

Bevölkerungsentwicklung*

Aufgabennummer: A_218

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

- a) Zu Beginn des Jahres 1992 lebten in der steirischen Gemeinde Eisenerz 7 965 Menschen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 4 524.

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl in Eisenerz soll näherungsweise durch eine lineare Funktion N_1 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1 .

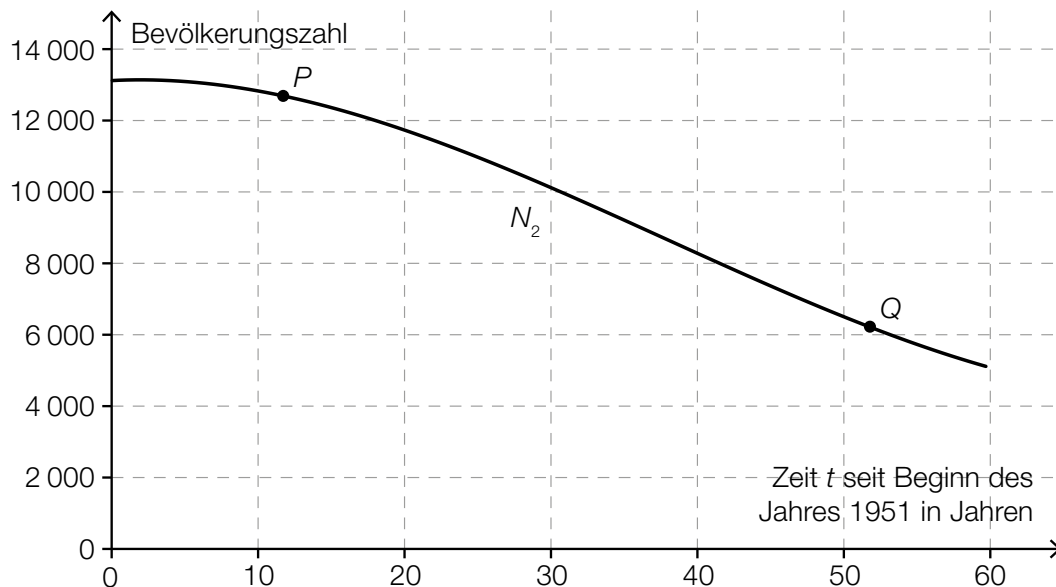
t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1992

$N_1(t)$... Bevölkerungszahl zur Zeit t

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Funktion N_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Im nachstehenden Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



- Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu. [2 zu 4]

P	
Q	

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

- c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3 , die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
- Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3 , welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$$d = N_1(0) = 7\,965$$

$$k = \frac{4\,524 - 7\,965}{22} = -156,4\dots$$

$$N_1(t) = -156 \cdot t + 7\,965$$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$$4\,524 = 10\,068 \cdot a^{33} \Rightarrow a = 0,976\dots$$

$$N_3(t) = 10\,068 \cdot 0,976\dots^t$$

$$N_3(49) = 3\,069,5\dots$$

oder: $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$$4\,524 = 10\,068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \Rightarrow \lambda = 0,024\dots$$

$$N_3(t) = 10\,068 \cdot e^{-0,024\dots \cdot t}$$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1
 1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × C: für die richtige Zuordnung
- c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3
 1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030

Bevölkerungswachstum in den USA

Aufgabennummer: A_092

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Thomas Malthus gelang es, mit seiner Wachstumsfunktion B das Bevölkerungswachstum in den USA für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts ab 1790 ($t = 0$) gut zu beschreiben.

$$B(t) = B_0 \cdot 1,0302^t$$

t ... Zeit in Jahren

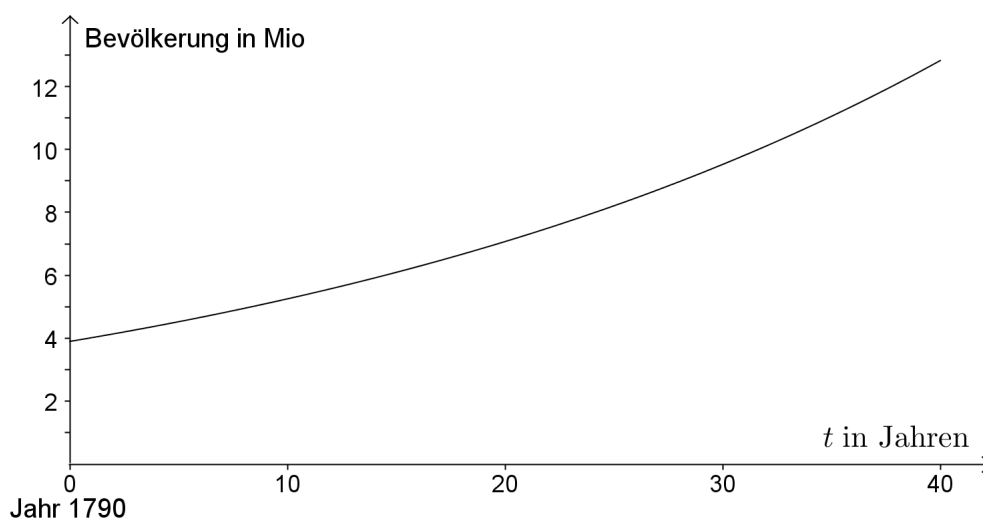
$B_0 = 3,9$ Mio. Menschen in den USA im Jahr 1790

$B(t)$... Bevölkerungsanzahl in Millionen nach t Jahren

Angaben aus Volkszählungen

Jahr	1800	1810	1820
Anzahl der Menschen in Millionen	5,3	7,2	9,6

- a) – Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Wachstumsfunktion die Anzahl der Menschen in den USA für das Jahr 1820.
– Ermitteln Sie die prozentuelle Abweichung dieses errechneten Wertes vom erhobenen Wert aus der Volkszählung.
- b) In der folgenden Grafik ist die von Thomas Malthus aufgestellte Wachstumsfunktion für die USA dargestellt:



- Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Bevölkerungszahlen in den USA für den dargestellten Zeitraum von 40 Jahren.

c) $B(t) = 3,9 \cdot 1,0302^t$
 $B'(t) = 3,9 \cdot \ln 1,0302 \cdot 1,0302^t$

– Interpretieren Sie den Ausdruck „ $3,9 \cdot \ln 1,0302$ “ im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

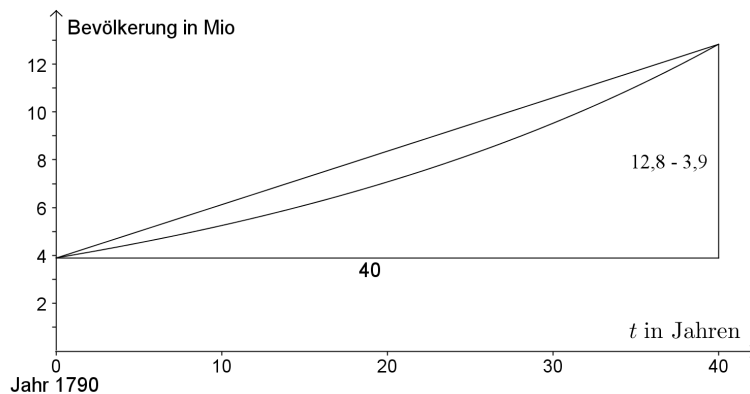
Möglicher Lösungsweg

a) $B(30) = 3,9 \cdot 1,0302^{30} \approx 9,52$ Mio. Menschen

Abweichung: $\frac{B(30) - 9,6}{9,6} \approx -0,0082$

Die Abweichung des errechneten Wertes vom erhobenen Wert beträgt ca. 0,8 %.

b)



mittlere Änderungsrate: $\frac{12,8 - 3,9}{40} = 0,2225$

Die Bevölkerung wuchs pro Jahr um ca. 0,22 Mio.

c) Das ist die momentane Änderungsrate der Bevölkerungsanzahl zum Zeitpunkt $t = 0$, also für das Jahr 1790.

Klassifikation

☒ Teil A

☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 1
- c) 1

Thema: Demografie

Quelle: <http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de>

Bevölkerungswachstum und -abnahme*

Aufgabennummer: A_152

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Landes kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

- a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$$N(t) = 82,5 \cdot e^{-0,00043347 \cdot t}$$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005

$N(t)$... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang.

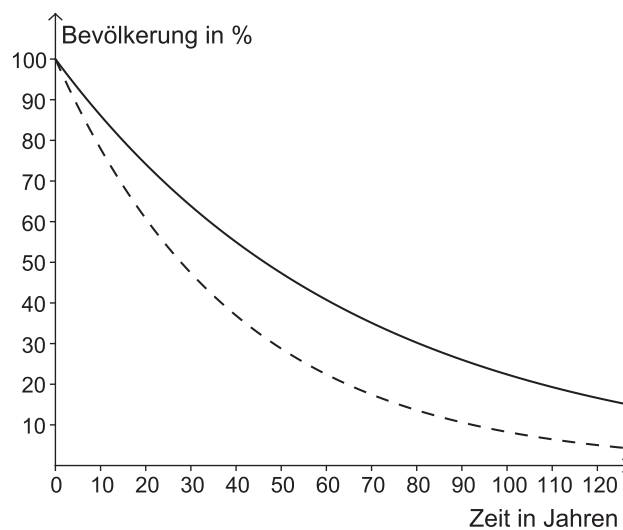
- b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.

– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.
- Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten.



- d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

$$(1) N = 8 \cdot 1,02^t$$

$$(2) \ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1,02)$$

- Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

b) $A(t) = 8,402 \cdot 1,003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011

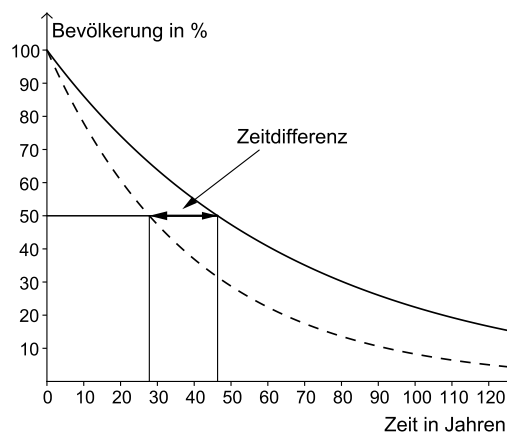
$A(t)$... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$$8,402 \cdot 1,003^t = 10$$

$$t \approx 58,13$$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1,02)$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Interpretation
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung des Kalenderjahrs
- c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Zeitdifferenz
- d) 1 × B: für das Richtigstellen der logarithmierten Gleichung (2)

Die Genussformel*

Aufgabennummer: A_263

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Der Physiker Werner Gruber erklärt in seinem Buch *Die Genussformel* (Salzburg: Ecowin, 2008) die kleinen chemischen und physikalischen Tricks der großen Köchinnen und Köche. Dabei werden auch mathematische Zusammenhänge betrachtet.

- a) In der *Genussformel* betrachtet Gruber den Genuss beim Essen als messbare Größe mit Werten von 0 (kein Genuss) bis 1 (maximaler Genuss). Für die Abhängigkeit des Genusses von der Anzahl der Geschmacksrichtungen auf einem Teller gibt Gruber folgende Funktion G an:

$$G(n) = e^{-\frac{(n-3)^2}{0,2746}}$$

n ... Anzahl der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

$G(n)$... Genuss bei n unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

- Ermitteln Sie diejenige Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen, bei der man laut Gruber den maximalen Genuss hat.

- b) Für die optimale Bratdauer einer Gans gibt Gruber folgende Werte an:

Masse der Gans in Kilogramm	Bratdauer in Minuten
2,0	104
3,0	136
3,8	159

- Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass zwischen Masse und Bratdauer kein exakter linearer Zusammenhang vorliegt.

- c) Ein Ei einer bestimmten Größe wird gekocht. Der zeitliche Verlauf der Innentemperatur wird mithilfe der Funktion T modelliert:

$$T(t) = 100 - 192 \cdot e^{-\frac{25 \cdot t}{81}} \text{ mit } t \geq 3$$

t ... Kochzeit in min

$T(t)$... Innentemperatur zur Zeit t in °C

- Berechnen Sie, nach welcher Kochzeit eine Innentemperatur von 84 °C erreicht wird.

Die Potenz $e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$ wird in Wurzelschreibweise und mit positiver Hochzahl dargestellt.

- Kreuzen Sie die zutreffende Darstellung an. [1 aus 5]

$\frac{1}{\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}}$	☐
$\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}$	☐
$-\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}$	☐
$-\sqrt[25]{e^{81 \cdot t}}$	☐
$\frac{1}{\sqrt[25]{e^{81 \cdot t}}}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(n) = 1$:

$$e^{-\frac{(n-3)^2}{0,2746}} = 1 \Rightarrow n = 3$$

b) Für die jeweiligen Differenzenquotienten gilt:

$$\frac{136 - 104}{3,0 - 2,0} = 32 \quad \text{bzw.} \quad \frac{159 - 136}{3,8 - 3,0} = 28,75 \quad \text{bzw.} \quad \frac{159 - 104}{3,8 - 2,0} = 30,55...$$

Es liegt kein linearer Zusammenhang vor, weil die Differenzenquotienten nicht gleich sind.

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, alle 3 angegebenen Differenzenquotienten zu ermitteln.

c) $84 = 100 - 192 \cdot e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 8,0...$$

Nach etwa 8 Minuten hat das Ei eine Innentemperatur von 84 °C.

$\frac{1}{\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}}$	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen für maximalen Genuss

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe des Differenzenquotienten

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kochzeit
1 × C: für das richtige Ankreuzen

Epidemie*

Aufgabennummer: A_255

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

In einem Land breitet sich eine Epidemie aus.

- a) Nach wissenschaftlichen Recherchen vor Ort konnte im Nachhinein der Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls festgestellt werden.

Zu Beginn der Epidemie verdoppelt sich die Anzahl der Neuinfektionen etwa alle 4 Tage.

- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion N , die die Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t in Tagen beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls.
- Argumentieren Sie, dass eine exponentielle Zunahme der Anzahl der Neuinfektionen auf lange Sicht nicht realistisch ist.

- b) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden.

$$I(t) = \frac{30000}{1 + b \cdot e^{-0,1739 \cdot t}}$$

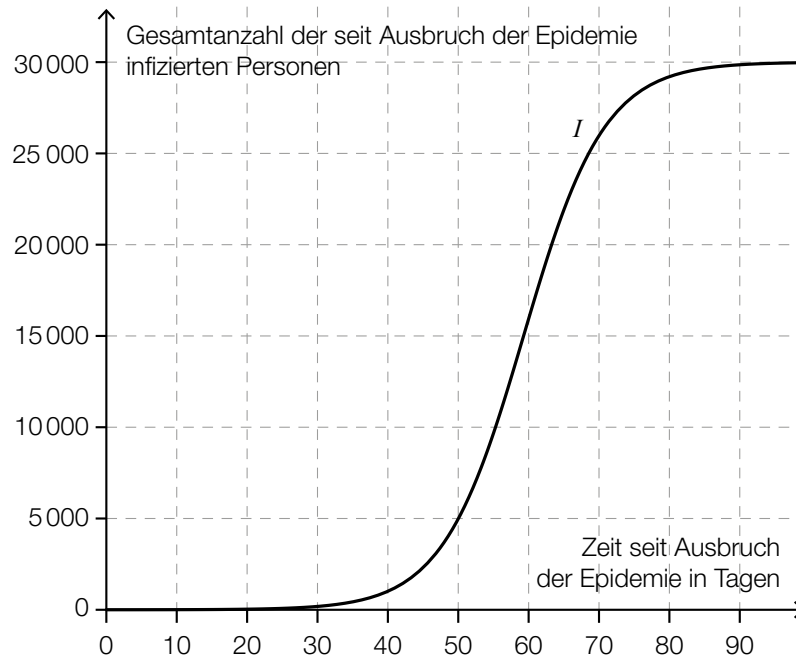
t ... Zeit seit Ausbruch der Epidemie in Tagen

$I(t)$... Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen zur Zeit t

Nach 41 Tagen wurden insgesamt 1 200 infizierte Personen registriert.

- Berechnen Sie den Parameter b .
- Ermitteln Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden.

- c) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch eine Funktion I beschrieben werden. Der Graph der Funktion I ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



- Interpretieren Sie den Ausdruck $I(45)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
- Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, bei dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist.
- Dokumentieren Sie in Worten, wie der Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist, mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann, wenn eine Gleichung von I bekannt ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$$N_0 = 1$$

$$a = \sqrt[4]{2} = 1,18920\dots$$

$$N(t) = 1 \cdot 1,1892\dots^t \quad \text{oder} \quad N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$$

t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen

$N(t)$... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

b) $1200 = \frac{30000}{1 + b \cdot e^{-0,1739 \cdot 41}}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $b = 29970,0\dots$

$$17000 = \frac{30000}{1 + 29970,0\dots \cdot e^{-0,1739 \cdot t}}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 60,8\dots$

Nach etwa 61 Tagen werden erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein.

c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ± 5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion N
1 × D: für die richtige Argumentation
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden
- c) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für das richtige Ablesen der Wendestelle im Toleranzbereich [55; 65]
1 × C3: für die richtige Dokumentation in Worten
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

Halbwertszeit des Wissens*

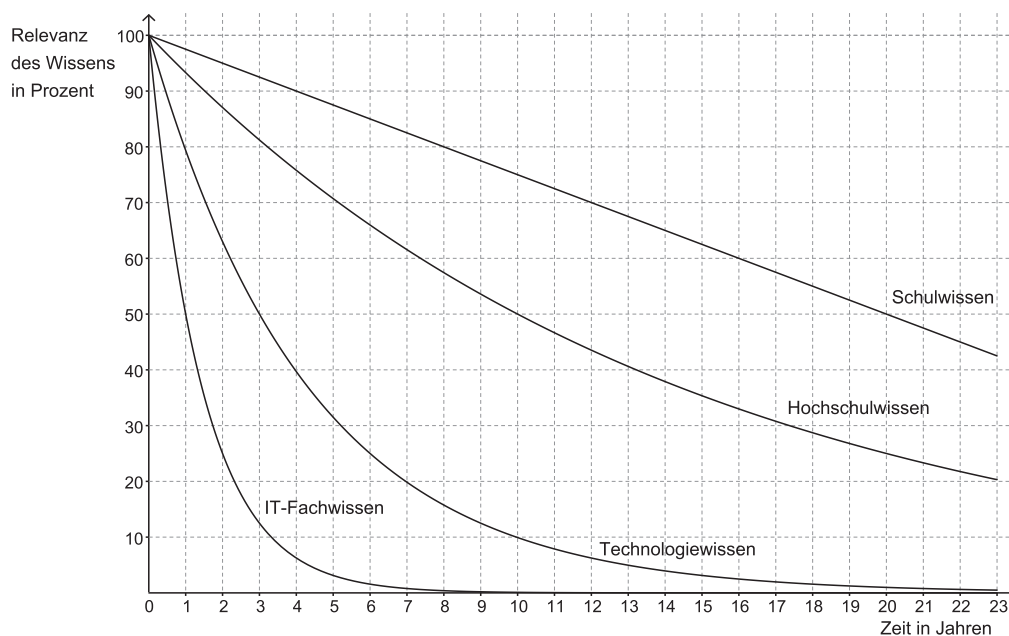
Aufgabennummer: A_159

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz“). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



- a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.
- Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall $[0; 15]$ ein.
- b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.
- Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
 - Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$$N(t) = 100 \cdot e^{-0,0693 \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren

$N(t)$... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

- Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

- d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

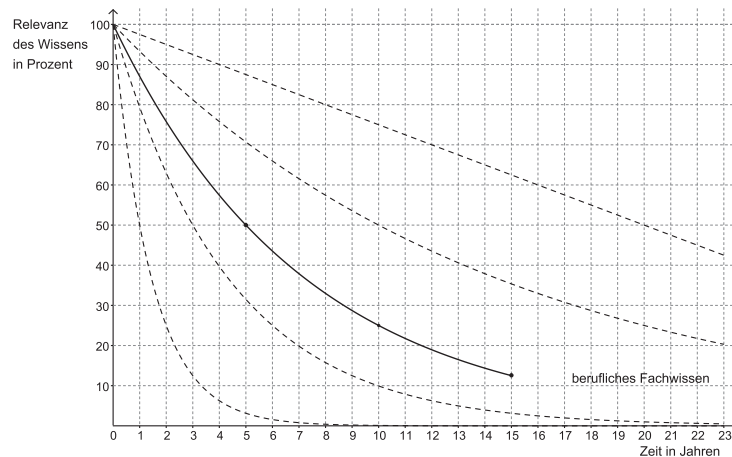
- Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

 t ... Zeit in Jahren $T(t)$... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$1 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow t = 19,9... \approx 20$$

Nach rund 20 Jahren ist die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz gesunken.

c) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0,0693 \cdot 7} = 38,4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d) $k = -\frac{5}{2}$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen im Intervall $[0; 15]$ (dabei müssen die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein)
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
- d) 1 × C: für das richtige Ablesen der Steigung

Koffein

Aufgabennummer: A_199

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Die Abbaurate von Koffein kann von Person zu Person stark variieren.

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

- Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit“ zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält.

Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0,39685^t$$

$N(t)$... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t

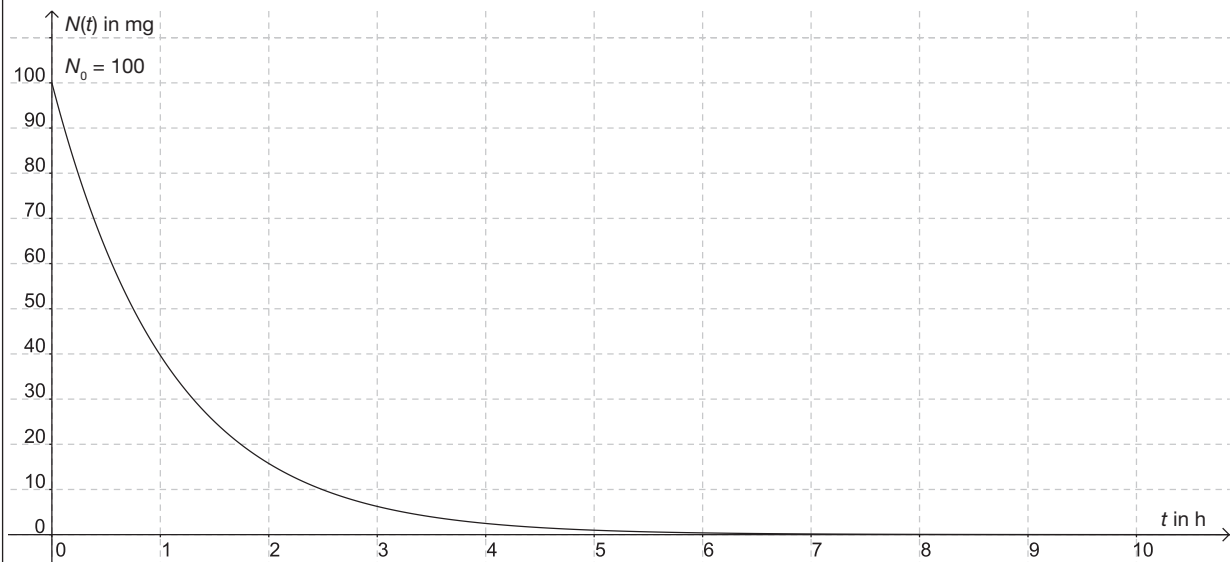
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$

t ... Zeit in Stunden (h)

- Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

c) Die unten stehende Grafik zeigt den exponentiellen Abbau von Koffein im Körper einer Person.

- Skizzieren Sie in die Grafik den Verlauf der Exponentialfunktion für Sabine, die 100 mg Koffein zu sich nimmt und mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden abbaut.



d) Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0,39685^t$$

$N(t)$... Koffeinmenge in mg zur Zeit t

N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$

t ... Zeit in Stunden

Eine Menge von 500 mg Koffein kann z. B. Schlafstörungen, Unruhe und Nervosität hervorrufen.

- Berechnen Sie, wie viele ganze Dosen Energydrink (zu 200 ml mit 80 mg Koffein) Klara eine halbe Stunde vor dem Zubettgehen mindestens trinken müsste, sodass sie Schlafstörungen wegen des Koffeins hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Umformung liefert $\lambda = 0,4621$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0,4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0,4621 \cdot t}$$

$N(t)$... Koffeinmenge in mg zur Zeit t

t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a :

$$0,5 = a^{1,5}$$

$$a = 0,62996$$

$$N(t) = 80 \cdot 0,62996^t$$

$N(t)$... Koffeinmenge in mg zur Zeit t

t ... Zeit in Stunden

b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:

$$t = 4 \text{ h}$$

$$N_0 = 80 \text{ mg}$$

$$N(4) = 80 \cdot 0,39685^4 = 1,98424$$

90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:

$$t = 2,5 \text{ h}$$

$$N_0 = 90 \text{ mg}$$

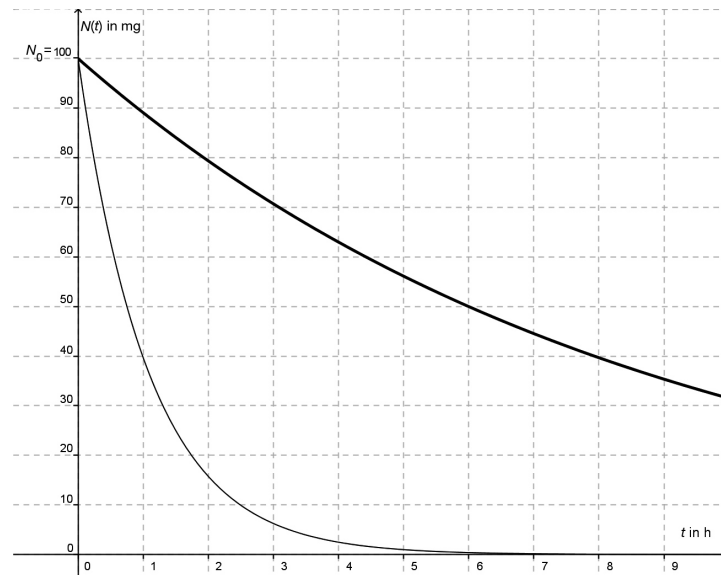
$$N(2,5) = 90 \cdot 0,39685^{2,5} = 8,92911$$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: $1,98424 + 8,92911 = 10,91335$

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls zulässig.

- c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0,39685^{0,5}$

$$N_0 = \frac{500}{0,39685^{0,5}} = 793,7$$

$$\frac{793,7}{80} = 9,921$$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das Auffinden des korrekten Modells (Funktionsgleichung)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Parameters und die korrekte und vollständige Angabe der Funktionsgleichung
- b) 1 × A: für die Berücksichtigung der unterschiedlichen Bezugszeitpunkte
1 × B: für die korrekte Berechnung
- c) 1 × A: wenn aus dem Graphen klar ersichtlich ist, dass die Abnahme pro Zeiteinheit geringer wird; der Graph muss durch den Punkt (6|50) gehen
- d) 1 × B: für die korrekte Berechnung von N_0
1 × B: für die korrekte Berechnung und das korrekte Runden der Dosenzahl

Medikamentenabbau (1)*

Aufgabennummer: A_251

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Der Abbau von Medikamenten im Körper kann näherungsweise durch exponentielle Modelle beschrieben werden.

- a) Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Menge $N(t)$ eines bestimmten Medikaments zur Zeit t im Körper vorhanden ist:

t in h	0	2	4
$N(t)$ in mg	100	60	36

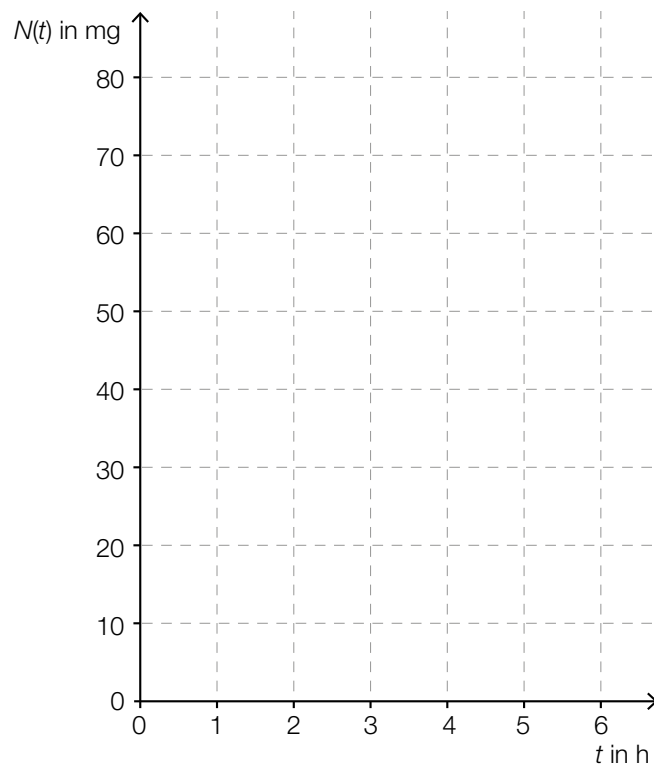
- Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten die Beschreibung des Medikamentenabbaus durch ein exponentielles Modell nahelegen.
- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N , die diesen Medikamentenabbau beschreibt.
- Berechnen Sie diejenige Menge des Medikaments, die zur Zeit $t = 3$ h im Körper vorhanden ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Ein anderes Medikament hat im Körper die Halbwertszeit 1,5 h. Am Anfang ($t = 0$ h) sind 80 mg des Medikaments im Körper vorhanden.

Der Medikamentenabbau im Körper kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

- Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von N im Zeitintervall $[0 \text{ h}; 6 \text{ h}]$ ein.



c) Ein Medikament hat im Körper eine Halbwertszeit $T_{1/2}$.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist $\frac{1}{6}$ der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 50 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist weniger als $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $5 \cdot T_{1/2}$ sind 10 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = 200 \cdot e^{-0,3 \cdot t}$$

t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h

$N(t)$... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Es liegt nahe, für die Beschreibung des Medikamentenabbaus ein exponentielles Modell zu wählen, weil sich die Menge in gleichen Zeitabständen (von 2 h) jeweils um den gleichen Faktor (0,6) verkleinert.

$$N(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$$

$$60 = 100 \cdot e^{k \cdot 2}$$

$$k = \frac{\ln(0,6)}{2} = -0,25541... \approx -0,2554$$

$$N(t) = 100 \cdot e^{-0,2554 \cdot t}$$

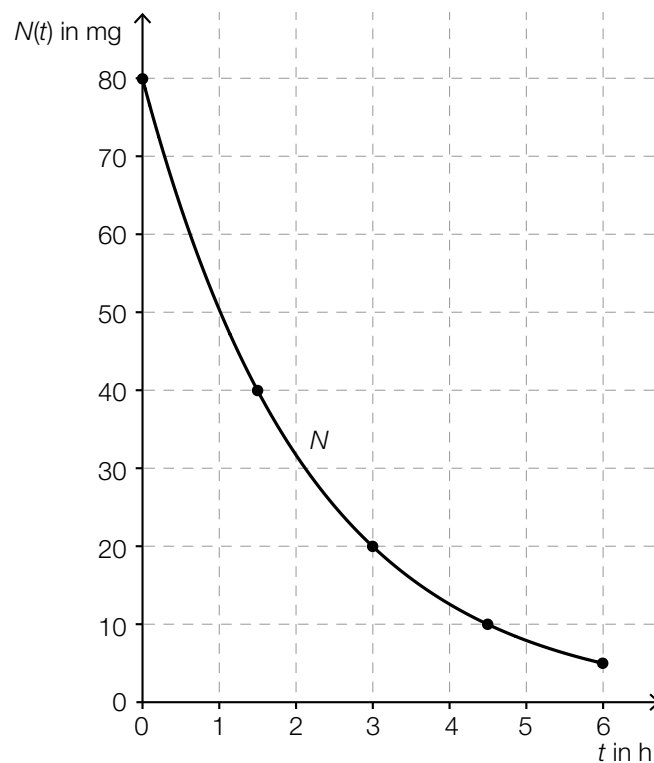
t ... Zeit in h

$N(t)$... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

$$N(3) = 46,4...$$

Zur Zeit $t = 3$ h sind rund 46 mg des Medikaments im Körper vorhanden.

b)



c)

Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☒

d) $200 \cdot 0,15 = 200 \cdot e^{-0,3 \cdot t}$

$$t = \frac{\ln(0,15)}{-0,3} = 6,32...$$

Nach rund 6,3 Stunden muss das Medikament wieder verabreicht werden.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für die richtige Erklärung
 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Exponentialfunktion
 1 × B: für die richtige Berechnung der Menge zur Zeit $t = 3$ h
- b) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen im gegebenen Intervall (Dabei müssen die Funktionswerte nach 1, 2, 3 und 4 Halbwertszeiten richtig eingezeichnet sein.)
- c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
- d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

Medikamentenabbau (2)

Aufgabennummer: A_231

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Bei Seereisen treten immer wieder Fälle von Seekrankheit bei den Passagieren auf. Verschiedene Medikamente stehen zu deren Behandlung zur Verfügung.

a) Der Medikamentenabbau im Blut erfolgt nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0,231 \cdot t}$$

t ... Zeit in Stunden (h)

$N(t)$... Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg

N_0 ... Ausgangsmenge des Wirkstoffs im Blut in mg

– Beschreiben Sie, was mit der Gleichung $0,5 = e^{-0,231 \cdot t}$ im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt werden kann.

Ein Passagier nimmt um 18:00 Uhr und um 22:00 Uhr je eine Tablette mit 50 mg Wirkstoffmenge zu sich.

– Ermitteln Sie, wie viel Milligramm Wirkstoffmenge der Passagier am nächsten Tag um 4:00 Uhr noch im Körper hat.

- b) Ein neuartiges Medikament steht in zwei Formen A und B zur Verfügung. Der Abbau des Wirkstoffs wurde für beide Formen in regelmäßigen Zeitabständen gemessen.

Die beiden Wertetabellen zeigen die Wirkstoffmenge $W(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t :

Versuchsreihe für A	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,0
1	27,0
2	24,3
3	21,87

Versuchsreihe für B	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,00
1	29,25
2	28,50
3	27,75

- Begründen Sie anhand der obigen Tabellen, warum die Versuchsreihe für A durch ein exponentielles und die Versuchsreihe für B hingegen durch ein lineares Modell beschrieben werden kann.
- Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den zeitlichen Abbau der Wirkstoffmenge des Medikaments in der Form B .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Mithilfe dieser Gleichung wird ermittelt, nach welcher Zeit von der ursprünglichen Wirkstoffmenge nur noch die Hälfte vorhanden ist (Halbwertszeit).

Mit $N_0 = 50$ und $t = 0$ für 18:00 Uhr gilt:

Wirkstoffmenge vor Einnahme der 2. Tablette = $N(4) = 50 \cdot e^{-0,231 \cdot 4} = 19,846\dots$

Mit $N_0 = 19,846\dots + 50 = 69,846\dots$ und $t = 0$ für 22:00 Uhr gilt:

Wirkstoffmenge um 4:00 Uhr = $N(6) = 69,846\dots \cdot e^{-0,231 \cdot 6} = 17,466\dots$

Um 4:00 Uhr hat der Passagier noch rund 17,47 mg des Wirkstoffs im Blut.

- b) Bei der Versuchsreihe für A handelt es sich um eine exponentielle Abnahme, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben prozentuellen Wert (nämlich um 10 %) abnimmt. Die Versuchsreihe für B kann durch ein lineares Modell beschrieben werden, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben konstanten Wert (nämlich um 0,75 mg/L) abnimmt.

$$W(t) = 30 - 0,75 \cdot t$$

t ... Zeit in Stunden (h)

$W(t)$... Wirkstoffmenge zur Zeit t in mg/L

Klassifikation

☒ Teil A

☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Orangen

Aufgabennummer: A_220

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

- a) Ein Orangenbauer teilt die Früchte einer Ernte nach ihrem Durchmesser ein. Orangen mit einem Durchmesser von weniger als 6 cm und einem Durchmesser ab 10 cm bleiben unberücksichtigt.

Durchmesser d in cm	Anzahl der Orangen
$6 \leq d < 7$	120
$7 \leq d < 8$	289
$8 \leq d < 9$	378
$9 \leq d < 10$	185

- Erstellen Sie ein Säulendiagramm, das die Anzahl der Orangen pro Klasse darstellt.
- Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Durchmesser aller Orangen. (Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.)

- b) Frisch gepresster Orangensaft hat gewöhnlich einen Vitamin-C-Gehalt von 50 Milligramm pro Deziliter (mg/dl).
1 L frisch gepresster Orangensaft wird mit 500 ml Wasser verdünnt.

- Berechnen Sie die Vitamin-C-Menge in Milligramm, die in 0,3 L des verdünnten Orangensafts enthalten ist.

- c) Der Abbau von Vitamin C im menschlichen Körper kann annähernd durch die Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

t ... Zeit in Tagen nach der Aufnahme

$N(t)$... Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit t in mg

$k > 0$... Konstante

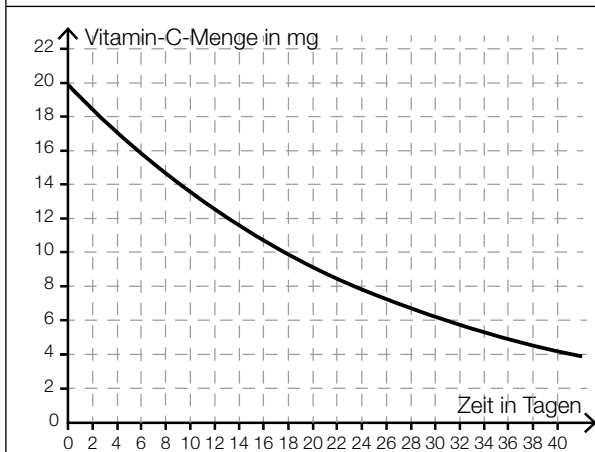
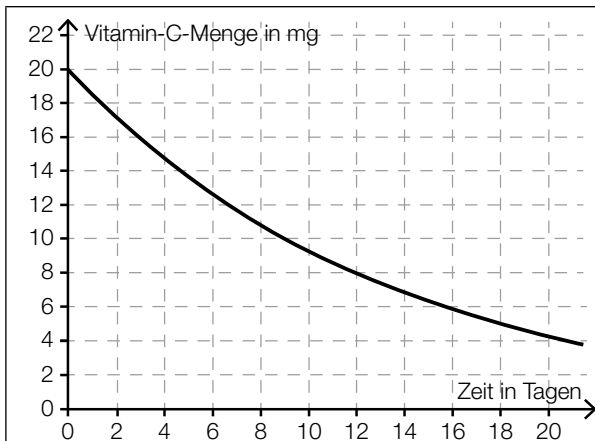
N_0 ... Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit $t = 0$ in mg

Im Körper einer bestimmten Person wird in den ersten 6 Tagen nach der Aufnahme etwa ein Achtel der aufgenommenen Vitamin-C-Menge abgebaut.

- Ermitteln Sie den Parameter k .

Die Halbwertszeit von Vitamin C im menschlichen Körper variiert sehr stark.

- Ordnen Sie den beiden Grafiken jeweils die korrekte Halbwertszeit aus A bis D zu.
[2 zu 4]



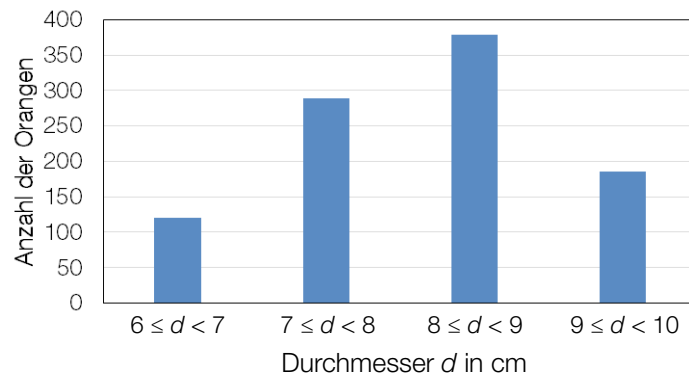
A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\bar{x} = \frac{6,5 \cdot 120 + 7,5 \cdot 289 + 8,5 \cdot 378 + 9,5 \cdot 185}{972} = 8,14\dots$$

$$\bar{x} \approx 8,1 \text{ cm}$$

- b) 1,5 L verdünnter Orangensaft ... 500 mg Vitamin C
 0,3 L verdünnter Orangensaft ... x mg Vitamin C

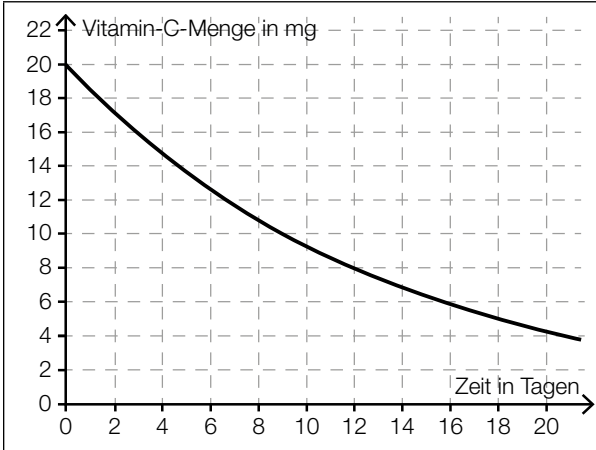
$$x = \frac{0,3}{1,5} \cdot 500 = 100$$

0,3 L des verdünnten Orangensafts enthalten 100 mg Vitamin C.

- c) $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$
 $0,875 = e^{-6 \cdot k}$

Durch Umformung auf $k = \frac{\ln(0,875)}{-6}$ oder Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz erhält man k .

$$k = 0,02225\dots \approx 0,0223$$



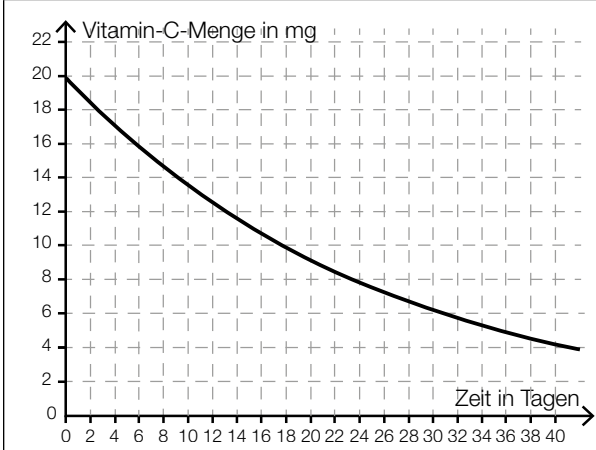
C

A

18 Tage

B

20 Tage



A

C

9 Tage

D

40 Tage

Klassifikation

☒ Teil A

☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 1 Zahlen und Maße
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) —
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) leicht

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 1
- c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: <http://www.vitalstoff-lexikon.de/Vitamine-A-C-D-E-K/Vitamin-C/>

Verdoppelungszeit von Bakterien

Aufgabennummer: A_234

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

a) Die Masse eines *Escherichia-coli*-Bakteriums beträgt 10^{-12} g. Die Verdoppelungszeit des Bakteriums beträgt unter bestimmten Voraussetzungen 17 Minuten.

- Berechnen Sie die Masse in Tonnen, die durch Zellteilung aus einem Bakterium dieser Art nach 17 Stunden (theoretisch) entstanden ist.

b) Eine Menge von 100 *Lactobacillus-acidophilus*-Bakterien vermehrte sich innerhalb von 6 Stunden auf eine Anzahl von 3533 Bakterien.

- Ermitteln Sie aus dieser Angabe die genaue Verdoppelungszeit in Minuten.

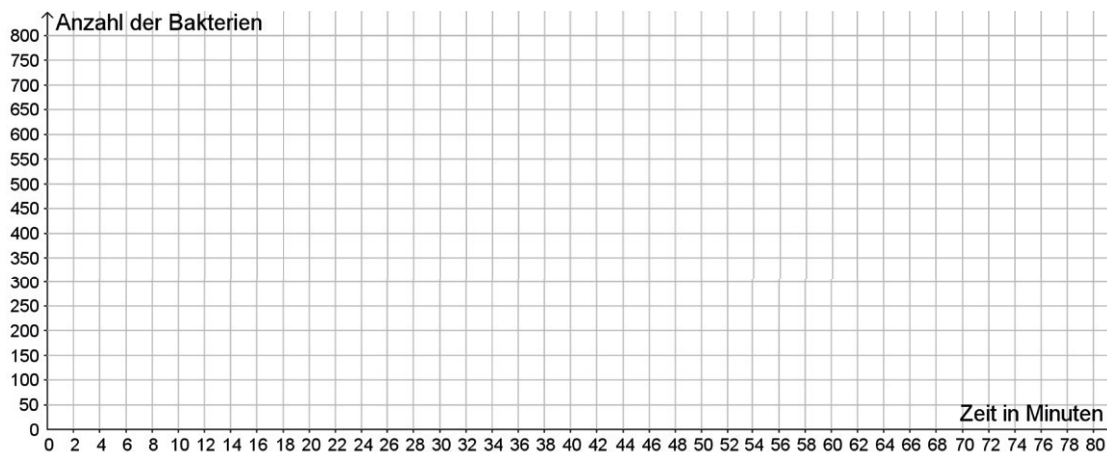
c) Die Verdoppelungszeit des *Streptococcus-lactis*-Bakteriums beträgt 26 Minuten. Zu Beginn ($t = 0$) sind 100 Bakterien vorhanden.

- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion, die das exponentielle Wachstumsverhalten dieser Bakteriumart beschreibt, mit folgenden Parametern:

t ... Zeit in Minuten

$B(t)$... Anzahl der Bakterien

- Skizzieren Sie im nachstehenden Diagramm das exponentielle Wachstumsverhalten von 100 *Streptococcus-lactis*-Bakterien.



- d) In einer bestimmten Wachstumsphase kann man die Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch eine Exponentialfunktion B beschreiben:

$$B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in Minuten, $t = 0$ ist Beobachtungsbeginn

$B(t)$... Anzahl der Bakterien zur Zeit t

B_0 ... Anzahl der Bakterien zur Zeit $t = 0$, $B_0 > 0$

λ ... Konstante, $\lambda > 0$

- Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Die Funktion B ist _____ ① _____, weil _____ ② _____.

①	
streng monoton steigend	☐
konstant	☐
streng monoton fallend	☐

②	
sie kein Maximum hat	☐
sie nur für positive t definiert ist	☐
B_0 und λ positiv sind	☐

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

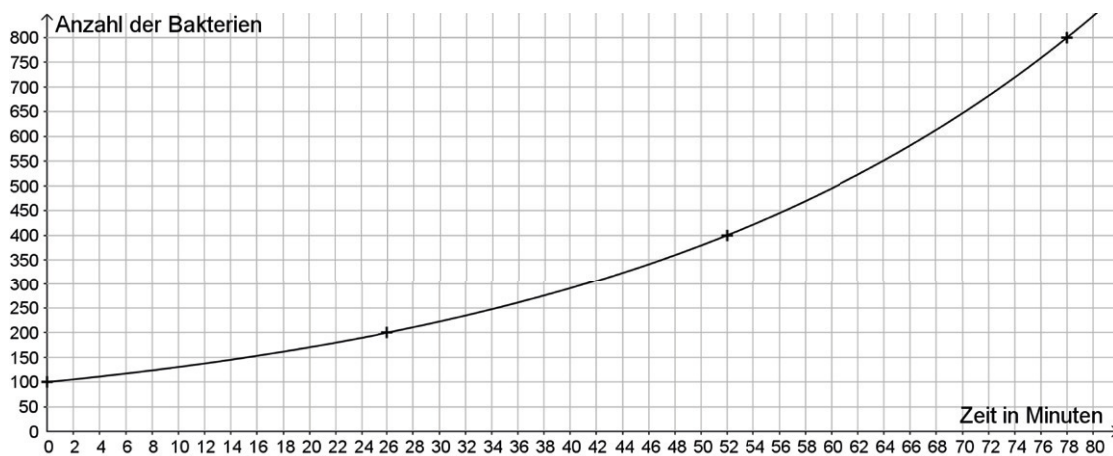
Möglicher Lösungsweg

a) Masse in Gramm: $10^{-12} \cdot 2^{60} \approx 1\,152\,921,5$ g. Dies entspricht einer Masse von etwa 1,15 t.

b) $3533 = 100 \cdot 2^{60/a}$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt eine Verdoppelungszeit $a \approx 70$ min.

c) Funktion: $B(t) = 100 \cdot 2^{\frac{1}{26} \cdot t}$



d)

①	
streng monoton steigend	☒

②	
B_0 und λ positiv sind	☒

Klassifikation

☒ Teil A☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 1 Zahlen und Maße
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge
- d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) –
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) –
- d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) –
- b) –
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) –

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) leicht
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 1
- b) 1
- c) 2
- d) 1

Thema: Biologie

Quellen: Fuchs, G. Allgemeine Mikrobiologie. Thieme Verlag, 2014
<http://book.bionumbers.org/> (Feb. 2016)
<http://www.textbookofbacteriology.net/> (Feb. 2016)