Wasserpflanze wächst in einem Aquarium und bedeckt eine immer größer werdende Fläche des Aquarienbodens. Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$ Tage) bedeckt sie 1 cm^2, nach 14 Tagen bereits 10 cm^2. Im Folgenden werden verschiedene mathematische Modelle für dieses Wachstum betrachtet.

Bei Modell 1 geht man von einem linearen Wachstum aus.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion f auf, die den von der Wasserpflanze bedeckten Flächeninhalt in cm^2 zur Zeit t in Tagen beschreibt. (A)

Bei Modell 2 wird der von der Wasserpflanze bedeckte Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe der Funktion g beschrieben:

$g(t) = 1 \cdot e^{0{,}16447 \cdot t}$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Tagen
$g(t)$ ... bedeckter Flächeninhalt zur Zeit t in cm^2

– Berechnen Sie, nach welcher Zeit sich der Inhalt der bedeckten Fläche gemäß Modell 2 jeweils verdoppelt. (B)

21 Tage nach Beginn der Beobachtung stellt man fest, dass die Wasserpflanze 30 cm^2 des Aquarienbodens bedeckt.

– Zeigen Sie, dass man bei Verwendung von Modell 2 die Bedeckung für $t = 21$ Tage besser beschreiben kann als bei Verwendung von Modell 1. (R)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Die Gleichung der Funktion g kann näherungsweise auch in der folgenden Form angegeben werden:
$g(t) = 1 \cdot 1{,}179^t$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,179 im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

a) Die Intensität eines Lichtstrahls in einer speziellen Flüssigkeit nimmt mit zunehmender Eindringtiefe x ab:

$I(x) = I_0 \cdot e^{-2,4 \cdot x}$

x ... Eindringtiefe in m
$I(x)$ ... Intensität des Lichtstrahls in einer Eindringtiefe x
I_0 ... Intensität des Lichtstrahls an der Flüssigkeitsoberfläche

– Geben Sie b an, wenn der obige Zusammenhang in der Form $I(x) = I_0 \cdot b^x$ angeschrieben wird. (A)
– Berechnen Sie, wie viel Prozent von I_0 in einer Eindringtiefe von 1,5 m noch vorhanden sind. (B)
– Bestimmen Sie, in welcher Eindringtiefe die Intensität des Lichtstrahls nur noch 1 % von I_0 beträgt. (B)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

– Erklären Sie mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen, warum gilt: $-\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(4)$ (R)

a) Wie viel Vitamin C ein bestimmter Apfel nach der Ernte enthält, kann durch die Funktion f näherungsweise beschrieben werden:

$f(t) = 18 \cdot b^t$ mit $t \geq 0$ und $0 < b < 1$

t ... Zeit nach der Ernte in Wochen
$f(t)$ ... Vitamin-C-Menge im Apfel zur Zeit t in mg

– Interpretieren Sie die Zahl 18 in der Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

Die Zeit, in der sich die Vitamin-C-Menge im Apfel jeweils halbiert, beträgt 12 Wochen.

– Bestimmen Sie den Parameter b. (B)

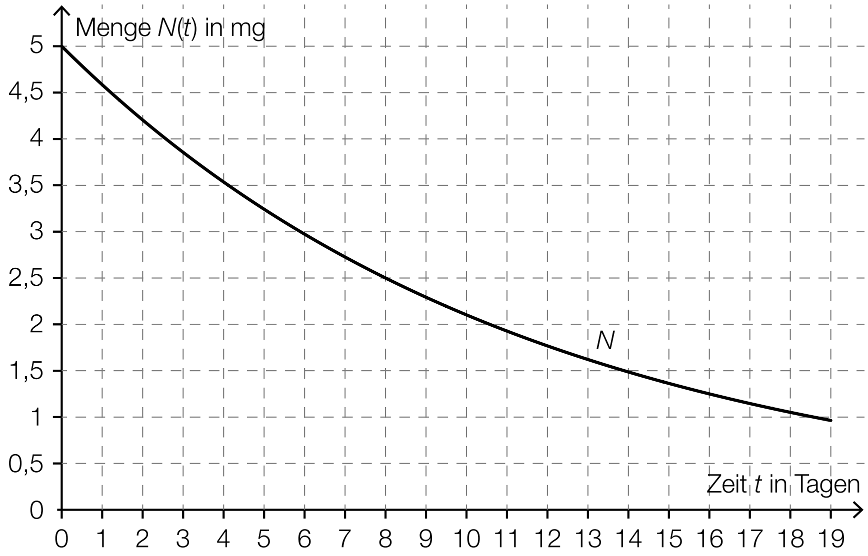
Die Gleichung der Funktion f soll in der Form $f(t) = 18 \cdot e^{k \cdot t}$ dargestellt werden.

– Berechnen Sie den Parameter k. (A)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

– Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:
$f(5) - f(4) = -0{,}80...$ (R)

3) In der nachstehenden Abbildung ist der exponentielle Zerfall eines radioaktiven Jod-Isotops als Funktion N dargestellt.



– Stellen Sie unter Verwendung der Werte für $t = 0$ und $t = 8$ aus der obigen Abbildung eine Gleichung der Funktion N auf. (A)

Ein anderes radioaktives Isotop hat eine Halbwertszeit, die nur ein Viertel der Halbwertszeit des Jod-Isotops aus der obigen Abbildung beträgt. Zur Zeit $t = 0$ sind ebenfalls 5 mg dieses Isotops vorhanden.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen des exponentiellen Zerfalls für dieses Isotop im Intervall [0; 10] ein. (A)

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der <u>nicht</u> dem Ausdruck $2^{-\frac{1}{n}}$ entspricht (für $n \geq 2$). *[1 aus 5]* (R)

$\sqrt[n]{0{,}5}$	☐
$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$	☐
$\sqrt[n]{2^{-1}}$	☐
$\frac{1}{\sqrt[n]{0{,}5}}$	☐
$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$	☐

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

– Beschreiben Sie den Einfluss der Parameter a und b auf den Graphen einer Exponentialfunktion f vom Typ $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. (R)

2) Zu Beginn des Jahres 1995 betrug der Holzbestand in einem Nationalpark 200 000 m^3. Bis zu Beginn des Jahres 2015 wuchs dieser Holzbestand auf 225 000 m^3 an.

Der Holzbestand in m^3 soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren mithilfe einer linearen Funktion f beschrieben werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn des Jahres 1995. (A)

– Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
  $f(5) – f(3)$ (R)

In einem anderen Nationalpark gehen die Betreiber von einem exponentiellen Wachstum des Holzbestands aus. In den vergangenen 10 Jahren stieg der Holzbestand um insgesamt 5 %.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Holzbestand in einer Zeitspanne von 40 Jahren gemäß diesem Modell wächst. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Abgestorbene Stämme und Äste werden als Totholz bezeichnet. In einem bestimmten Abschnitt des Nationalparks befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge an Totholz N_0. Man nimmt an, dass sich diese Menge innerhalb von 10 Jahren verdoppeln wird. Um diese Entwicklung mathematisch zu beschreiben, kann entweder ein lineares oder ein exponentielles Modell verwendet werden.

– Beurteilen Sie anhand einer Skizze in einem geeigneten Koordinatensystem, welches der beiden Modelle im Zeitintervall]0; 10[zu jeder Zeit eine größere Menge an Totholz prognostiziert. (R)