Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

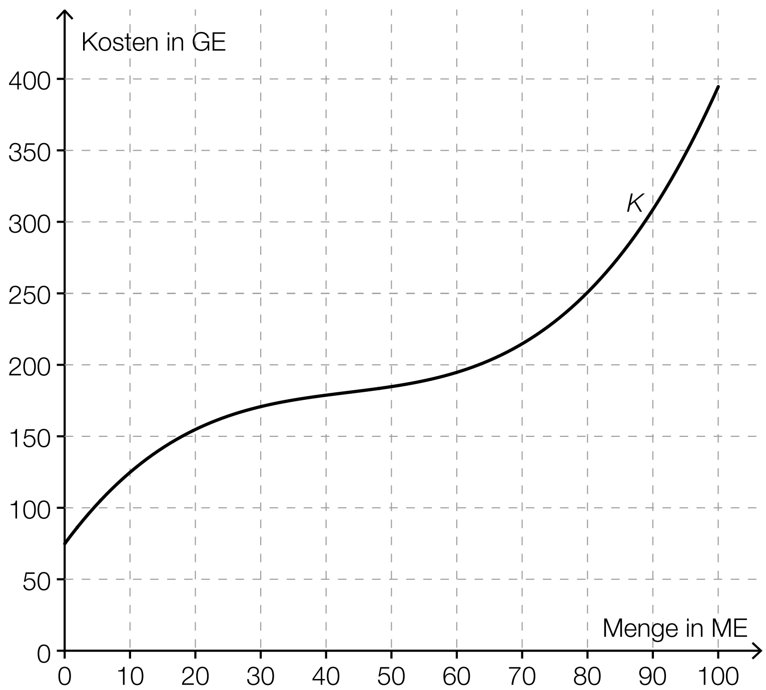
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



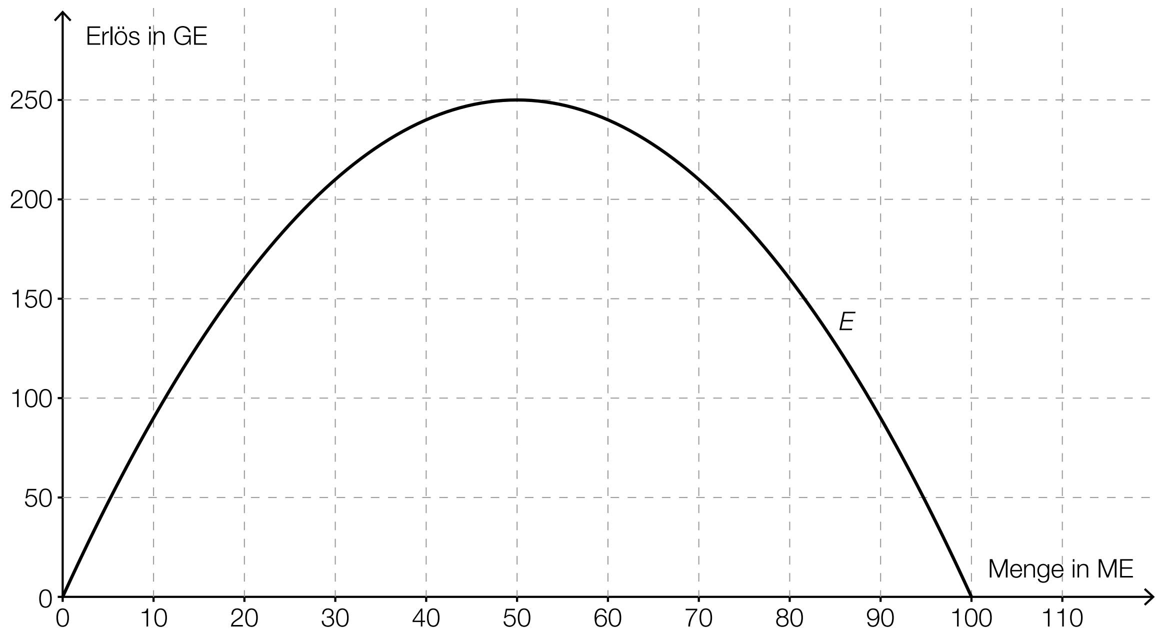
Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv.
Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}13 \cdot x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}13 - \frac{75}{x^2}$

$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{opt} = 72{,}19...$
Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$
minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\overline{K}(72{,}2) = 3{,}06...$
Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72{,}2) = 3{,}06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$E(100) = 0$
$E(50) = 250$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75)$
$G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 75$

$G(x) = 50$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 34{,}17...,\ x_2 = 58{,}42...$
Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung

Grenzkosten (1)*

Aufgabennummer: B_316

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

– Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$

x … Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei x ME in GE/ME

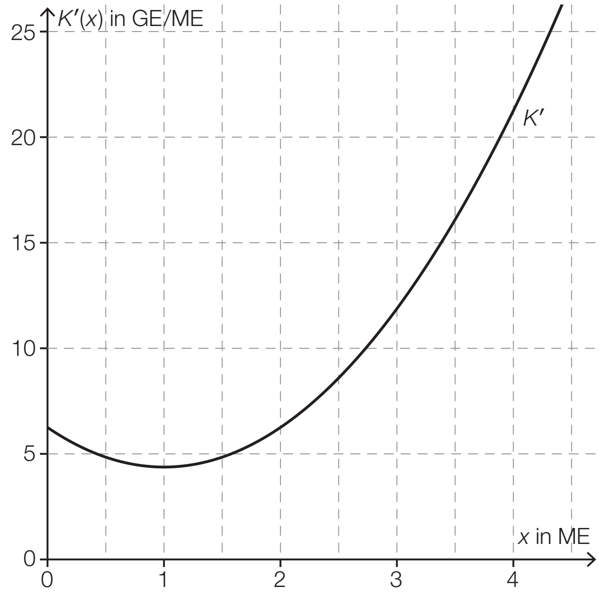
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2 372,50 GE.

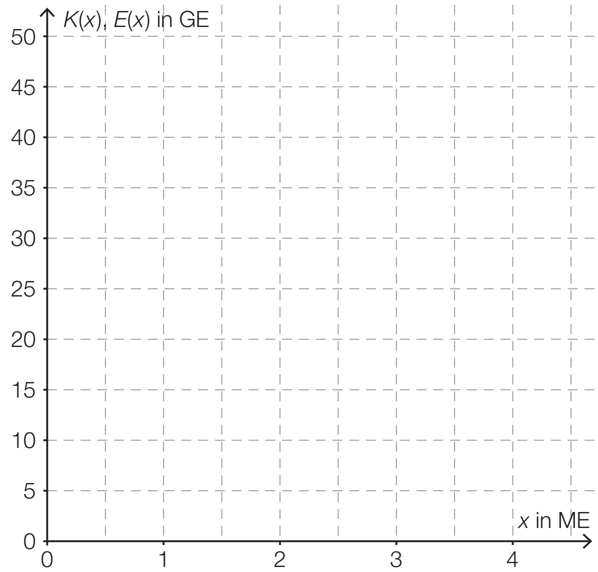
– Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Grenzkostenwert 1 060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1 060 GE führen wird.

$K'(20) = 1\,060$
$K'(50) = 7\,120$
$K'(60) = 10\,340$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) $K''(x) = 0{,}6 \cdot x - 4$

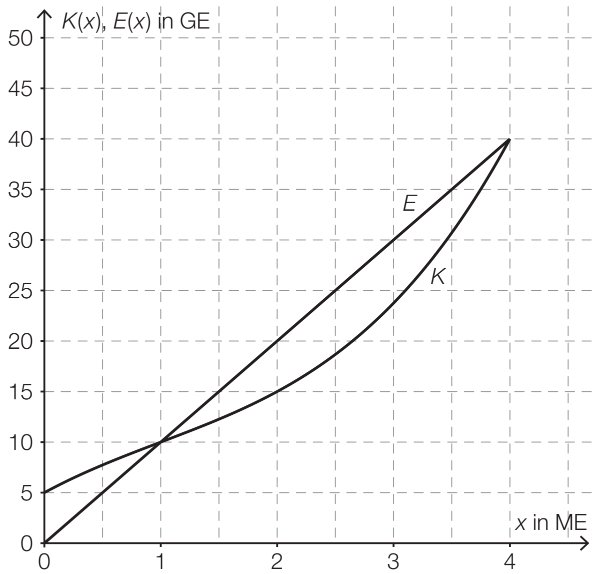
$0 = 0{,}6 \cdot x - 4 \;\Rightarrow\; x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$

Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

$\int (0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15)\,\mathrm{d}x = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$
$K(35) = 2\,372{,}50$:
$0{,}1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2\,372{,}50 \;\Rightarrow\; C = 10$

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten

c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall [0; 4]
1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall [0; 4] als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$

Grenzkosten und Grenzerlös*

Aufgabennummer: B_421

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}115 \cdot x^2 + 5{,}2 \cdot x + 50$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K, wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
– Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

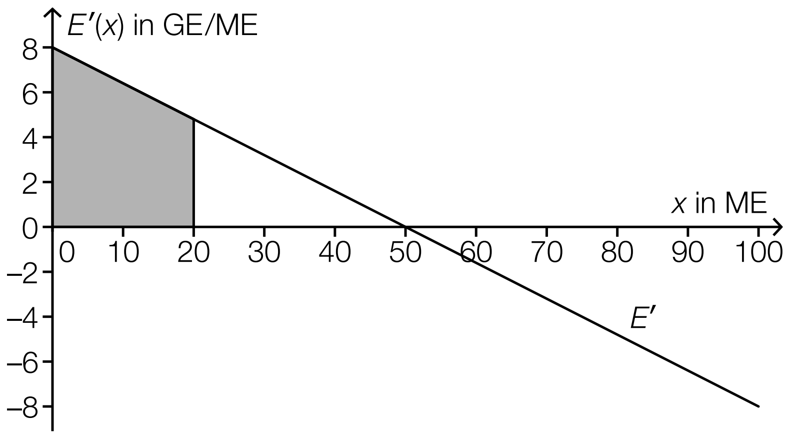
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

– Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



– Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123{,}75 - 116}{5} = \frac{7{,}75}{5} = 1{,}55$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall [20 ME; 25 ME] beträgt 1,55 GE/ME.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}23 \cdot x + 5{,}2$
$K'(20) = 1{,}8$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

b) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$

c) $E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$

$E'(20) = 4{,}8$

$A = \frac{(8 + 4{,}8) \cdot 20}{2} = 128$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.
Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 × B2: für die richtige Berechnung der Grenzkosten
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
1 × C1: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit
1 × C2: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang

Kosten*

Aufgabennummer: B_319

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

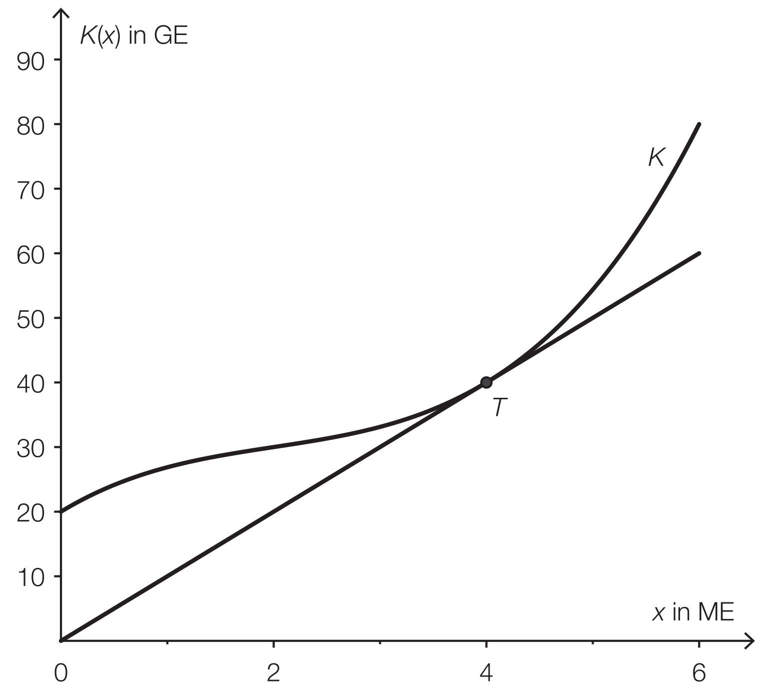
Kostenfunktionen geben den Zusammenhang zwischen der produzierten Menge und den dazugehörigen Gesamtproduktionskosten an.

a) Von einer kubischen Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kennt man folgende Eigenschaften:

(1) Die Fixkosten betragen 4 GE.
(2) Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 2 124 GE.
(3) Das Betriebsoptimum liegt bei 2 ME.
(4) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung dieser Kostenfunktion auf.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer anderen Kostenfunktion und die Tangente an diesen Graphen durch den Koordinatenursprung.



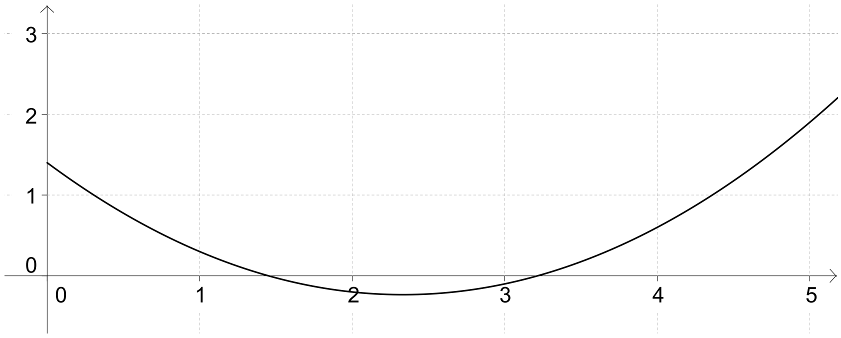
– Interpretieren Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Berührpunktes T und der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}6x^2 + 5x + 10$ für eine produzierte Menge von $0 \leq x \leq 6$ ME.

– Berechnen Sie die Kostenkehre.
– Geben Sie diejenigen Bereiche an, in denen der Kostenverlauf degressiv bzw. progressiv ist.

d) – Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in der nachstehenden Abbildung keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben kann.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

(1) $K(0) = 4$: $d = 4$

(2) $K(10) = 2\,124$: $2\,124 = 1\,000a + 100b + 10c + d$

(3) $\overline{K}'(2) = 0$: $0 = 4a + b - \frac{d}{4}$

(4) $\overline{K}(2) = 14$: $14 = 4a + 2b + c + \frac{d}{2}$

b) Die x-Koordinate des Berührpunktes T ist das Betriebsoptimum.
Die Steigung dieser Tangente ist die langfristige Preisuntergrenze.

c) $K''(x) = 0$: $0{,}6x - 1{,}2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Die Kostenkehre liegt bei 2 ME.

Der Kostenverlauf ist für $x < 2$ ME degressiv.
Der Kostenverlauf ist für $x > 2$ ME progressiv.

d) Der gegebene Funktionsgraph kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen von Gleichung (1) und (2)
1 × A2: für das richtige Aufstellen von Gleichung (3)
1 × A3: für das richtige Aufstellen von Gleichung (4)

b) 1 × C: für die richtige Interpretation der x-Koordinate und der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 × C: für die Angabe der richtigen degressiven und progressiven Bereiche

d) 1 × D: für die richtige Begründung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kreativ-Workshop*

Aufgabennummer: B_383

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In den kommenden Sommerferien möchte der Kulturverband einer Großstadt eine Kombination aus Ausstellungsbesuch, Malkurs und Mittagessen für Kinder anbieten.

Laut einer Umfrage würde dieses Angebot bei einem Preis von € 23 pro Kind für 1 050 Kinder gebucht werden. Bei einem Preis von € 27 pro Kind würde dieses Angebot für 990 Kinder gebucht werden.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage auf.

b) Die Preisfunktion der Nachfrage p für einen 2-tägigen Kreativ-Workshop ist erhoben worden:

$p(x) = -0{,}5 \cdot x + 220$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$p(x)$ ... Preis bei x Personen in € pro Person

– Berechnen Sie denjenigen Preis pro Person, bei dem 200 Personen zu erwarten sind.
– Geben Sie den Höchstpreis an.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

c) Bei einem Kreativ-Workshop fallen für den Veranstalter Kosten an, die sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben lassen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4800$

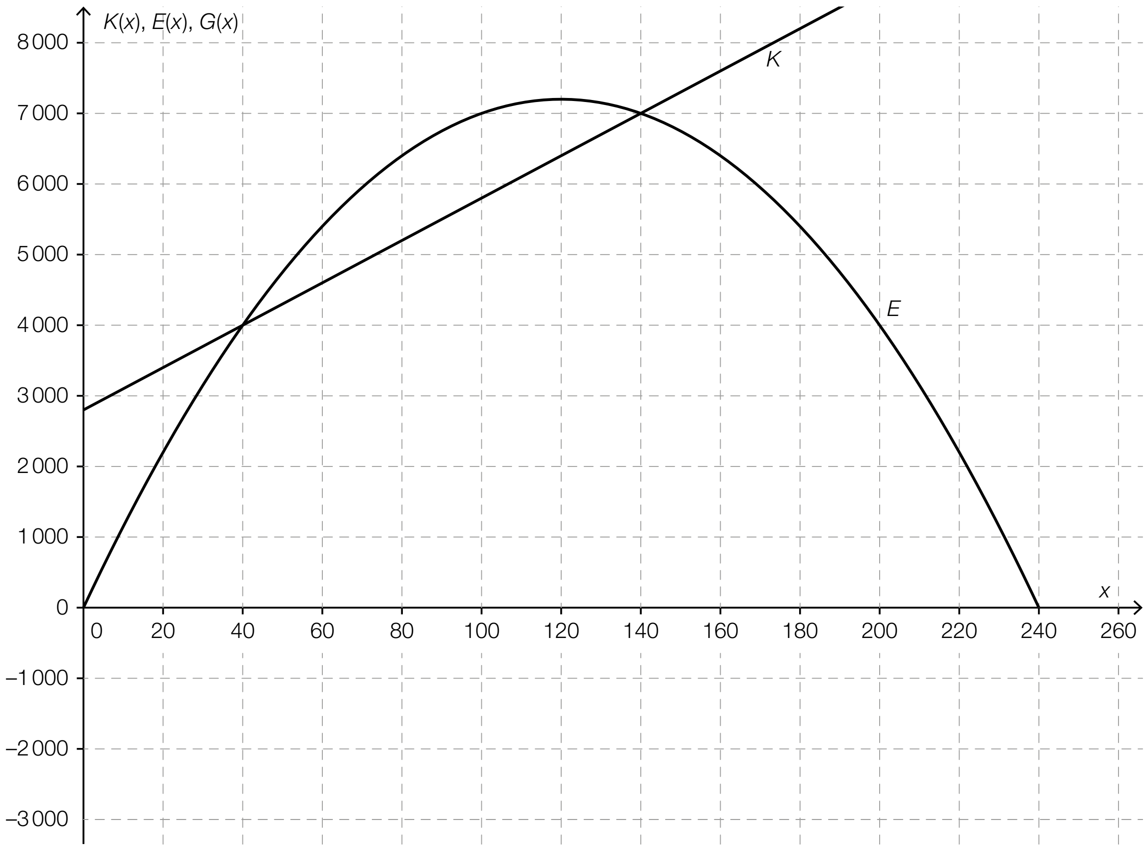
x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei x Personen in €

Der Preis für den Kreativ-Workshop beträgt € 129 pro Person.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei welcher Anzahl an teilnehmenden Personen für diesen Workshop der Break-even-Point erreicht wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen einer quadratischen Erlösfunktion E und einer linearen Kostenfunktion K.



– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall von 0 bis zur oberen Gewinngrenze in der obigen Abbildung ein.

– Beschreiben Sie, wie sich die beiden Gewinngrenzen verändern, wenn die Fixkosten steigen.

Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = k \cdot x + d$

x … Nachfragemenge
$p(x)$ … Preis bei der Nachfrage x in € pro Kind

$23 = k \cdot 1\,050 + d$
$27 = k \cdot 990 + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$k = -\frac{1}{15}$, $d = 93$
$p(x) = -\frac{1}{15} \cdot x + 93$

b) $p(200) = -0{,}5 \cdot 200 + 220 = 120$

Der Preis, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind, beträgt € 120 pro Person.

Der Höchstpreis beträgt € 220 pro Person.

$p(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{220}{0{,}5} = 440$

Die Sättigungsmenge liegt bei 440 Personen.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 129 \cdot x - (0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4\,800) = -0{,}01 \cdot x^2 + 94 \cdot x - 4\,800$

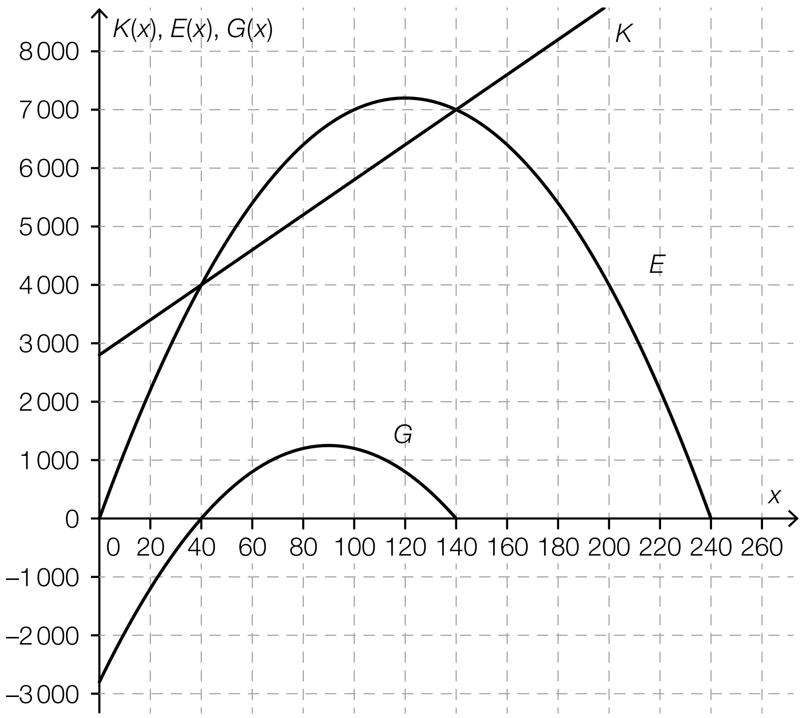
x … Anzahl der teilnehmenden Personen
$G(x)$ … Gewinn bei x Personen in €

$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x = 51{,}3\ldots$

Ab 52 teilnehmenden Personen wird Gewinn erzielt.

d) Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.



Die untere Gewinngrenze wird höher und die obere Gewinngrenze niedriger.

oder:

Der Gewinnbereich wird schmäler.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung der Preisfunktion der Nachfrage

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises pro Person, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind
1 × C: für das richtige Angeben des Höchstpreises
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Teilnehmerzahl, bei der der Break-even-Point erreicht wird

d) 1 × D: für die richtige mathematische Erklärung
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen (Graph einer quadratischen Funktion mit richtigem Ordinatenabschnitt und richtigen Nullstellen)
1 × C: für die richtige Beschreibung

Kunst und Kaffee*

Aufgabennummer: B_401

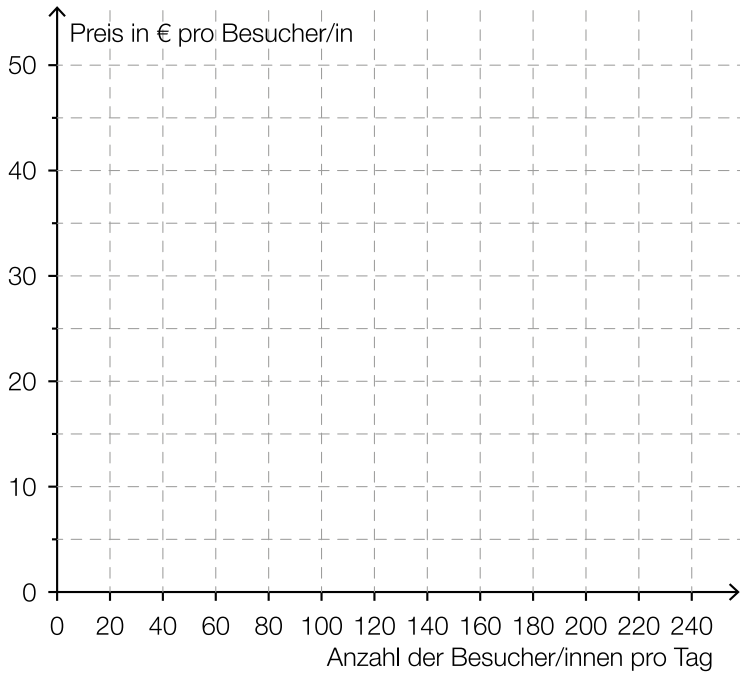
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Café-Restaurant in einer Kunsthalle bietet für die neue Ausstellung als zusätzliche Attraktion die Veranstaltung *Kunst und Kaffee* an. Nach einem gemütlichen Frühstück im Café-Restaurant kann man die Ausstellung besuchen und bezahlt für Frühstück und Ausstellungsbesuch nur einen Gesamtpreis.
Aus diesem Grund wird durch eine Befragung der Besucher/innen festgestellt, welcher Preis dafür verlangt werden kann.
Das Ergebnis dieser Befragung führt zu folgender linearer Preisfunktion der Nachfrage p:

$p(x) = -0{,}25 \cdot x + 45$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$p(x)$ ... Preis bei x Besucher/innen in € pro Besucher/in

a) – Zeichnen Sie den Graphen dieser linearen Preisfunktion der Nachfrage in der nachstehenden Abbildung ein.



– Markieren Sie in der obigen Abbildung die Sättigungsmenge.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie, um welchen Betrag der Preis reduziert werden muss, wenn man 10 Besucher/innen pro Tag mehr für dieses Angebot gewinnen möchte.

c) – Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts der Erlösfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Die täglichen Kosten, die dem Café-Restaurant für dieses Angebot entstehen, lassen sich durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 500$

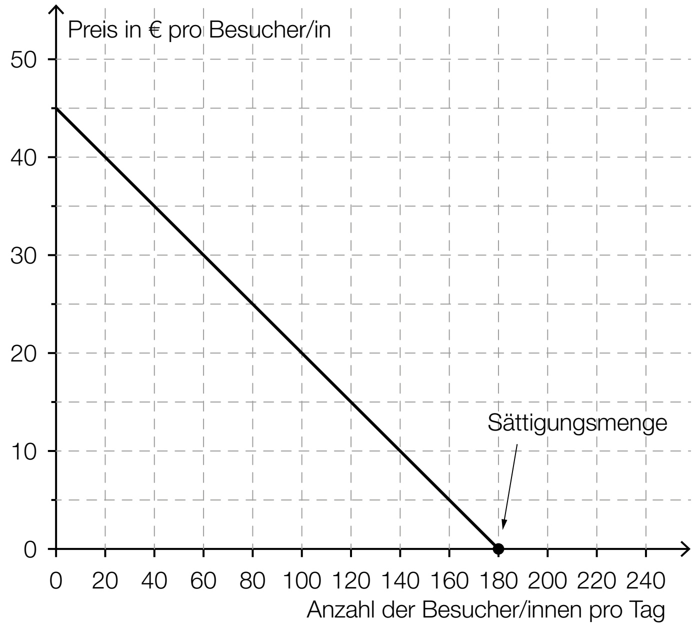
x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$K(x)$ ... tägliche Kosten bei x Besucherinnen und Besuchern in €

– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.
– Erklären Sie, warum die Stelle, an der der Gewinn maximal ist, nicht von den Fixkosten abhängt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Gemäß dem Modell steigt die Besucheranzahl um 1 Person pro Tag, wenn der Preis um € 0,25 pro Person reduziert wird (Steigung der Preisfunktion der Nachfrage). Daher muss der Preis um € 2,50 pro Person gesenkt werden, wenn man 10 Besucher/innen mehr pro Tag gewinnen möchte.

c) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}25 \cdot x^2 + 45 \cdot x$

x … Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$E(x)$ … Erlös bei x Besucherinnen und Besuchern in €

Die erste Koordinate des Scheitelpunkts gibt an, bei welcher Anzahl an Besucherinnen und Besuchern pro Tag der Erlös maximal ist, die zweite Koordinate gibt an, wie hoch dieser maximale Erlös ist.

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}3 \cdot x^2 + 33 \cdot x - 500$
Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$:
$-0{,}6 \cdot x + 33 = 0 \Rightarrow x = 55$
$G(55) = 407{,}50$

Der maximale Gewinn beträgt € 407,50 pro Tag.

Eine Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

oder:

Die Stelle des maximalen Gewinns ist die Nullstelle der 1. Ableitung der Gewinnfunktion. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der beim Bilden der 1. Ableitung wegfällt. Folglich haben sie auch keinen Einfluss auf die Stelle des maximalen Gewinns.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen
1 × C: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge

b) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Preisreduktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × D: für die richtige Erklärung

Lackproduktion*

Aufgabennummer: B_433

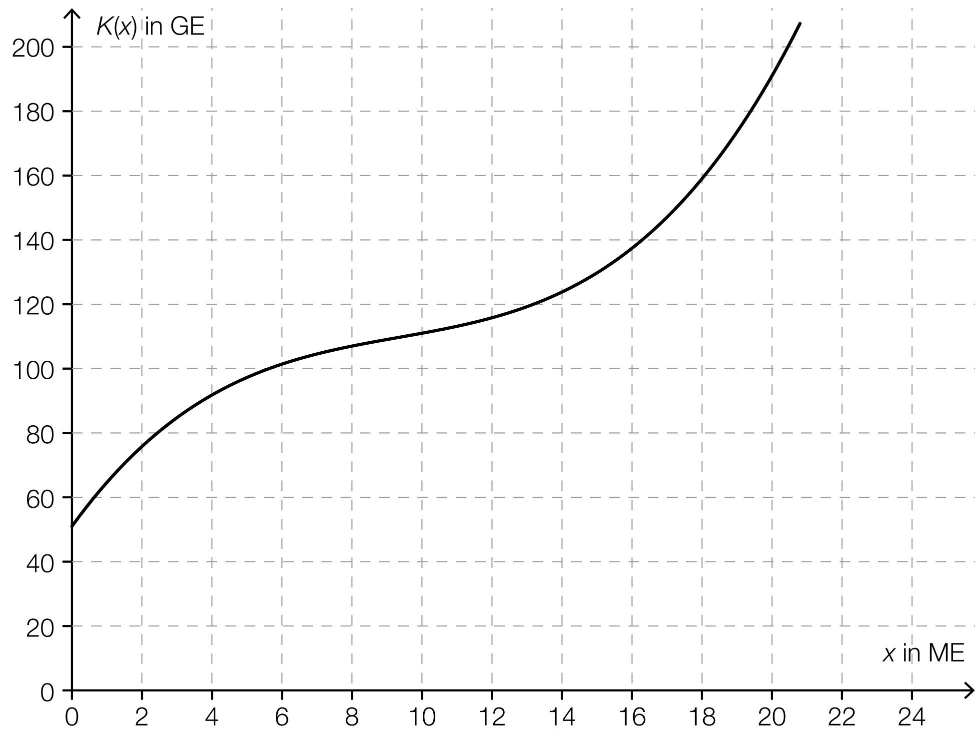
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt verschiedene Lacke her. Es wird die monatliche Produktion betrachtet.

a) Die Kosten für die Herstellung des Acryllacks *Ferrocolor* sollen durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Das Unternehmen hat dabei Fixkosten von 450 GE. Bei der Produktion von 8 ME liegt die Kostenkehre. Bei der Produktion von 8 ME betragen die Gesamtkosten 522 GE und die Grenzkosten 5 GE/ME.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten a, b, c und d ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

b) Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung des Lacks *VariColor* dargestellt.



Das Betriebsoptimum kann mithilfe des Graphen der Kostenfunktion K ermittelt werden, indem man diejenige Tangente an den Graphen von K einzeichnet, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die x-Koordinate des Berührpunkts ist das Betriebsoptimum.

– Ermitteln Sie grafisch mithilfe des obigen Diagramms das Betriebsoptimum.
– Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Holzschutzgrundierung *Pullex* wird der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge erhoben:

Absatzmenge x in ME	Preis $p_N(x)$ in GE/ME
10	16
12	13
15	12
17	9
19	8

– Ermitteln Sie mithilfe linearer Regression eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
– Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

d) Die Gewinnfunktion G für den Lack *Soloplast* ist gegeben durch:

$G(x) = -0{,}025 \cdot x^3 - 0{,}1 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 65$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

– Lesen Sie aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Lacks ab.
– Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Gewinnfunktion ändert, wenn die Fixkosten steigen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $K(0) = 450 \quad \Rightarrow \quad 450 = d$

II: $K(8) = 522 \quad \Rightarrow \quad 522 = 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + 450$

III: $K'(8) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 192 \cdot a + 16 \cdot b + c$

IV: $K''(8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 48 \cdot a + 2 \cdot b$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

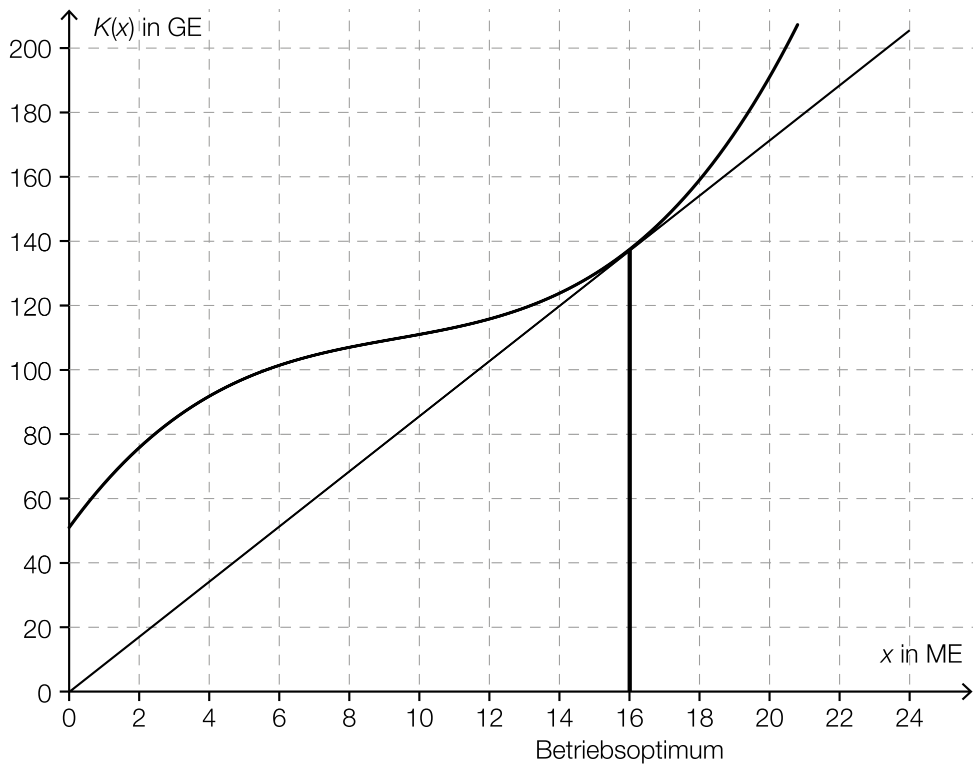
$a = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

$b = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

$c = 17$

$d = 450$

b)



grafische Ermittlung des Betriebsoptimums: 16 ME (Toleranzbereich: [15; 17])

Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze: $\frac{136\ \text{GE}}{16\ \text{ME}} = 8{,}5$ GE/ME

(Toleranzbereich: [8; 9])

c) Berechnung der Preisfunktion der Nachfrage mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}861 \cdot x + 24{,}169$ (Koeffizienten gerundet)

$E(x) = p_N(x) \cdot x$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 14{,}037...$
$E(14{,}037...) = 169{,}632...$
Der maximale Erlös beträgt rund 169,63 GE.

d) $G(0) = -F$

Die Fixkosten betragen 65 GE.

Wenn die Fixkosten steigen, wird der Graph der Gewinnfunktion nach unten verschoben.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktion K
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktionen K' und K''
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten a, b, c und d

b) 1 × A: für das richtige grafische Ermitteln des Betriebsoptimums
1 × B: für das richtige Ermitteln der langfristigen Preisuntergrenze

c) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung mithilfe linearer Regression
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses

d) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Fixkosten
1 × C2: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Graphen der Gewinnfunktion

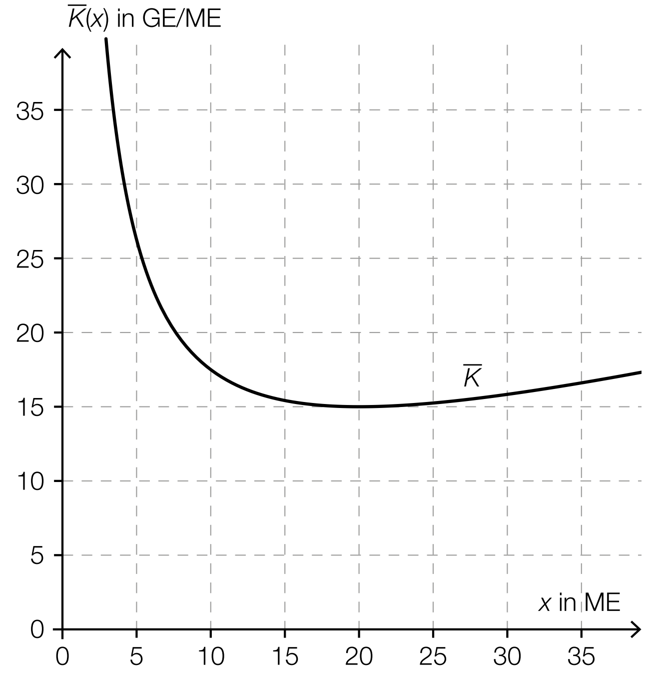
Lampenproduktion (1)*

Aufgabennummer: B_419

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ der Leuchte *Credas* dargestellt.



Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei x produzierten ME in GE/ME

– Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion K' in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.
– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
– Berechnen Sie die Fixkosten.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

c) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

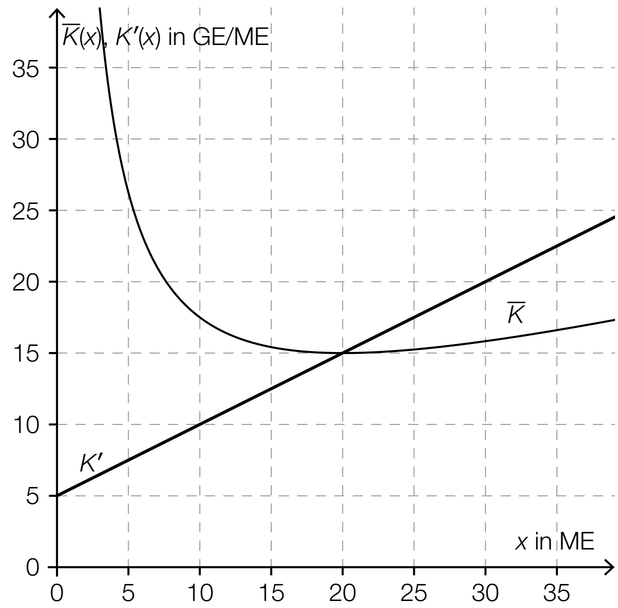
Es wird behauptet, dass die Extremstelle von G bei $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt.

– Zeigen Sie, dass diese Behauptung stimmt.
– Geben Sie an, welche Bedingung für den Koeffizienten a gelten muss, damit an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Betriebsoptimum: $x_{opt} = 20$ ME
Toleranzbereich: [18 ME; 22 ME]

$K(x) = \int (0{,}5 \cdot x + 5)\,dx =$
$= 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(20) = 20 \cdot 15 = 300$
$300 = 0{,}25 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20 + C$
$C = 100$

Die Fixkosten betragen 100 GE.

b) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0$:
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37{,}639\ldots$ ME $\approx 37{,}64$ ME,
$x_2 = 82{,}360\ldots$ ME $\approx 82{,}36$ ME

$G'(x) = 0$:
$0 = -0{,}1 \cdot x + 6$
$x = 60$
$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

c) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$\Rightarrow\ x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$

Es muss gelten: $a < 0$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzkostenfunktion
   1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [18 ME; 22 ME]
   1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (ohne Berechnung der Integrationskonstanten)
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Fixkosten

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
   1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gewinngrenzen
   1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns (Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist nicht erforderlich.)

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis
   1 × A: für das richtige Angeben der Bedingung

Produktion*

Aufgabennummer: B_220

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten eines Unternehmens $K(x)$ in GE für die Produktionsmenge x in ME angegeben. Die Fixkosten betragen 40 GE.

x in ME	2	5	9
$K(x)$ in GE	105	152	369

– Ermitteln Sie die Gleichung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K.
– Zeichnen Sie den Graphen dieser Kostenfunktion K im Intervall $0 \leq x \leq 10$.
– Lesen Sie aus dem Graphen denjenigen Bereich ab, in dem ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

b) – Beschreiben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze, wenn die Gesamtkostenfunktion bekannt ist.

c) Zur Gewinnermittlung für ein anderes Produkt verwendet das Unternehmen die folgende Kostenfunktion K sowie die folgende Erlösfunktion E:

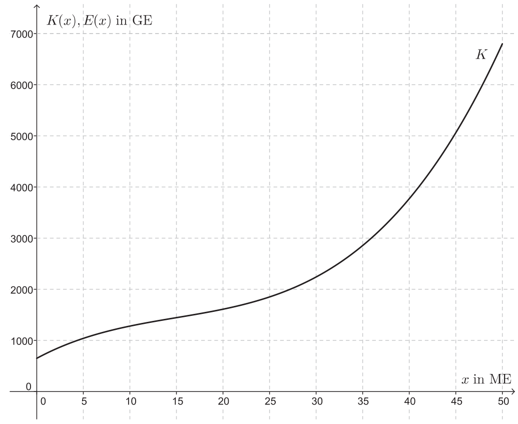
$K(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 55 \cdot x + 190$
$E(x) = 90 \cdot x$

x in ME
$K(x)$, $E(x)$ in GE

– Stellen Sie Funktionsgleichung der Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K eines weiteren Produktes dargestellt.

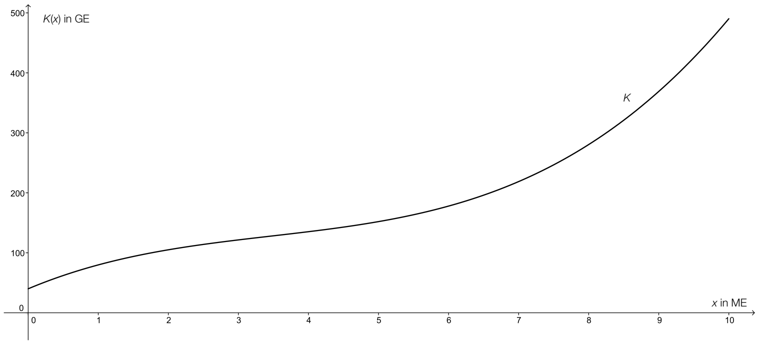


– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E bei einem Marktpreis von 100 GE/ME ein.
– Lesen Sie die beiden Gewinngrenzen ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}99 \cdot x^3 - 10{,}27 \cdot x^2 + 49{,}1 \cdot x + 40$

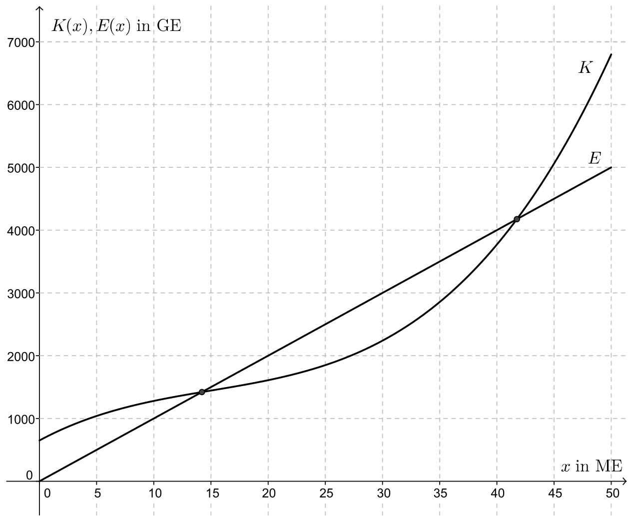


Im Bereich ab rund 3,5 ME liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.
Für die untere Grenze gilt folgender Ablesetoleranzbereich: [3; 4].

b) Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze:
– Bestimmung der variablen Stückkostenfunktion
– Stelle des Minimums der variablen Stückkostenfunktion berechnen (Betriebsminimum)
– Betriebsminimum in variable Stückkostenfunktion einsetzen
→ Ergebnis ist die kurzfristige Preisuntergrenze

c) $G(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 190$
maximaler Gewinn: 156,9 GE

d)



untere Gewinngrenze: ca. 14 ME, Ablesetoleranzbereich [12; 16]
obere Gewinngrenze: ca. 42 ME, Ablesetoleranzbereich [40; 44]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1 für die richtige Ermittlung der Gleichung
   1 × B2 für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen
   1 × C für das richtige Ablesen des Intervalls
b) 1 × C für die richtige Beschreibung der Berechnungsschritte
c) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
   1 × B für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
d) 1 × A für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
   1 × C für das richtige Ablesen der Gewinngrenzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

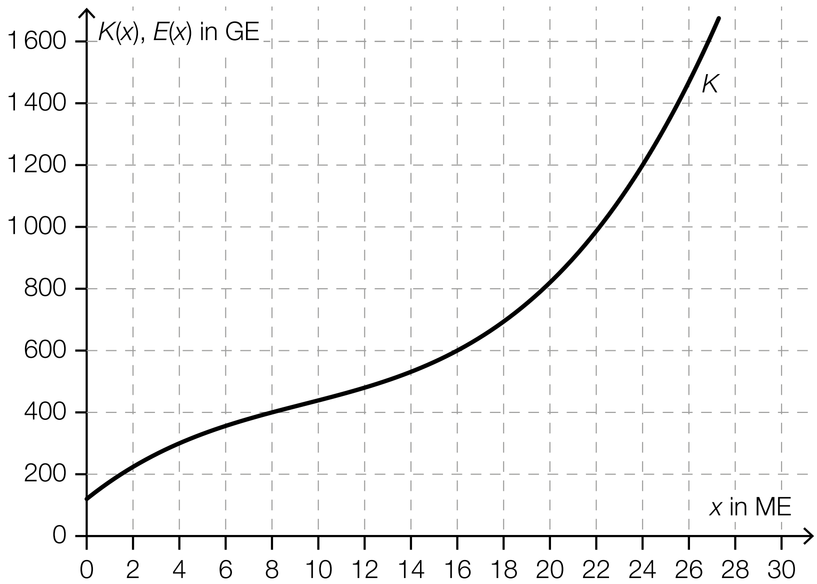
Rohrproduktion*

Aufgabennummer: B_089

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein.
– Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis.
– Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G.

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE		0	

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$

x … produzierte Menge in ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$.
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$E(10) = 15$
$E'(10) = -1{,}5$
$E''(10) = -0{,}6$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an. *[1 aus 5]*

$E(11) = 13{,}2$	☐
$E(11) = 13{,}5$	☐
$E(11) = 14{,}1$	☐
$E(11) = 16{,}2$	☐
$E(11) = 16{,}5$	☐

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$E(x) = -3{,}2 \cdot x \cdot (x - 25)$

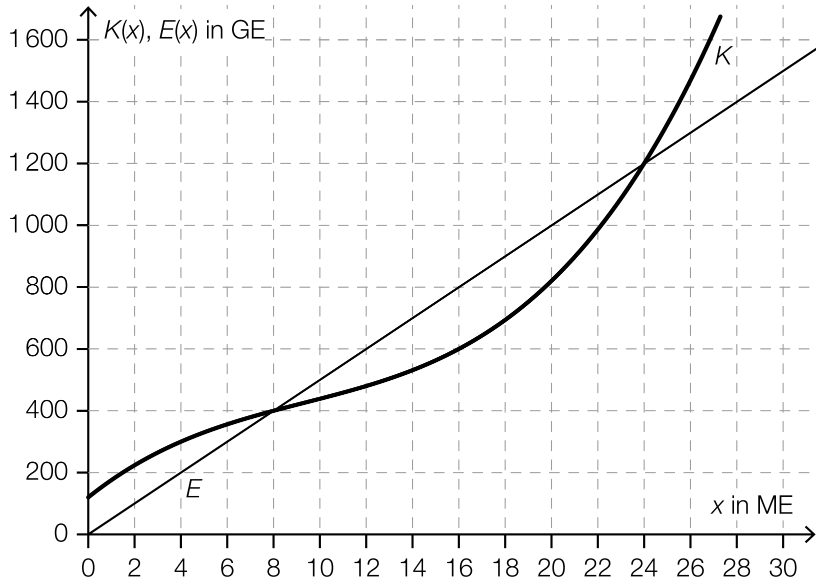
x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
– Ermitteln Sie den Höchstpreis.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Marktpreis: 50 GE/ME

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE	**–120**	0	**200**

Toleranzbereiche:
$G(0)$: [–180; –100]
$G(16)$: [150; 250]

b) $K(x) = \int \left(\frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60\right) \mathrm{d}x = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + F$

$K(16) = 600 \quad \Rightarrow \quad 600 = \frac{5}{32} \cdot 16^3 - \frac{35}{8} \cdot 16^2 + 60 \cdot 16 + F \quad \Rightarrow \quad F = 120$

$K(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 120$

$K''(x) = \frac{15}{16} \cdot x - \frac{35}{4}$

$K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28}{3}$

Die Kostenkehre liegt bei rund 9,33 ME.

c)

$E(11) = 13{,}2$	☒

d) $p_N(x) = -3{,}2 \cdot x + 80$

x ... Absatzmenge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der Absatzmenge x in GE/ME

Höchstpreis: 80 GE/ME

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × C: für das richtige Ermitteln des Marktpreises
1 × A2: für das richtige Ergänzen der fehlenden Werte in der Tabelle in den angegebenen Toleranzbereichen [–180; –100] bzw. [150; 250]

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre

c) 1 × A: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage
1 × C: für das richtige Ermitteln des Höchstpreises

Sportartikel*

Aufgabennummer: B_348		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$K(x) = 25 \cdot x + 300$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.
Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

– Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2 900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3 100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3 252,80 GE.
Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

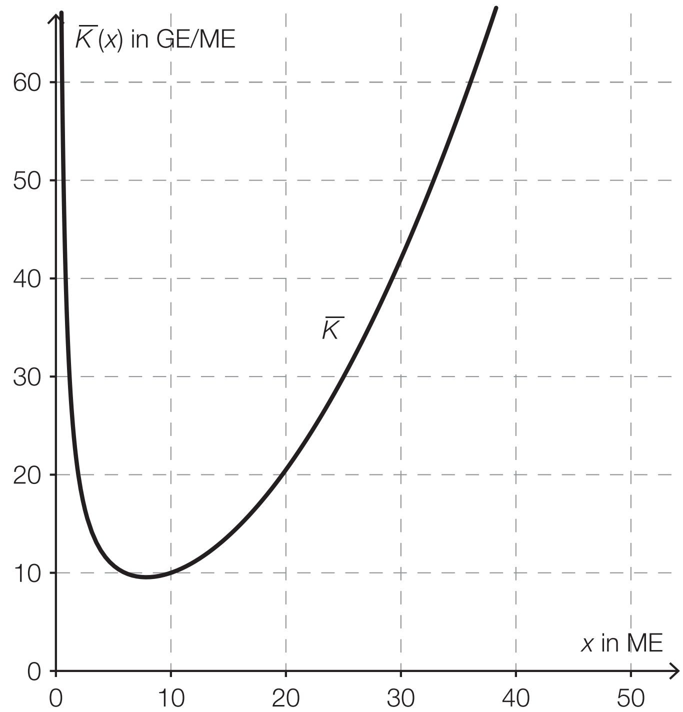
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 0{,}6 \cdot x + 5$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

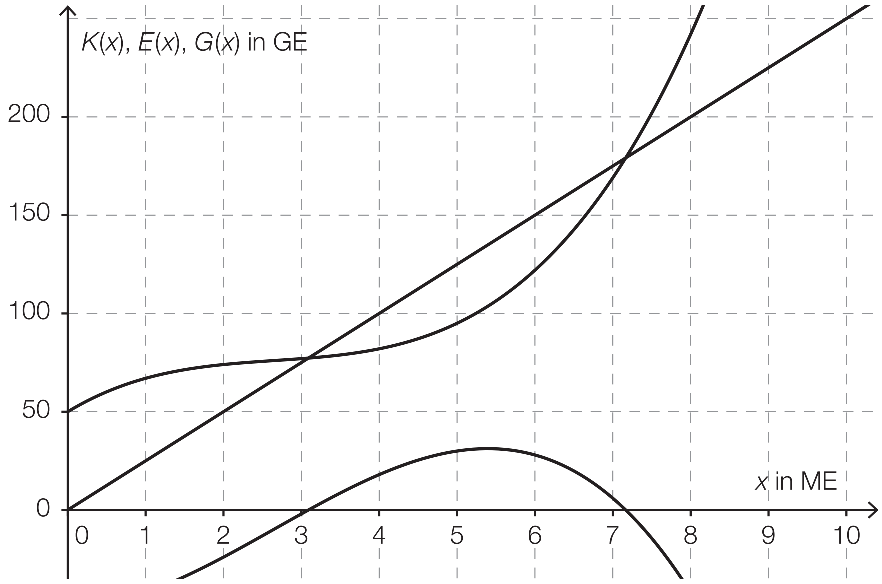
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

d) Die Graphen einer Kostenfunktion K, einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
– Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$
$G(50) = 450$
Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

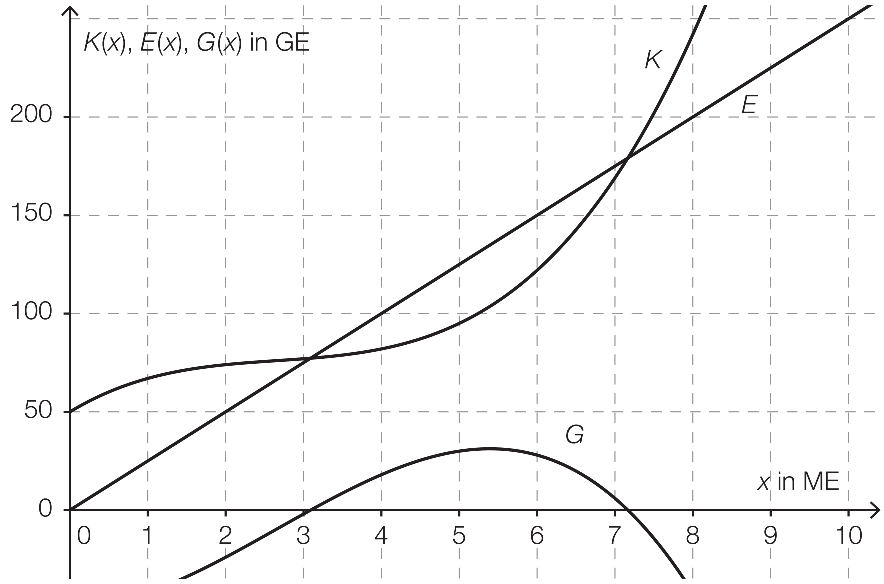
b) I. $K(0) = 2\,900$
II. $K''(5) = 0$
III. $K(5) = 3\,100$
IV. $K(9) = 3\,252{,}80$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}2$; $b = -3$; $c = 50$; $d = 2\,900$

c) $K(x) = \int K'(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(0) = 30 \;\Rightarrow\; C = 30$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME
Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]

d)



$E(x) = 25 \cdot x$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
(Auch eine Argumentation, dass die Gewinnfunktion keine lokalen Extremstellen hat, an denen die Tangentensteigung null ist, ist zulässig.)
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Information zur Kostenkehre
1 × A2: für das richtige Aufstellen der 3 Gleichungen mithilfe der Informationen zu den Kosten
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

c) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [7 ME; 9 ME]

d) 1 × C: für die richtige Beschriftung der 3 dargestellten Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion

USB-Sticks

Aufgabennummer: B_191

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt USB-Sticks auf den Markt.

a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne G in Abhängigkeit von der Absatzmenge x der Ware ermittelt:

x	0	10	20
$G(x)$	–1,4	6,4	1,4

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von x ME

Die Gewinnfunktion G wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Ermitteln Sie die Gleichung dieser Gewinnfunktion.
– Beschreiben Sie, was der Parameter c in Bezug auf die Kosten aussagt.
– Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

b) Die Erlösfunktion E beim Verkauf von USB-Sticks wird beschrieben mit:

$$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$$

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einem Absatz von x ME

– Ermitteln Sie den relevanten Definitionsbereich der Erlösfunktion.
– Erstellen Sie die Gleichung zur Berechnung der mittleren Änderungsrate der Erlösfunktion im Intervall [9; 15].
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Nachweis für ein lokales Maximum erbringt.

c) Ein spezieller Typ von USB-Sticks hat den Höchstpreis von 6 GE/ME und eine Sättigungsmenge von 18 ME.

– Kreuzen Sie diejenige Darstellung der Preisfunktion p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x an, die diese Kriterien erfüllt. *[1 aus 5]*

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) bei einem Absatz von x in ME

$p(x) = \frac{1}{3} \cdot (18 - 6x)$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{90} - \frac{x^3}{900}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.
Beachten Sie, dass die Funktionen – wie in der Wirtschaftsmathematik üblich – näherungsweise als stetig angenommen werden, obwohl es sich um diskrete Werte handelt.

Möglicher Lösungsweg

a) Mit Einsetzen in $G(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$G(0) = -1{,}4$: $c = -1{,}4$

$G(10) = 6{,}4$: $10^2a + 10b = 6{,}4 + 1{,}4$

$G(20) = 1{,}4$: $\underline{20^2a + 20b = 1{,}4 + 1{,}4}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}064 \quad b = 1{,}42 \quad c = -1{,}4$

Gewinnfunktion G mit: $G(x) = -0{,}064x^2 + 1{,}42x - 1{,}4$

$|c|$ gibt die Fixkosten an, die bei der Produktion der USB-Sticks anfallen.

Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion schneidet die x-Achse an 2 Stellen. Die erste (linke) Nullstelle von G markiert die Schwelle in den Gewinnbereich und heißt „Break-even-Point".

b) Der Erlös kann nicht negativ sein. Positive Funktionswerte liegen zwischen den beiden Nullstellen der Funktion.

Nullstellen der Erlösfunktion: $-1{,}25x^2 + 21x = 0$,

$x_1 = 0$ (untere Erlösgrenze), $x_2 = 16{,}8$ (obere Erlösgrenze) $\Rightarrow$ $D = [0; 16{,}8]$

mittlere Änderungsrate:

$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(15) - E(9)}{15 - 9}$

$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$

$E'(x) = -2{,}5x + 21 = 0$

$x = \frac{21}{2{,}5} = 8{,}4$

$E(8{,}4) = 88{,}2$

Der maximale Erlös beträgt 88,2 GE.

Diese Aufgabe kann auch nur mit Berechnung des Parabelscheitels ohne Differenzieren gerechnet werden, wenn erkannt wird, dass es eine nach unten geöffnete Parabel ist. Dieser Lösungsweg ist ebenfalls zulässig.

Zum Nachweis eines lokalen Maximums dient die 2. Ableitung der Funktion an der berechneten Extremstelle. Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ, dann liegt ein Maximum vor. (Hinweis: Die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion an der Extremstelle wird vorausgesetzt.)

c)

[...]	
[...]	
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Zahnpasta (2)*

Aufgabennummer: B_307

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In der Marketingabteilung eines Zahnpastaproduzenten stellt man fest, dass sich bei einem Preis von € 2,00 pro Tube täglich 500 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen.

– Beschreiben Sie, wie sich durch diese Preissenkung der Erlös ändert.

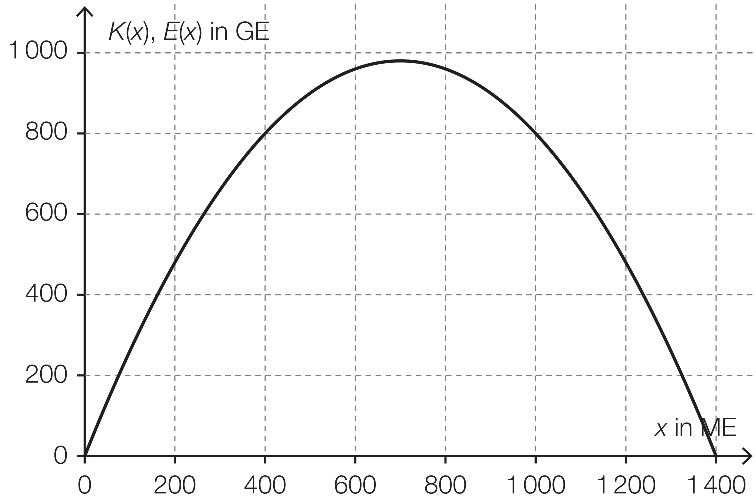
b) Bei einem Preis von € 2,00 pro Tube lassen sich täglich 500 Stück in einer bestimmten Region absetzen, bei einem Preis von € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,15.

Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro und der nachgefragten Menge x in Stück durch eine quadratische Funktion $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

– Stellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Erklären Sie, warum die Funktion nur im Intervall zwischen null und der Sättigungsmenge ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang liefert.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) In der nachstehenden Grafik ist die Erlösfunktion E eines Zahnpastaproduzenten dargestellt. Für die zugehörige lineare Kostenfunktion K gelten Fixkosten in Höhe von 400 GE und variable Kosten in Höhe von 0,5 GE/ME.



– Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K in die vorgegebene Grafik ein.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, bei welcher Menge der Gewinn maximal ist.

d) Aufgrund einer Lohnerhöhung steigen die Fixkosten.

– Begründen Sie, warum sich die gewinnmaximale Menge dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1\,000$
Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1{,}8 \cdot 600 = 1\,080$
Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

b) $p(0) = 3{,}15$: $3{,}15 = c$
$p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3{,}15$
$p(600) = 1{,}8$: $1{,}8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3{,}15$

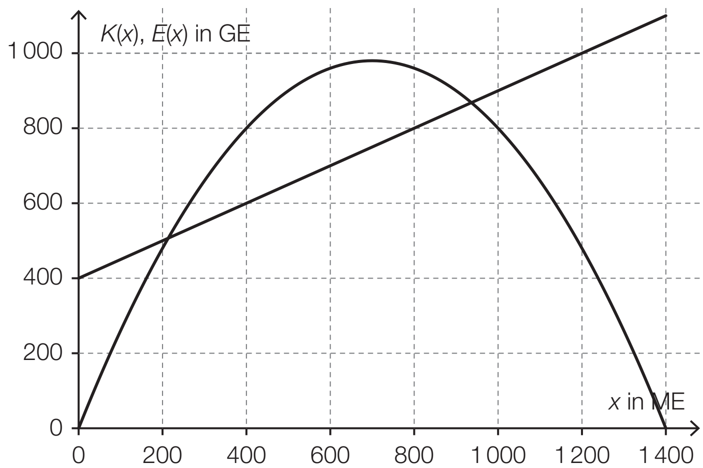
$a = 0{,}0000005$; $b = -0{,}00255$

$p(x) = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:
$0 = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$
$x_1 = 2\,100$; ($x_2 = 3\,000$)

Die Sättigungsmenge liegt bei 2 100 Tuben täglich.
Ein sinnvolles Intervall ist [0; 2 100], da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)
Toleranzbereich: [450; 650]
Achtung: $x = 700$ ist falsch!

d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzgewinns ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$
$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$G(x)$ ... Gewinn in GE
$E(x)$ ... Erlös in GE
$K_v(x)$ ... variable Kosten in GE
F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Erlösänderung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Bedingungen
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
1 × D: für die richtige Erklärung des Intervalls

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen der gewinnmaximalen Menge

d) 1 × D: für die richtige Begründung