a) Jemand kauft einen Topf mit einer 0,3 Meter hohen Palme. Die Höhe der Palme nimmt innerhalb der ersten 30 Jahre von 0,3 Metern auf 3 Meter zu.

– Berechnen Sie, um wie viel Meter pro Jahr die Palme in den ersten 30 Jahren durchschnittlich wächst. (B)

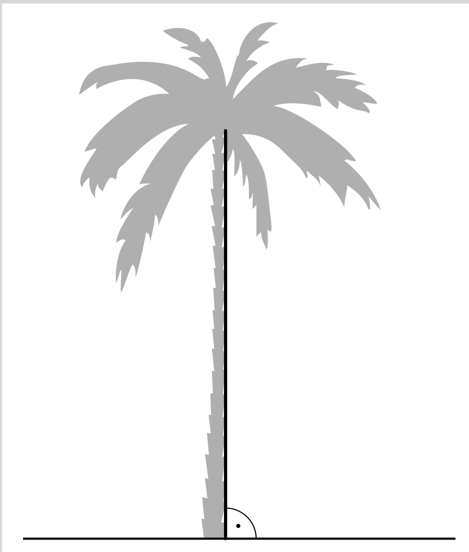
Nach 30 Jahren wird die 3 Meter hohe Palme ausgepflanzt und erreicht nach insgesamt 100 Jahren eine Höhe von 24 m.

Die Höhe dieser Palme kann im Zeitintervall [30 Jahre; 100 Jahre] näherungsweise mithilfe einer linearen Funktion h beschrieben werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion h auf. (A)
– Berechnen Sie mithilfe von h die Höhe der Palme nach 80 Jahren. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

An eine senkrecht stehende Palme wird eine Leiter mit der Länge L unter einem Höhenwinkel α angelehnt.



– Veranschaulichen Sie anhand dieser Skizze, welche Länge a durch den folgenden Ausdruck berechnet wird:
$a = L \cdot \sin(\alpha)$ (R)

a) Die folgende Tabelle zeigt die Höhe einer Pflanze über dem Boden während der ersten Tage einer Wachstumsphase:

Zeit in Tagen	0	2	4
Höhe in Zentimetern	4,0	7,6	11,2

– Berechnen Sie die prozentuelle Änderung der Höhe der Pflanze über dem Boden im Zeitintervall [0; 2]. (B)

– Stellen Sie eine lineare Funktion auf, die die Höhe der Pflanze über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. (A)

– Berechnen Sie mithilfe dieser linearen Funktion die Höhe der Pflanze über dem Boden für $t = 13$. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Während einer späteren Wachstumsphase wird die Höhe der Pflanze über dem Boden mithilfe einer Polynomfunktion f beschrieben.

– Beschreiben Sie, wie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit (in Zentimetern pro Tag) der Pflanze für einen bestimmten Zeitpunkt in dieser späteren Wachstumsphase ermittelt werden kann, wenn eine Gleichung der Funktion f bekannt ist. (R)

a) Paragleiter sind Luftsportgeräte. Die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) eines Paragleiters während eines Fluges kann mithilfe der linearen Funktion h beschrieben werden:

$h(s) = k \cdot s + 1\,200$

s ... horizontal zurückgelegte Strecke ab dem Start in m
$h(s)$ ... Seehöhe bei einer horizontal zurückgelegten Strecke s in m

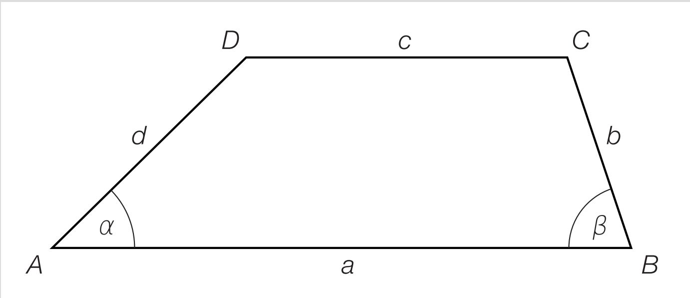
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1 200 in der obigen Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

Ein Paragleiter hat die Gleitzahl 8. Dies bedeutet, dass er jeweils bei 8 m horizontal zurückgelegter Strecke 1 m an Höhe verliert.

– Geben Sie an, welchen Wert der Parameter k der Funktion h in diesem Fall hat. (A)
– Bestimmen Sie, welche horizontale Strecke dieser Paragleiter zurückgelegt hat, wenn er sich in einer Seehöhe von 700 m befindet. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Bei Hängegleitern wird ein trapezförmiges Gestänge verwendet. In einer Bauanleitung findet sich folgende Skizze:



– Beschreiben Sie, wie man den Winkel β ermitteln kann, wenn die Seitenlängen a, c und d und der Winkel α bekannt sind. (R)

a) Zur Überprüfung des Stromverbrauchs wurde ein bereits vorgeheizter Minibackofen an einen Stromzähler angeschlossen. Der Stromzähler zeigte zu Beginn des 1. Backvorgangs 23,1 Kilowattstunden (kWh) an.

Nach 2 Stunden unmittelbar aufeinanderfolgender Backvorgänge zeigt der Stromzähler 24,9 kWh an.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion auf, mit der der Anzeigewert des Stromzählers in kWh in Abhängigkeit von der seit Beginn des 1. Backvorgangs vergangenen Zeit in h beschrieben werden kann. (A)

Der Stromzähler zeigte zu Beginn des 1. Backvorgangs 23,1 kWh an. Nach einer bestimmten Anzahl von unmittelbar aufeinanderfolgenden Backvorgängen zeigt er 25,86 kWh an. Ein Backvorgang dauert 8 min.

– Berechnen Sie, wie viele Backvorgänge insgesamt durchgeführt wurden. (B)

Die Temperatur des Minibackofens nach dem Abschalten kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden:

$T(t) = 20 + 200 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit nach dem Abschalten des Minibackofens in h
$T(t)$ ... Temperatur des Minibackofens zur Zeit t in °C
k ... positiver Parameter

– Geben Sie die Temperatur des Minibackofens zum Zeitpunkt des Abschaltens an. (R)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

– Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a einer Exponentialfunktion g mit $g(x) = a^x$ (mit $a > 0, a \neq 1$) auf das Monotonieverhalten von g. (R)

b) Eine Wasserpflanze wächst in einem Aquarium und bedeckt eine immer größer werdende Fläche des Aquarienbodens. Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$ Tage) bedeckt sie 1 cm², nach 14 Tagen bereits 10 cm². Im Folgenden werden verschiedene mathematische Modelle für dieses Wachstum betrachtet.

Bei Modell 1 geht man von einem linearen Wachstum aus.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion f auf, die den von der Wasserpflanze bedeckten Flächeninhalt in cm² zur Zeit t in Tagen beschreibt. (A)

Bei Modell 2 wird der von der Wasserpflanze bedeckte Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe der Funktion g beschrieben:

$g(t) = 1 \cdot e^{0{,}16447 \cdot t}$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Tagen
$g(t)$ ... bedeckter Flächeninhalt zur Zeit t in cm²

– Berechnen Sie, nach welcher Zeit sich der Inhalt der bedeckten Fläche gemäß Modell 2 jeweils verdoppelt. (B)

21 Tage nach Beginn der Beobachtung stellt man fest, dass die Wasserpflanze 30 cm² des Aquarienbodens bedeckt.

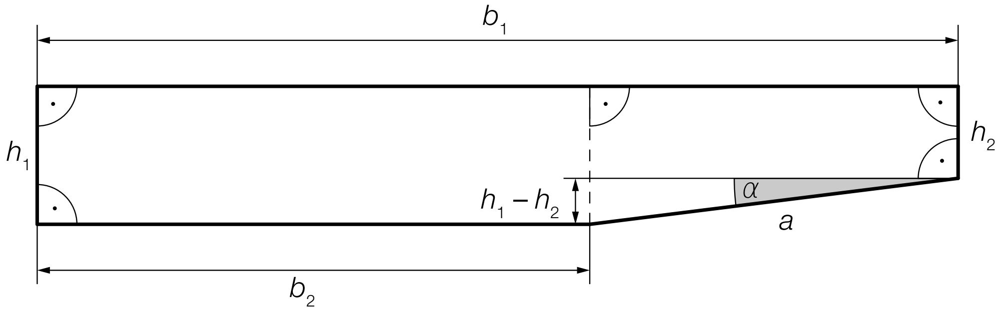
– Zeigen Sie, dass man bei Verwendung von Modell 2 die Bedeckung für $t = 21$ Tage besser beschreiben kann als bei Verwendung von Modell 1. (R)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Die Gleichung der Funktion g kann näherungsweise auch in der folgenden Form angegeben werden:
$g(t) = 1 \cdot 1{,}179^t$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,179 im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

3) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt eines Schwimmbeckens dargestellt:



– Erstellen Sie mithilfe von b_1, b_2, h_1 und h_2 eine Formel zur Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche des Schwimmbeckens.

$A =$ ____ (A)

– Berechnen Sie den Höhenunterschied $h_1 - h_2$ für $a = 4$ m und $\alpha = 7{,}13°$. (B)

Das Wasser in einem Schwimmbecken soll mit Chlor versetzt werden. Für eine Wassermenge von 1 Liter werden $6 \cdot 10^{-4}$ g Chlor benötigt. Ein Verantwortlicher behauptet, dass bei einer Füllmenge von 300 m³ Wasser insgesamt 1,8 kg Chlor zugesetzt werden müssen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist. (R)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

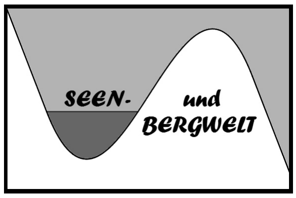
Die Harnstoffkonzentration in einem bestimmten Schwimmbecken kann in Abhängigkeit von der Anzahl der Badegäste an einem Tag näherungsweise durch folgende Funktion f beschrieben werden:

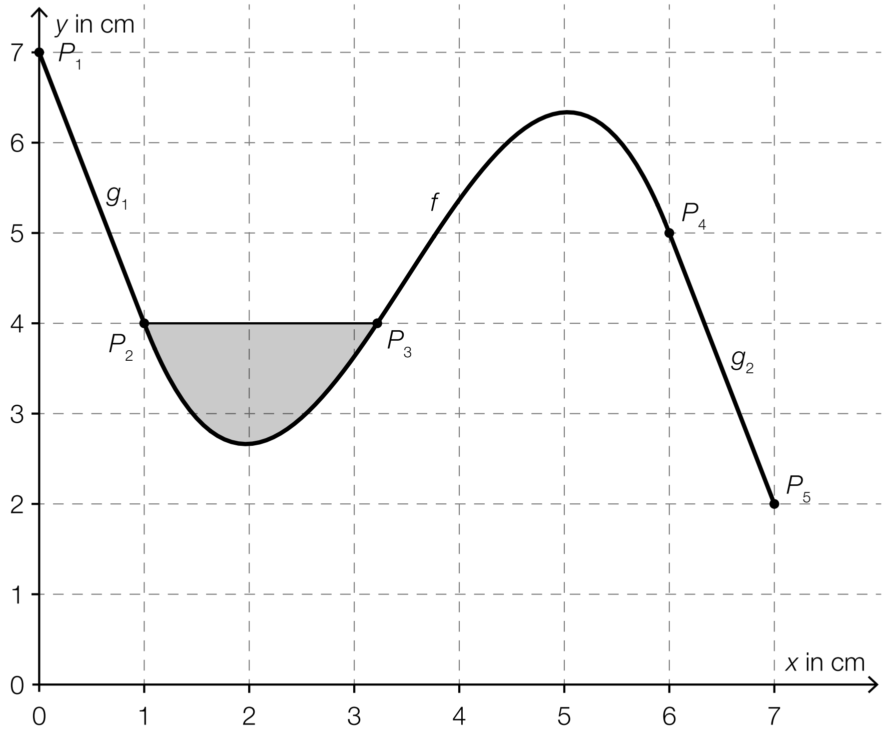
$f(x) = 0{,}064 + 0{,}00042 \cdot x \quad \text{mit} \quad 200 < x < 1\,000$

x … Anzahl der Badegäste an einem Tag
$f(x)$ … Harnstoffkonzentration bei x Badegästen an einem Tag in mg/L

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung der Funktion f im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

1) Eine Werbeagentur entwirft für eine Tourismusregion in den Alpen ein neues Logo (siehe nebenstehende Abbildung). Dabei werden zur Modellierung die Funktionen g_1 (für $0 \leq x \leq 1$), f (für $1 \leq x \leq 6$) und g_2 (für $6 \leq x \leq 7$) verwendet (siehe nachstehende Abbildung).





– Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion g_2 auf, deren Graph durch die Punkte P_4 und P_5 verläuft. (A)

Die Fläche zwischen der waagrechten Strecke P_2P_3 und dem Graphen der Funktion f soll eingefärbt werden.
Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = -\frac{32}{125} \cdot x^3 + \frac{336}{125} \cdot x^2 - \frac{951}{125} \cdot x + \frac{1\,147}{125} \quad \text{mit} \quad 1 \leq x \leq 6$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

– Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche. (B)
– Berechnen Sie die Stelle der maximalen Steigung der Funktion f. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die lineare Funktion g_1 mit $g_1(x) = -3 \cdot x + 7$ und die Funktion f im Punkt P_2 die gleiche Steigung haben. (R)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

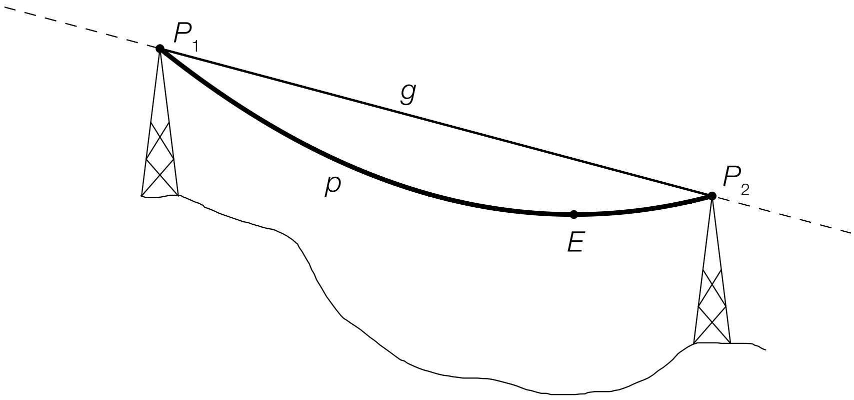
Die Höhe einer brennenden Kerze kann in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden durch folgende Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = -1{,}5 \cdot t + 15 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 10$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Stunden
$h(t)$ ... Höhe der Kerze zur Zeit t in cm

– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheiten die Bedeutung der beiden Zahlen –1,5 und 15 in der obigen Funktionsgleichung. (R)

3) Die nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung zeigt eine Stromleitung zwischen zwei Strommasten. Die Leitung verläuft zwischen den Punkten P_1 und P_2 im Winter nahezu geradlinig, während sie im Sommer durchhängt.



Der Verlauf der Stromleitung zwischen P_1 und P_2 im Sommer lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion p mit dem Scheitelpunkt E beschreiben (siehe obige Abbildung).

– Ordnen Sie den jeweiligen Aussagen über den Ursprung des Koordinatensystems die passende Form der Funktionsgleichung von p aus A bis D zu. Dabei gilt: $a, b, c \neq 0$.
[2 zu 4] (R)

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Punkt P_1.	
Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Punkt E.	

A	$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
B	$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
C	$p(x) = a \cdot x^2 + c$
D	$p(x) = a \cdot x^2$

In einem bestimmten Koordinatensystem gilt: $P_1 = (0|8)$, $P_2 = (30|0)$ (Koordinaten in Metern).

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion g, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft. (A)
– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{P_1P_2}$. (B)

3) Im Jahr 2014 waren in einer Stadt 40 % aller U-Bahn-Garnituren mit Klimaanlagen ausgestattet. Im Jahr 2017 gab es gleich viele U-Bahn-Garnituren wie im Jahr 2014, es waren jedoch 50 % davon klimatisiert.

In einem einfachen Modell geht man davon aus, dass der Prozentsatz an klimatisierten U-Bahn-Garnituren abhängig von der Zeit t linear anwächst.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion f, die diesen Zusammenhang beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2014. (A)

– Berechnen Sie für das Jahr 2014 die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 zufällig ausgewählten U-Bahn-Garnituren mehr als 7 mit einer Klimaanlage ausgestattet sind. (B)

2014 verfügten in dieser Stadt 126 Straßenbahngarnituren über eine Klimaanlage, das war jede vierte. 2017 war bereits ein Drittel aller Straßenbahngarnituren klimatisiert.

– Berechnen Sie, wie viele Straßenbahngarnituren im Jahr 2017 klimatisiert waren. Gehen Sie davon aus, dass es 2017 insgesamt gleich viele Straßenbahngarnituren wie im Jahr 2014 gab. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

In einem alternativen Modell wird anstelle der Funktion f eine Funktion g verwendet. Für alle t im Definitionsbereich gilt:

$g'(t) > 0$
$g''(t) < 0$

– Beschreiben Sie die Bedeutung dieser 2 Aussagen im Hinblick auf den Graphen der Funktion g. (R)

2) Zu Beginn des Jahres 1995 betrug der Holzbestand in einem Nationalpark 200 000 m³. Bis zu Beginn des Jahres 2015 wuchs dieser Holzbestand auf 225 000 m³ an.

Der Holzbestand in m³ soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren mithilfe einer linearen Funktion f beschrieben werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn des Jahres 1995. (A)

– Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$f(5) - f(3)$ (R)

In einem anderen Nationalpark gehen die Betreiber von einem exponentiellen Wachstum des Holzbestands aus. In den vergangenen 10 Jahren stieg der Holzbestand um insgesamt 5 %.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Holzbestand in einer Zeitspanne von 40 Jahren gemäß diesem Modell wächst. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Abgestorbene Stämme und Äste werden als Totholz bezeichnet. In einem bestimmten Abschnitt des Nationalparks befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge an Totholz N_0. Man nimmt an, dass sich diese Menge innerhalb von 10 Jahren verdoppeln wird. Um diese Entwicklung mathematisch zu beschreiben, kann entweder ein lineares oder ein exponentielles Modell verwendet werden.

– Beurteilen Sie anhand einer Skizze in einem geeigneten Koordinatensystem, welches der beiden Modelle im Zeitintervall]0; 10[zu jeder Zeit eine größere Menge an Totholz prognostiziert. (R)

2) Um die Entwicklung der Größe eines Embryos zu dokumentieren, wird während der Schwangerschaft bei 3 Ultraschalluntersuchungen die Länge eines Oberschenkelknochens dieses Embryos gemessen.

Folgende Ergebnisse liegen für diesen Embryo vor:

Nummer der Ultraschalluntersuchung	1	2	3
Schwangerschaftswoche	12	22	32
Länge des Oberschenkelknochens in mm	8	33	58

– Begründen Sie mathematisch, warum man in diesem Beobachtungszeitraum von einem linearen Wachstum der Länge des Oberschenkelknochens ausgehen kann. (R)

Die Länge L des Oberschenkelknochens in Millimetern soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. Wählen Sie $t = 0$ für die 12. Schwangerschaftswoche. (A)

Aus der Länge des Oberschenkelknochens kann man mithilfe einer einfachen Überschlagsrechnung auf die Körpergröße des Embryos schließen.

Im Internetforum A heißt es, man muss nur die Länge des Oberschenkelknochens in Millimetern mit 6 multiplizieren, um die Körpergröße des Embryos in Millimetern schätzen zu können. Im Internetforum B wird stattdessen der Faktor 7 angegeben.

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der Schätzwert für die Körpergröße aus dem Internetforum B größer ist als jener aus dem Internetforum A. (B)

1) Der Besitzer eines Eissalons behauptet, dass sein Tagesumsatz von der Tageshöchsttemperatur abhängt.
Mithilfe von Erfahrungswerten lässt sich dafür modellhaft die Funktion U erstellen:

$U(T) = 200 \cdot T - 500$ mit $20 \leq T \leq 31$

T ... Tageshöchsttemperatur in °C
$U(T)$ ... Tagesumsatz bei der Tageshöchsttemperatur T in Euro

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 200 in der obigen Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang. (R)

Aus Erfahrung weiß man, dass 15 % aller bestellten Eisbecher Bananensplits sind.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 21 Bananensplits bestellt werden, wenn an einem Tag insgesamt 120 Eisbecher unabhängig voneinander bestellt werden. (B)

Ein Kinderbecher wird mit einer kleinen Tierfigur dekoriert, wobei ein Tiger, ein Löwe und eine Giraffe zur Auswahl stehen. Die Figuren werden zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Tiger ist p, jene für einen Löwen ist 0,55.

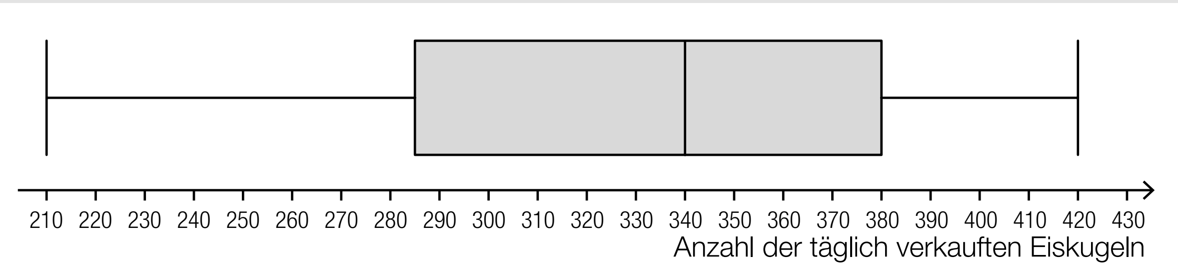
– Erstellen Sie mithilfe von p eine Formel zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit:

P(„man erhält bei 2 Kinderbechern einen Löwen und eine Giraffe") = ______________________

(A)

Verpflichtende verbale Fragestellung:

Ein Eissalon hat einen Gassenverkauf. Im nachstehenden Boxplot ist die Anzahl der im vergangenen Sommer täglich verkauften Eiskugeln dargestellt.



Jemand behauptet, dass aus diesem Boxplot abgelesen werden kann: Es gab genau 1 Tag, an dem 420 Eiskugeln verkauft wurden.

– Erklären Sie, warum diese Behauptung nicht stimmen muss. (R)

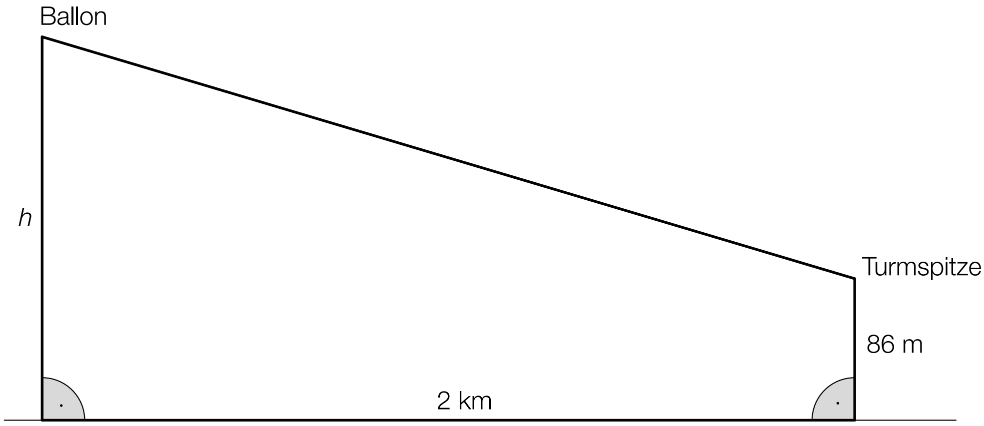
2) Bei einer Heißluftballonfahrt dürfen der Pilot und die Fahrgäste bei einer Temperatur von 12 °C eine Gesamtmasse von 700 kg haben. Diese erlaubte Gesamtmasse reduziert sich pro Grad Celsius Temperaturzunahme um 17,5 kg. Die erlaubte Gesamtmasse in Kilogramm soll in Abhängigkeit von der Lufttemperatur T in Grad Celsius durch eine Funktion m beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion m. (A)

Die Wahrscheinlichkeit, dass Ballonfahrten unabhängig voneinander aufgrund des Wetters abgesagt werden müssen, beträgt erfahrungsgemäß $\frac{1}{5}$.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 zufällig ausgewählten Ballonfahrten nur die letzte aufgrund des Wetters abgesagt werden muss. (B)

Ein Heißluftballon schwebt über einer Ebene. Ein Fahrgast sieht die Spitze eines 2 km entfernten, 86 m hohen Kirchturms unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 5°$ (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



– Berechnen Sie die Höhe h. (B)

<u>Verpflichtende verbale Fragestellung:</u>

Nimmt man die Form des Ballons stark vereinfacht als kugelförmig an, so gilt:

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

V ... Volumen
r ... Radius

– Erklären Sie, wie sich das Volumen V ändert, wenn man den Radius r verdoppelt. (R)