Angry Birds (2)*

Aufgabennummer: A_242

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

a) Die Flugparabel des Vogels *Red* bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

– Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

b) Die Flugbahn des Vogels *Chuck* kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3|g(3))$.
– Veranschaulichen Sie die Flugbahn von Chuck vom Abschusspunkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt mithilfe einer geeigneten Grafik.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Flugbahn des Vogels *Matilda* kann durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.
Der Funktionsgraph schneidet die vertikale Achse bei 12. Er verläuft durch die Punkte $A = (1|16)$ und $B = (5|32)$. A ist ein Hochpunkt des Funktionsgraphen.

– Stellen Sie mithilfe der angegebenen Informationen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

d) Bei einem anderen Angriff durch den Vogel Matilda kann die Flugbahn durch den Graphen der Funktion h beschrieben werden.

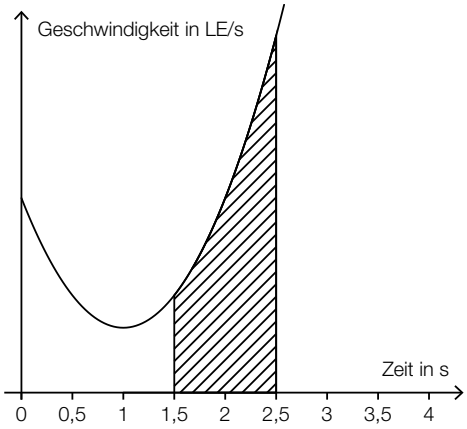
$h(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 8$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$h(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Ein Schwein befindet sich im Punkt $P = (5|20)$.

– Berechnen Sie den Abstand des Schweins vom Abschusspunkt.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt.

e) Die nachstehende Grafik stellt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Vogels bei einem Wurf dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Grafik eingezeichneten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

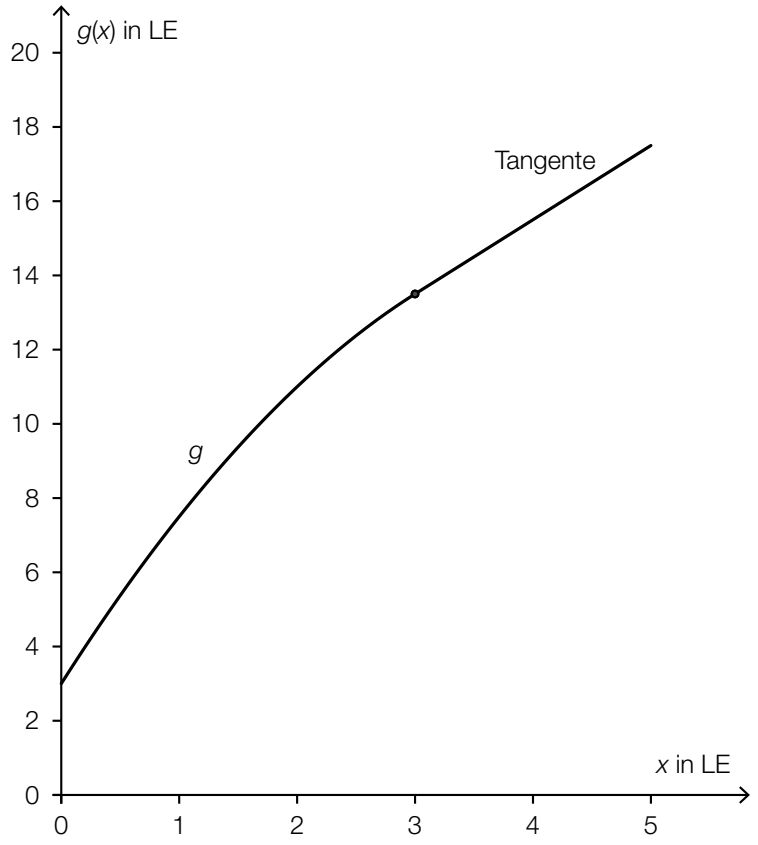
Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1)$
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

b) $g(3) = 13{,}5$
$g'(x) = -x + 5 \;\Rightarrow\; g'(3) = 2$
$13{,}5 = 2 \cdot 3 + d \;\Rightarrow\; d = 7{,}5$
Tangentengleichung: $y = 2 \cdot x + 7{,}5$



c) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $f(0) = 12$
II: $f(1) = 16$
III: $f(5) = 32$
IV: $f'(1) = 0$

d) Koordinaten des Abschusspunkts: $A = (0|8)$
Position des Schweins: $P = (5|20)$

$\sqrt{5^2 + (20 - 8)^2} = 13$

Der Abstand des Schweins vom Abschusspunkt beträgt 13 LE.

$h(5) = 18$

Der Punkt P liegt nicht auf Matildas Flugbahn.

e) Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den vom Vogel zurückgelegten Weg im Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] nach dem Abschuss.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der horizontalen Entfernung

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Tangentengleichung
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Flugbahn
(für $0 \leq x \leq 3$ Graph von g, für $3 \leq x \leq 5$ Tangente)

c) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Abstands
1 × D: für die richtige Überprüfung, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt

e) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Bezugnahme auf das Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Betonschutzwand

Aufgabennummer: A_171

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

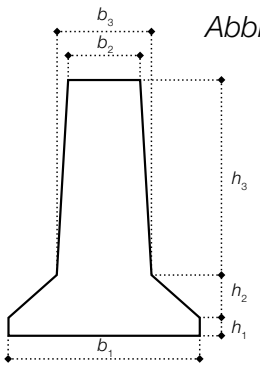
Zur Sicherung von Baustellen auf den Straßen werden verschiedene Betonschutzwände eingesetzt.

a) Der Querschnitt einer Betonschutzwand ist in der Abbildung 1 dargestellt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der Querschnittsfläche.

$A =$ _____

Abbildung 1



b) Die Abbildung 2 zeigt den Querschnitt einer anderen Betonschutzwand.

$$h(x) = \frac{1}{11\,560} \cdot x^4 - \frac{1}{85} \cdot x^3 + \frac{2}{5} \cdot x^2 \text{ mit } 0 \leq x \leq 68$$

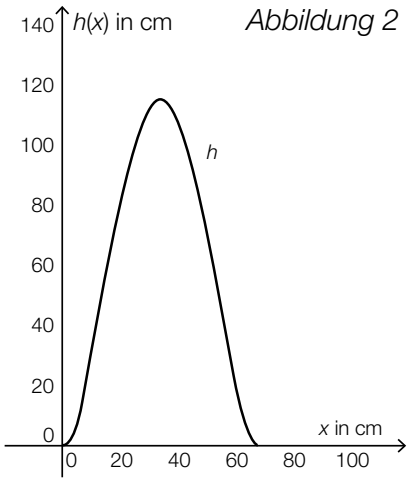
x, $h(x)$ … Koordinaten in cm

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche dieser Betonschutzwand.

Die Betonschutzwand hat eine Länge von 4 m und eine Dichte von 2 400 kg/m³ (Masse = Dichte × Volumen).

– Berechnen Sie die Masse dieser Betonschutzwand in Tonnen.

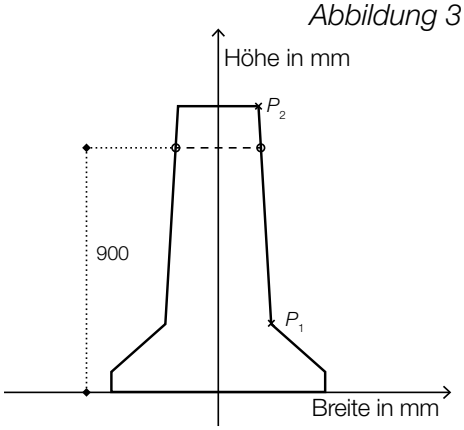
Abbildung 2



c) Bei einem Element einer Betonschutzwand wird in einer Höhe von 900 mm eine waagrechte Bohrung gemacht (siehe Abbildung 3). Die rechte Begrenzungslinie der zur y-Achse symmetrischen Querschnittsfläche geht durch die Punkte $P_1 = (200|255)$ und $P_2 = (150|1\,070)$.

– Berechnen Sie die Breite des Elements in 900 mm Höhe.

Abbildung 3



d) Auf einer Baustelle stehen zwei verschieden lange Elemente A und B der Betonschutzwände zur Verfügung. Für die Abgrenzung der Baustelle mit einer Länge von 70 m können entweder 14 Elemente A und 10 Elemente B oder 7 Elemente A und 15 Elemente B verwendet werden.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Längen der Elemente A und B auf.
– Berechnen Sie die Längen der Elemente A und B.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = b_1 \cdot h_1 + \frac{b_1 + b_3}{2} \cdot h_2 + \frac{b_2 + b_3}{2} \cdot h_3$

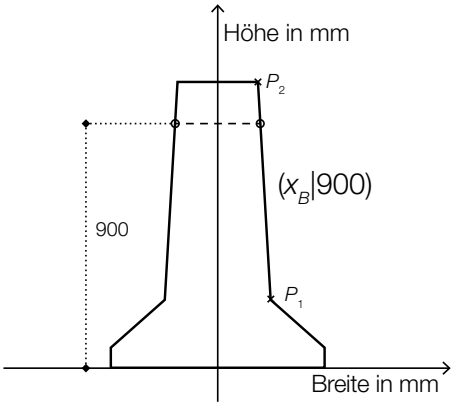
b) $A = \int_0^{68} h(x)\,\mathrm{d}x$

$A = 4\,192{,}4\ldots\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}41924\ldots\ \mathrm{m}^2$
$m = V \cdot \rho = 0{,}41924\ldots \cdot 4 \cdot 2{,}4 = 4\,024{,}72\ldots\ \mathrm{kg}$
$m \approx 4\ \mathrm{t}$

Die Masse dieser Betonschutzwand beträgt rund 4 t.

c) lineare Funktion g durch die Punkte P_1 und P_2:
$g(x) = k \cdot x + d$
$\left.\begin{array}{l} 255 = k \cdot 200 + d \\ 1\,070 = k \cdot 150 + d \end{array}\right\} \Rightarrow k = -16{,}3;\ d = 3\,515$
$g(x) = -16{,}3 \cdot x + 3\,515$
$900 = -16{,}3 \cdot x_B + 3\,515 \Rightarrow x_B = 160{,}429\ldots$
$2 \cdot x_B = 320{,}858\ldots$

Die Breite auf einer Höhe von 900 mm beträgt rund 321 mm.



d) L_A … Länge des Elements A in m
L_B … Länge des Elements B in m

I: $14 \cdot L_A + 10 \cdot L_B = 70$
II: $7 \cdot L_A + 15 \cdot L_B = 70$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$L_A = 2{,}5\ \mathrm{m}$
$L_B = 3{,}5\ \mathrm{m}$

Die Länge des Elements A beträgt 2,5 m und die Länge des Elements B beträgt 3,5 m.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Brückenbögen

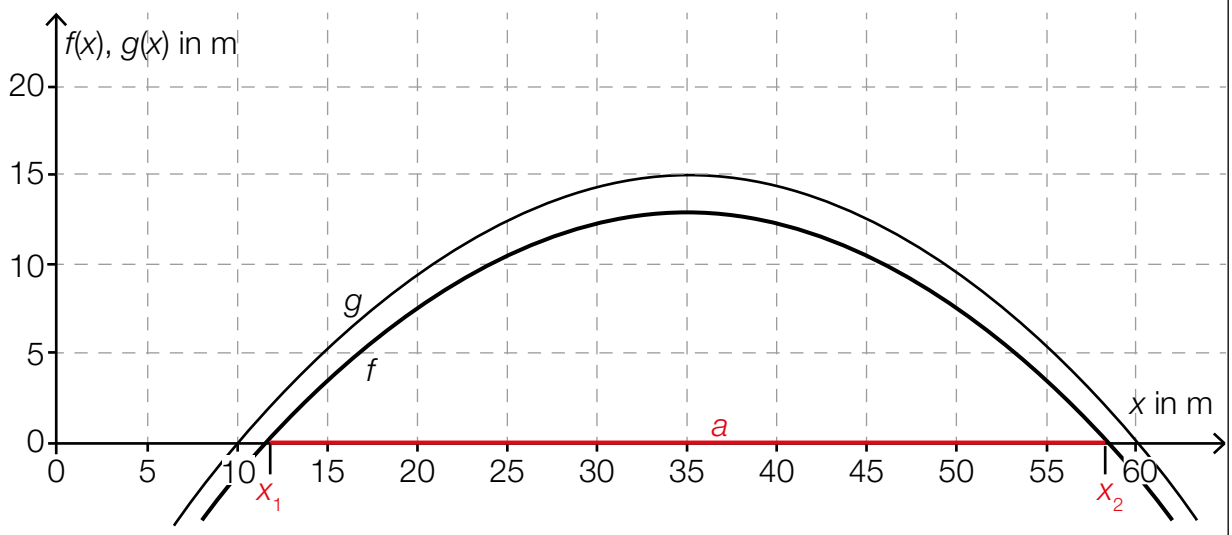
Aufgabennummer: A_216

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der innere Teil eines Brückenbogens kann durch die Funktion f beschrieben werden. Der äußere Teil des Brückenbogens kann durch die Funktion g beschrieben werden.

$$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5}$$

x, $f(x)$, $g(x)$ … Koordinaten in m



a) – Berechnen Sie die Spannweite a (siehe obige Grafik) des inneren Teils des Brückenbogens.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt des inneren Teils des Brückenbogens.

b) – Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Steigungswinkel des inneren Teils des Brückenbogens an einer beliebigen Stelle x_0 ermitteln kann.

c) Der äußere Teil des Brückenbogens verläuft so, dass der senkrechte Abstand zum inneren Brückenbogen in jedem Punkt 2 m beträgt.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf, die den äußeren Teil des Brückenbogens beschreibt.

Der Flächeninhalt zwischen den beiden Teilen des Brückenbogens und der x-Achse soll berechnet werden.

– Kreuzen Sie diejenige Formel an, die zur Berechnung dieses Flächeninhalts verwendet werden kann. *[1 aus 5]*

$\int_{10}^{60} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{10}^{60} g(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnen der Nullstellen:

$$-\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5} = 0$$

$x_1 = 11{,}726...$; $x_2 = 58{,}273...$
$a = x_2 - x_1 = 46{,}547... \approx 46{,}55$ m

Der höchste Punkt ist der Scheitelpunkt des Graphen von f. Da die Parabel symmetrisch bezüglich S ist, liegt die x-Koordinate des Scheitels genau zwischen den beiden Nullstellen.
$x_S = 35$; $f(x_S) = 13$
$S = (35|13)$

b) Die 1. Ableitung der Funktion f wird ermittelt.
x_0 wird in die 1. Ableitung eingesetzt und man erhält die Steigung k an der Stelle x_0.
Der Steigungswinkel ist der Arcustangens der Steigung k.

c) $g(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{72}{5}$

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Buchsbäume*

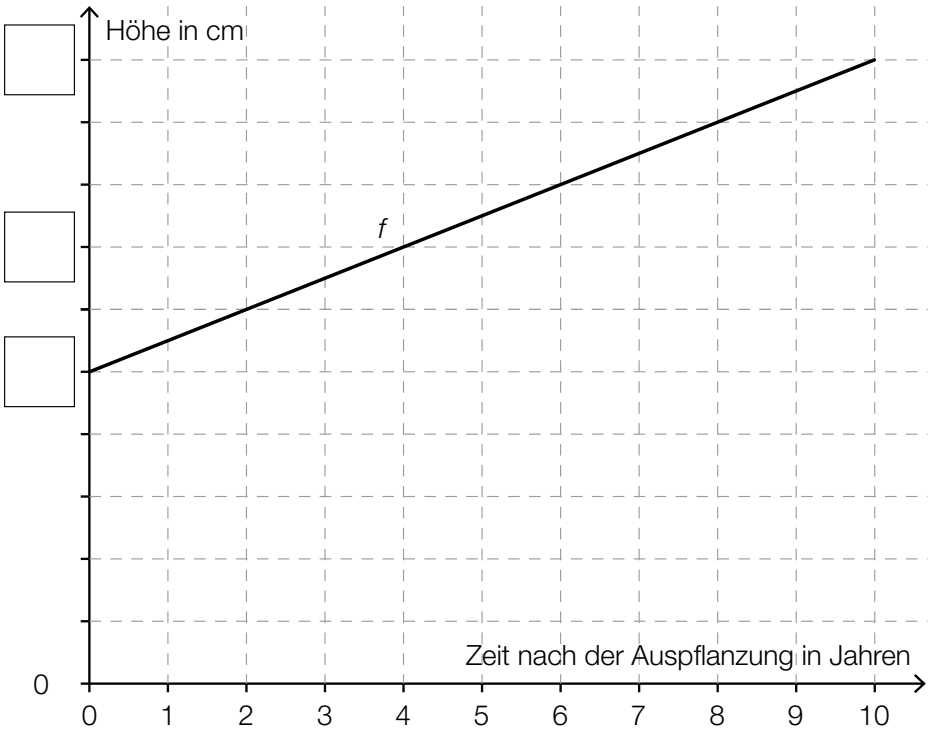
Aufgabennummer: A_186

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Buchsbäume werden in verschiedenen Sorten mit unterschiedlichem Höhenwachstum angeboten.

a) Ein bestimmter Buchsbaum der Sorte *A* wuchs in den ersten 10 Jahren nach der Auspflanzung jeweils 3 cm pro Jahr. 4 Jahre nach der Auspflanzung hatte der Buchsbaum eine Höhe von 42 cm. Die Höhe des Buchsbaums in Abhängigkeit von der Zeit nach der Auspflanzung wird durch eine lineare Funktion *f* beschrieben. Der Graph dieser Funktion ist im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt. Dabei fehlt die Skalierung der vertikalen Achse.

– Tragen Sie die fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

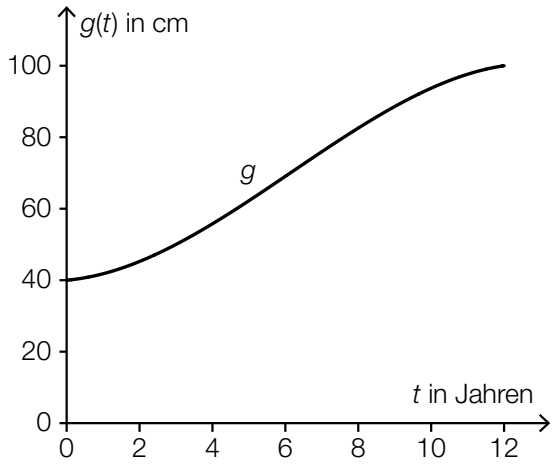


* ehemalige Klausuraufgabe

b) In den ersten 12 Jahren nach der Auspflanzung kann die Höhe eines Buchsbaums der Sorte *B* näherungsweise durch die Funktion *g* beschrieben werden:

$g(t) = -0{,}053 \cdot t^3 + 0{,}98 \cdot t^2 + 0{,}872 \cdot t + 40$ mit $0 \leq t \leq 12$

t ... Zeit nach der Auspflanzung des Buchsbaums in Jahren
g(*t*) ... Höhe des Buchsbaums zur Zeit *t* in cm

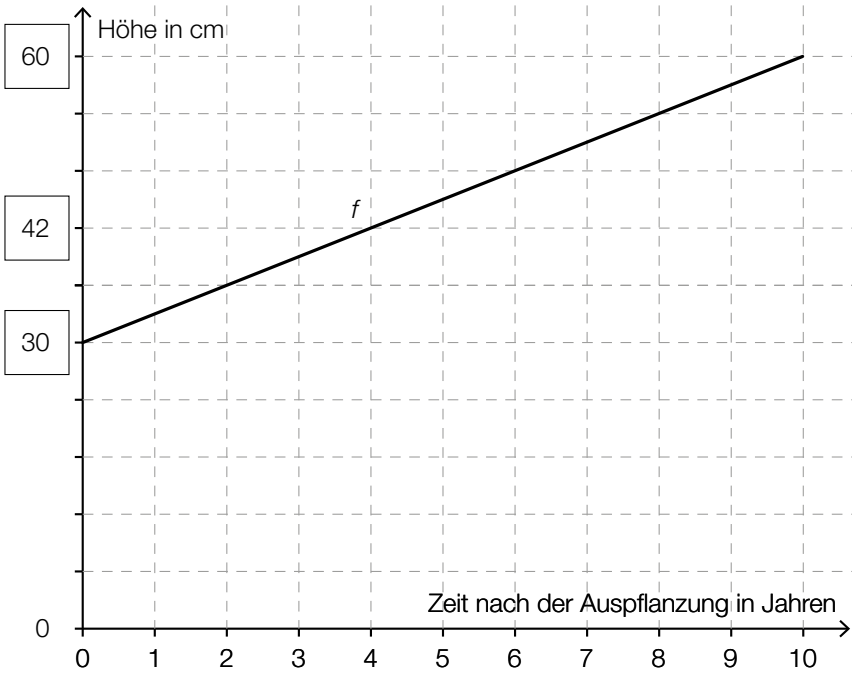


– Berechnen Sie den Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums.
– Beschreiben Sie, was mit folgendem Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$g(5) - g(0)$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums: $g''(t) = 0$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}16... \approx 6{,}2$

Etwa 6,2 Jahre nach der Auspflanzung ist das Höhenwachstum am größten.

Mit dem Ausdruck $g(5) - g(0)$ wird der (absolute) Höhenzuwachs in cm in den ersten 5 Jahren nach der Auspflanzung berechnet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Werte

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des stärksten Höhenwachstums
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle das stärkste Höhenwachstum vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang

Flussläufe und Pegelstände*

Aufgabennummer: A_266

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Während eines Hochwassers wurde über den Zeitraum von einer Woche der Pegelstand eines Flusses ermittelt. Den Messergebnissen zufolge kann der zeitliche Verlauf des Pegelstands näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden:

$p(t) = -3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 0{,}011 \cdot t + 7{,}661$ mit $0 \leq t \leq 168$

t ... Zeit in h
$p(t)$ ... Pegelstand zur Zeit t in m

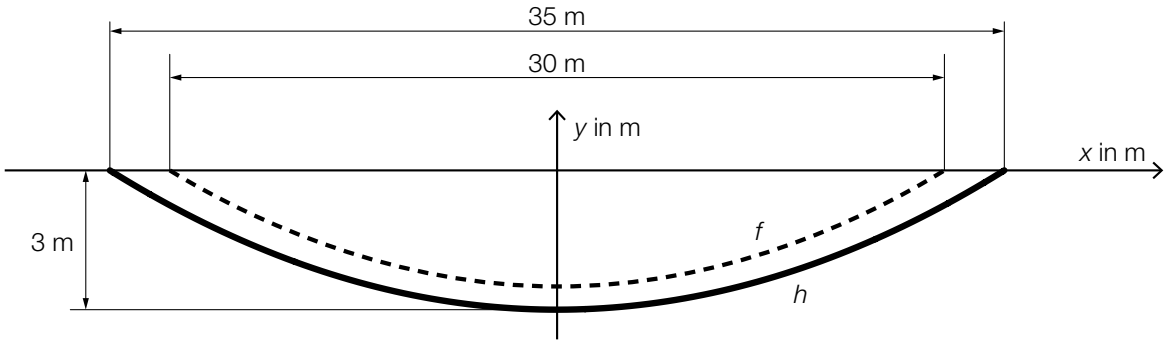
– Berechnen Sie die Abweichung des höchsten Pegelstands während des Hochwassers vom „üblichen“ Pegelstand von 2,5 m.

Zur Zeit t_1 gilt: $p''(t_1) = 0$

– Interpretieren Sie die Bedeutung von t_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einem annähernd geradlinig verlaufenden Abschnitt eines Flusses soll das Flussbett verbreitert und vertieft werden. In der nachstehenden Abbildung ist das Flussbett im Querschnitt dargestellt.



f ... Profillinie des ursprünglichen Flussbetts
h ... Profillinie des neuen Flussbetts

f und *h* sind Polynomfunktionen 2. Grades mit zur *y*-Achse symmetrischen Graphen.

Ein Teilstück des Flussbetts mit der Länge *L* (in m) wird ausgebaggert.

– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$2 \cdot \left| \int_0^{17,5} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \cdot L$
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Funktion *h*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Hochpunkts H von p im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$p'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (110{,}52... \mid 9{,}41...)$
Abweichung: $9{,}41... - 2{,}5 = 6{,}91...$
Die Abweichung betrug rund 6,9 m.

Zur Zeit t_1 ist der Pegelstand am stärksten gestiegen.

b) Mit dem Ausdruck wird das Volumen des dabei anfallenden Aushubs in m^3 berechnet.

$h(x) = a \cdot x^2 + b$
$h(0) = -3$
$h(17{,}5) = 0$

oder:

$-3 = a \cdot 0^2 + b$
$0 = a \cdot 17{,}5^2 + b$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h(x) = \frac{12}{1\,225} \cdot x^2 - 3$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung des höchsten Pegelstands vom „üblichen“ Pegelstand
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit
1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

Fußballspielen im Park*

Aufgabennummer: A_250

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

– Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \Rightarrow x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \Rightarrow x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

$h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \Rightarrow x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04\ldots \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}10\ldots \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89\ldots \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Definitionsbereichs (Die untere Grenze des Definitionsbereichs $x_1 = 0$ muss nicht explizit angegeben sein.)
1 × B: für die richtige Berechnung des höchsten Punktes (beide Koordinaten)
(Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle

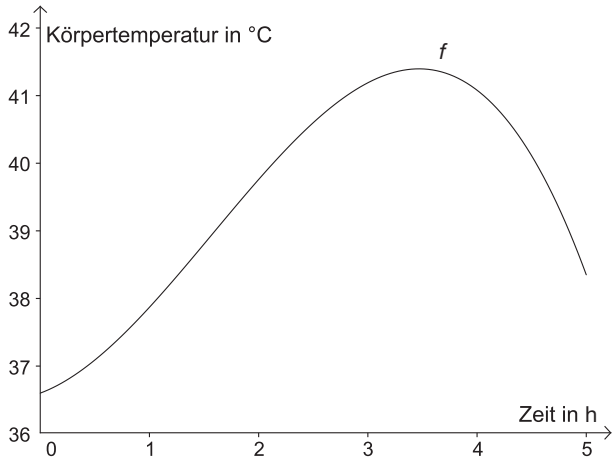
c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

Ganzkörperhyperthermie*

Aufgabennummer: A_158

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) – Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) – Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.
– Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) – Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme.

d) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

– Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Intervall [0; 5].

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 0{,}429\ldots \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c) Die stärkste Temperaturzunahme erfolgt an der Maximumstelle von f':
$f''(t) = -1{,}08t + 1{,}7$
$-1{,}08t + 1{,}7 = 0 \Rightarrow t = 1{,}57\ldots \approx 1{,}6$

Rund 1,6 Stunden nach Beginn der Therapie ist die Temperaturzunahme am größten.

d) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55\ldots \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunktes
b) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der maximalen Körpertemperatur
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Extremwert der maximalen Körpertemperatur entspricht. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 2. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)
1 × D: für die richtige Begründung
c) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermittlung der Wendestelle)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Zeitpunktes der maximalen Temperaturzunahme
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Stelle der maximalen Temperaturänderung eine Temperaturzunahme vorliegt. Daher ist eine rechnerische Überprüfung, ob an der berechneten Stelle eine Zu- oder Abnahme erfolgt, nicht erforderlich.)
d) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Körpertemperatur

Im Möbelhaus*

Aufgabennummer: B_427

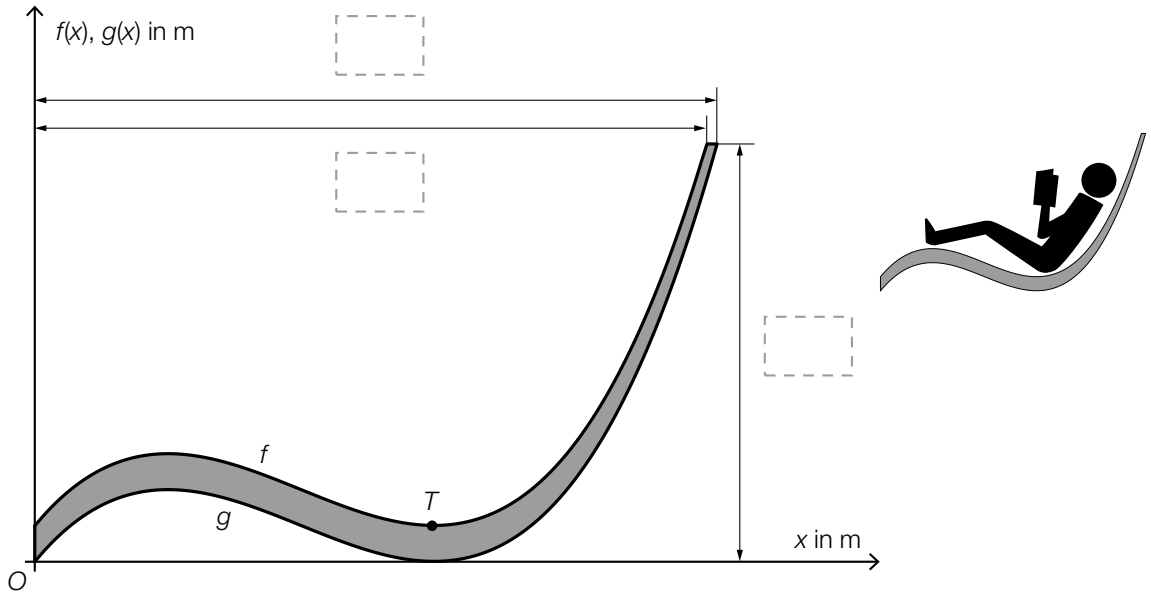
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Profilverlauf einer Liege kann mithilfe der Funktionen f und g näherungsweise beschrieben werden.

Mit folgendem Ausdruck kann der Inhalt der in der nachstehenden Abbildung grau dargestellten Fläche berechnet werden:

$$\int_0^a (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + (b - a) \cdot c - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen a, b und c in der nachstehenden Abbildung in die entsprechenden Kästchen ein.



Es gilt:

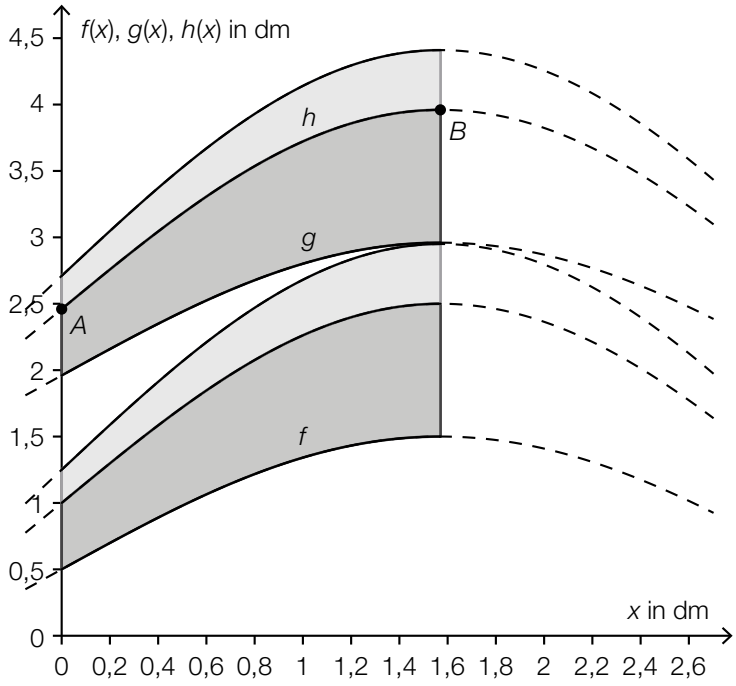
$f(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x + 0{,}1$
$g(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

– Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T des Graphen der Funktion f.
– Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x_0 = 1{,}6$.
– Begründen Sie, warum die Funktion f an jeder Stelle die gleiche Steigung wie die Funktion g hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Stoffmuster im Retro-Stil entsteht, indem ein Ausschnitt immer wieder kopiert und gespiegelt wird. Dabei werden die Begrenzungslinien als Graphen von Funktionen modelliert (siehe nachstehende Abbildungen).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = \sin(x) + 0{,}5$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f entlang der vertikalen Achse um 1,46 dm nach oben.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

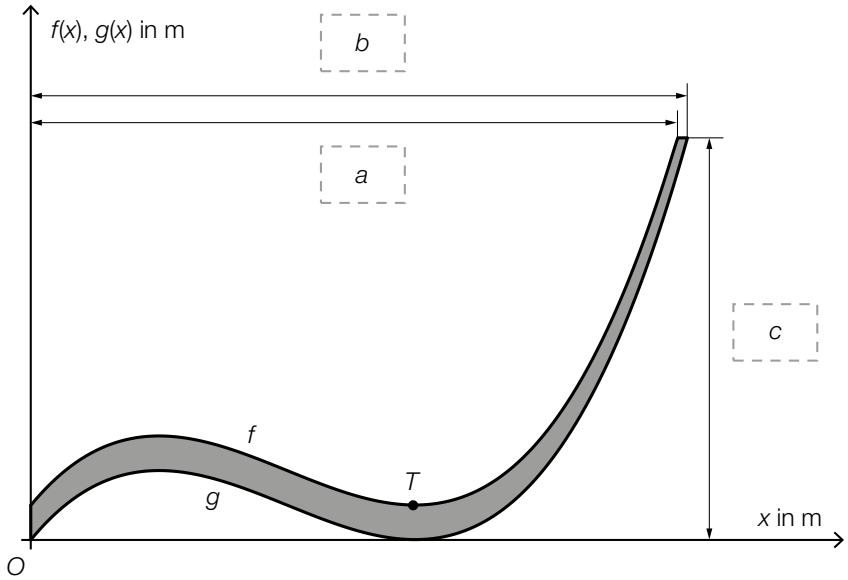
Der Graph der Funktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(x) + b$ verläuft durch den Punkt $A = (0|2{,}46)$ und den Hochpunkt $B = \left(\frac{\pi}{2}\middle|3{,}96\right)$.

– Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$f'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 0{,}365...)$, $x_2 = 1{,}093...$
$f(x_2) = 0{,}100...$
$T \approx (1{,}09 | 0{,}10)$

$\alpha = \arctan(f'(1{,}6)) = \arctan(1{,}938...) = 62{,}711...° \approx 62{,}71°$
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

Die ersten Ableitungen der beiden Funktionen sind identisch, also haben die beiden Funktionen an jeder Stelle die gleiche Steigung.

b) $g(x) = \sin(x) + 1{,}96$ oder $g(x) = f(x) + 1{,}46$

$2{,}46 = a \cdot \sin(0) + b \quad \Rightarrow \quad b = 2{,}46$
$3{,}96 - 2{,}46 = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Eintragen von a, b und c
1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinaten von T
1 × B2: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
1 × D: für die richtige Begründung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen einer Gleichung der Funktion g
1 × B: für das richtige Bestimmen der Koeffzienten a und b

Minirampe

Aufgabennummer: A_091

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen, das Skate-Parks errichtet, plant eine neue Minirampe.

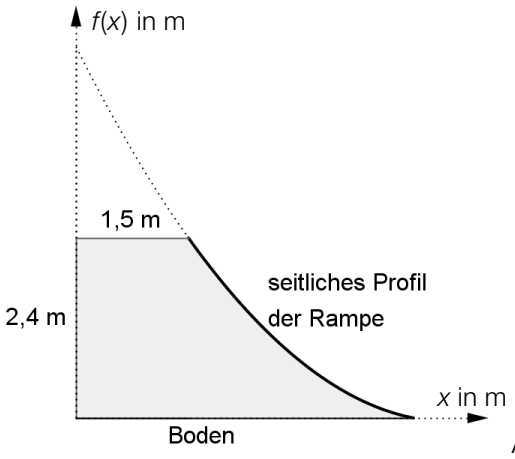


Abb. 1

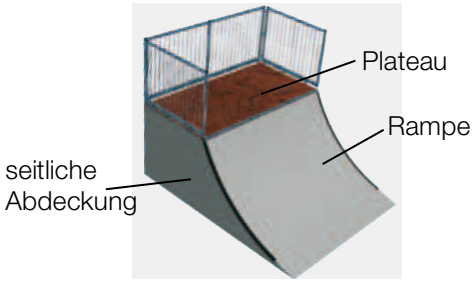


Abb. 2

Das seitliche Profil der Rampe kann durch eine Parabel 2. Ordnung modelliert werden:

$f(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4{,}95$ mit $1{,}5 \leq x \leq 4{,}5$

x … waagrechte Entfernung von der Rückwand in Metern (m)
$f(x)$ … Höhe der Rampe in Metern (m) an der Stelle x

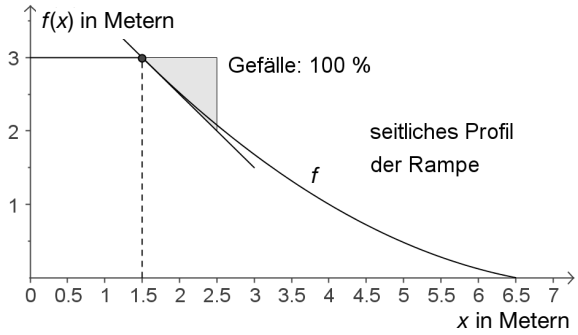
a) – Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung. Entnehmen Sie die dazu notwendigen Werte der Abbildung 1.

b) – Zeigen Sie, dass die gegebene Parabel 2. Ordnung beim Übergang zum Boden keine waagrechte Tangente aufweist.

c) – Dokumentieren Sie die Berechnung des Winkels zwischen Plateau und Rampe.

d) Auf Kundenwunsch wird eine höhere Rampe errichtet, deren seitliches Profil wieder durch eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden kann.

Höhe der Rampe: 3 m
Tiefe des Plateaus: 1,5 m
maximales Gefälle: 100 %
Bodenlänge der Rampe: 6,5 m



– Stellen Sie mit den gegebenen Angaben ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser quadratischen Funktion auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse: $N = (4{,}5|0)$

$A_1 = a \cdot b = 2{,}4 \cdot 1{,}5 = 3{,}6$
$A_2 = \int_{1,5}^{4,5} f(x)\mathrm{d}x = 2{,}7$
$A = A_1 + A_2 = 3{,}6 + 2{,}7 = 6{,}3$

Die Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung beträgt rund 6,3 m².

b) Eine Parabel 2. Ordnung hat nur ein lokales Extremum.
Berechnung des Tiefpunkts: $T = (5|-0{,}05)$
Nur im Tiefpunkt ist die Tangente waagrecht.

weitere Varianten: grafische Lösung oder Steigung in der Nullstelle berechnen

c)
1. 1. Ableitung von f bilden
2. x-Stelle ($x = 1{,}5$) in 1. Ableitung einsetzen und k berechnen
3. Winkel mithilfe der Beziehung $\alpha = \arctan(k)$ berechnen
   Ein negatives k ergibt einen Winkel im 2. Quadranten.

d)

$$\begin{aligned} &\text{I:} && f(1{,}5) = 3 \\ &\text{II:} && f(6{,}5) = 0 \\ &\text{III:} && f'(1{,}5) = -1 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} &\text{I:} && 2{,}25 \cdot a + 1{,}5 \cdot b + c = 3 \\ &\text{II:} && 42{,}25 \cdot a + 6{,}5 \cdot b + c = 0 \\ &\text{III:} && 3 \cdot a + b = -1 \end{aligned}$$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sport

Quelle: http://www.bfu.ch/PDFLib/1182_23464.pdf

Simulation eines Golfballflugs

Aufgabennummer: A_026

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Simulationsprogramm soll die Flugbahn eines in ebenem Gelände geschlagenen Golfballs dargestellt werden. Sie kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{216\,000} \cdot x^3 + \frac{x}{5}, \quad x \geq 0$$

x … waagrechte Entfernung vom Abschlag in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls in Metern (m), wenn der Ball sich in x Metern Entfernung vom Abschlag befindet (Annahme: Der Golfball bewegt sich in einer Ebene.)

a) Ein 10 m hoher Baum, der genau in der Flugbahn des Golfballs steht, wird von diesem gerade noch überflogen. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Kennzeichnen Sie die möglichen Standorte des Baums in der Zeichnung und lesen Sie die Werte für die Entfernung des Baums vom Abschlag ab.

b) Der Ball fällt in einen Teich, der sich in derselben Höhe wie der Abschlag befindet. Dokumentieren Sie die erforderlichen Lösungsschritte zur Ermittlung des Winkels, unter dem der Ball eintaucht, ohne die Berechnung auszuführen.

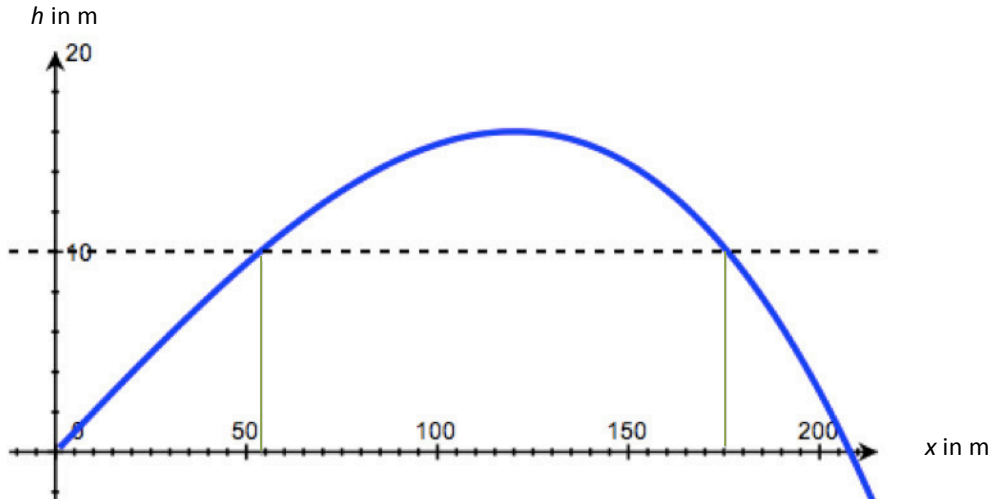
c) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punkts der Flugbahn mithilfe der Differenzialrechnung.

d) Begründen Sie, warum die gegebene Funktion höchstens einen Hochpunkt (lokales Maximum) haben kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Baum steht in ca. 54 m oder in ca. 176 m Entfernung vom Abschlag.
(Hinweis: Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.)

b) Um den Winkel zu ermitteln, unter dem der Ball in den Teich eintaucht, sind folgende Schritte notwendig:

1. Eintauchstelle x_E ermitteln: $h(x_E) = 0$, $x_E \neq 0$
2. Steigung der Funktion an der Stelle x_E ermitteln: $k = h'(x_E)$
3. Eintauchwinkel α ermitteln: $\tan \alpha = k \Rightarrow \alpha = \arctan k$

(Hinweis: Auch andere, analoge Lösungswege sind zulässig.)

c) Ermittlung des Maximums:

$$h'(x) = -\frac{x^2}{72\,000} + \frac{1}{5}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 120$$

$$h(120) = 16 \Rightarrow M = (120|16)$$

Der höchste Punkt der Flugbahn ist der Punkt $M = (120|16)$. Der Golfball erreicht seine maximale Flughöhe von 16 m in einer waagrechten Entfernung von 120 m vom Abschlag.

d) $h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, ihre 1. Ableitung $h'(x)$ ist daher eine quadratische Funktion. Die Gleichung $h'(x) = 0$ hat höchstens 2 Lösungen, es gibt also maximal 2 lokale Extremwerte. Nur einer davon kann – da $h(x)$ stetig ist – ein Maximum sein.

(*Auch andere Argumentationen sind möglich, z. B.:*
$h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, mit maximal 3 Nullstellen, also höchstens einem lokalen Maximum.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sport

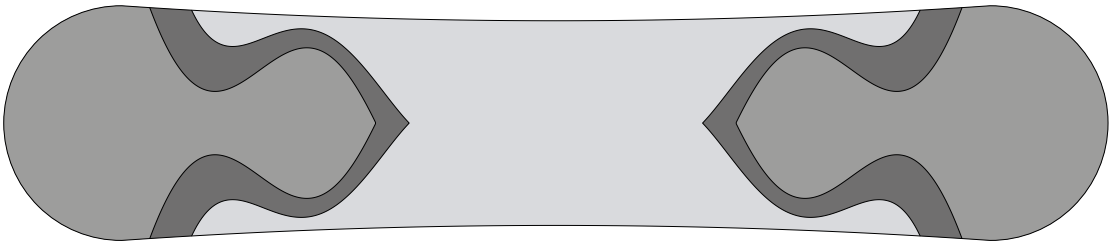
Quellen: –

Snowboard (1)*

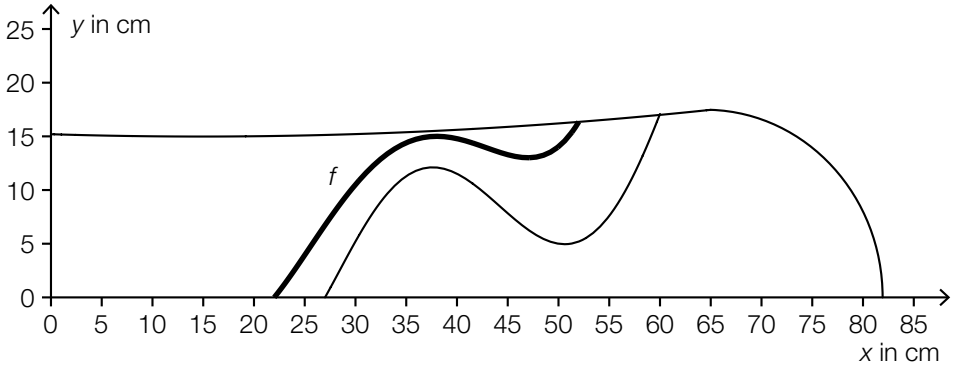
Aufgabennummer: B_392

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Design für ein Freestyle-Snowboard sieht folgendermaßen aus:



a) Das Snowboard-Design setzt sich aus 4 zueinander symmetrischen Elementen zusammen. Eines dieser Elemente ist in folgender Grafik dargestellt:



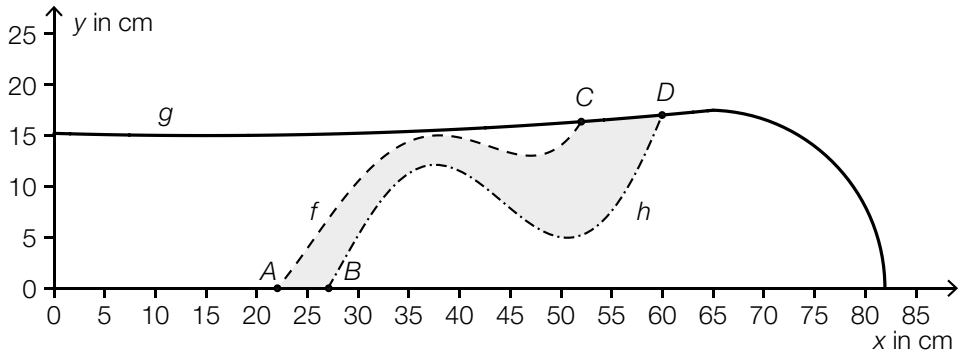
Die in der obigen Grafik markierte Kurve kann als Graph einer Polynomfunktion 4. Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ dargestellt werden. Von dieser Funktion sind folgende Eigenschaften bekannt:

Bei $x = 22$ hat die Funktion f eine Nullstelle.
Der Punkt (38|15) ist ein Hochpunkt.
Der Punkt (47|13) ist ein Tiefpunkt.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten dieser Polynomfunktion 4. Grades berechnen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die geschwungene Farbfläche des Snowboards wird durch die Graphen der Funktionen f, g und h sowie die x-Achse begrenzt:



$A = (22|0)$
$B = (27|0)$
$C = (52|16{,}5)$
$D = (60|17)$

Im nachstehenden Ansatz zur Berechnung des Inhalts dieser grau markierten Fläche in cm² wurde eine Teilfläche nicht berücksichtigt.

$A_1 = \int_{22}^{27} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $A_2 = \int_{27}^{52} \left[f(x) - h(x)\right]\mathrm{d}x$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Grafik die fehlende Teilfläche.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_3 dieser Teilfläche auf.

$A_3 =$ _____

c) Die Kosten bei der Produktion von Snowboards einer *limited edition* können durch die Funktion K, der Erlös beim Verkauf kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}27 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 591{,}67 \cdot x + 10\,000$
$E(x) = 1\,000 \cdot x$

x ... Anzahl der Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x ME in GE

Es wird angenommen, dass alle produzierten Snowboards auch verkauft werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

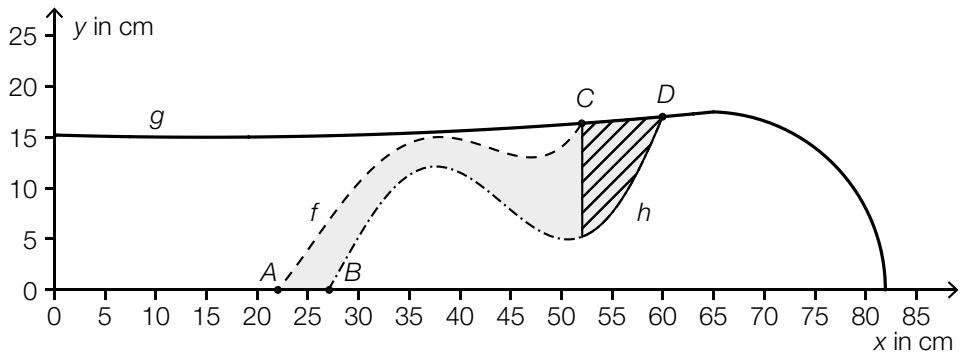
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	*oder:*	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$$A_3 = \int_{52}^{60} \left[g(x) - h(x) \right] \mathrm{d}x$$

c) $G(x) = -0{,}27 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 408{,}33 \cdot x - 10\,000$

$G'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 47{,}62\ldots \quad (x_2 = -10{,}58\ldots)$
$G(47{,}62\ldots) = 14\,303{,}372\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 14 303,37 GE.

Nullstellen der Gewinnfunktion: $G(x) = 0$
$(x_1 = -31{,}15\ldots)$
$x_2 = 17{,}07\ldots$
$x_3 = 69{,}63\ldots$

Der Gewinnbereich lautet: [17,1; 69,6].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs

Tauchen (1)*

Aufgabennummer: A_104

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Organ, das beim Tauchen am meisten gefährdet ist, ist die Lunge: Die menschliche Lunge hat ein durchschnittliches Fassungsvermögen von 6 Litern. Wenn die aufgenommene Luftmenge das Fassungsvermögen übersteigt, besteht die Gefahr eines Lungenrisses.

a) Je tiefer man taucht, desto höher wird der Druck auf die Lunge. Alle 10 Meter nimmt der Druck um 1 Bar zu. In 30 Metern Tiefe beträgt er bereits 4 Bar.

– Modellieren Sie diesen Zusammenhang durch eine Funktion P.

n ... Tauchtiefe in Metern
$P(n)$ ... Druck in Bar in n Metern Tiefe

– Ermitteln Sie, welcher Druck auf die Lunge in einer Tiefe von 32,5 Metern herrscht.

b) Das Volumen der in der Lunge befindlichen Luft ändert sich beim Tauchen nach folgender Formel:

$$V_n = \frac{10 \cdot V_0}{10 + n}$$

n ... Tauchtiefe in Metern
V_0 ... Volumen in Litern gemessen an der Wasseroberfläche ($n = 0$)
V_n ... Volumen in Litern gemessen in n Metern Tiefe

– Erklären Sie mithilfe der Formel, was mit der Lunge passieren würde, wenn man von 10 Metern Tiefe mit 4 Litern Luft in der Lunge zur Oberfläche auftaucht und dabei die Luft anhält.

c) Unter Wasser erscheint alles um ein Drittel länger und um ein Viertel näher als in Wirklichkeit. Ein Taucher beobachtet einen Hecht. Für ihn scheint der Hecht L m lang zu sein und in einer Entfernung von d cm vorbeizuschwimmen.

– Erstellen Sie ein Modell für die Berechnung der tatsächlichen Länge des Hechts.
– Erstellen Sie ein Modell für die Berechnung der tatsächlichen Entfernung des Hechts zum Taucher.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Da es sich um eine konstante Zunahme handelt, kann man diesen Zusammenhang mit einer linearen Funktion darstellen: $P(n) = k \cdot n + d$.

Pro Meter nimmt der Druck um $\frac{1}{10}$ Bar zu, das heißt: $k = \frac{1}{10}$.

Man setzt den Punkt $P(30) = 4$ ein:

$4 = \frac{1}{10} \cdot 30 + d$

$d = 1$

Die Funktion lautet daher: $P(n) = \frac{1}{10} \cdot n + 1$.

Somit hat man in einer Tiefe von 32,5 Metern den Druck $P(32{,}5) = 4{,}25$ Bar.

b) $V_{10} = 4$
Man muss die oben gegebene Formel nach V_0 umformen und erhält dann die Formel $V_0 = \frac{V_n \cdot (10 + n)}{10}$.

Setzt man in diese Formel mit $n = 10$ und $V_{10} = 4$ ein, so erhält man ein Lungenvolumen an der Wasseroberfläche von $V_0 = \frac{4 \cdot 20}{10} = 8$ Litern.

Laut obiger Angabe hat die Lunge aber nur eine Kapazität von 6 Litern. Es besteht also die Gefahr eines Lungenrisses.

c) tatsächliche Länge: x
scheinbare Länge unter Wasser: $\frac{4}{3} x = L$

tatsächliche Entfernung: y
scheinbare Entfernung im Wasser: $\frac{3}{4} y = d$

Lösungsschlüssel

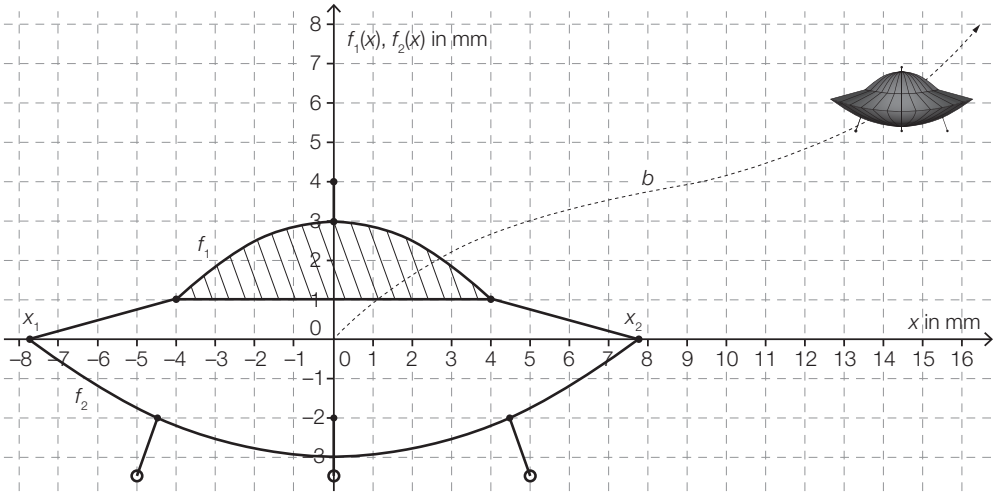
a) 1 x A für das richtige Modell mit den richtigen Parameterwerten
1 x B für die richtige Berechnung des Drucks
b) 1 x D für die logisch richtige Argumentation mithilfe der Formel
c) 1 x A für die richtige Formel für die Länge
1 x A für die richtige Formel für die Entfernung

UFO

Aufgabennummer: A_188

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO konstruiert.



Die obige Abbildung zeigt eine Querschnittsfläche des UFOs. In dieser werden die Kuppel und der Unterbau durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert.

$f_2(x) = \frac{x^2}{20} - 3$

x, $f_2(x)$ ... Koordinaten in Millimetern

a) – Stellen Sie mithilfe der Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche in der obigen Abbildung.

b) – Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion f_2.
– Interpretieren Sie, was durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx$ bestimmt wird.

c) Die Steigung der dargestellten Flugbahn b des UFOs erhält man durch folgende Ableitungsfunktion: $b'(x) = \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1$

x ... Strecke in Millimetern (mm) mit $x \geq 0$
$b'(x)$ ... Steigung des Funktionsgraphen b an der Stelle x

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der entsprechenden Funktion b.

Folgende Gleichung wurde mithilfe der Ableitung von b' aufgestellt: $\frac{x}{40} - \frac{1}{5} = 0$

– Interpretieren Sie, was durch die Lösung dieser Gleichung bestimmt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f_1(x) = a \cdot x^2 + 3$. Einsetzen eines Punktes ergibt $a = -\frac{1}{8}$.

$2 \cdot \left(\int_0^4 f_1(x)\,dx - 4\right) = 10{,}66\ldots$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt rund 10,7 mm².

b) Aus $0 = \frac{x^2}{20} - 3$ folgt $x_{1,2} = \pm\sqrt{60} \approx \pm 7{,}75$.
Das Integral entspricht dem negativen Wert der Fläche zwischen x-Achse und dem Funktionsgraphen von f_2.

c) $b(x) = \int \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1\,dx = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x + C$, wobei die Konstante $C = 0$, da die dargestellte Funktion durch den Ursprung geht.

Die gegebene Gleichung entspricht $b''(x) = 0$. Die Lösung ist die x-Koordinate des Wendepunkts.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analyse

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analyse
b) 4 Analyse
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Windräder*

Aufgabennummer: A_247

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die vom Hersteller eines Windrads angegebene Nennleistung kann in einer vereinfachten Form durch folgende Formel berechnet werden:

$P_N = c \cdot A$

P_N ... Nennleistung in Megawatt (MW)
A ... Flächeninhalt der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche in Quadratmetern (m^2)
$c = 0{,}169 \cdot 10^{-3}$ MW/m^2

Ein Windrad hat eine Nennleistung von 0,85 MW.

– Berechnen Sie den Durchmesser der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche.

b) Die tatsächliche Leistung von Windrädern in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann näherungsweise durch die Funktion P beschrieben werden.

Der Graph dieser Funktion P und ihr Wendepunkt W sind in der unten stehenden Abbildung 1 dargestellt.

– Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion P'.

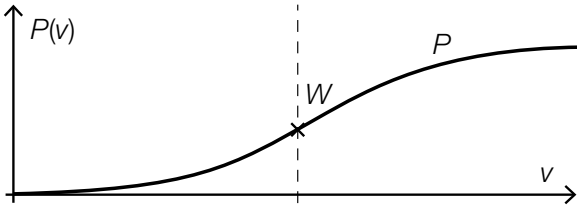


Abbildung 1

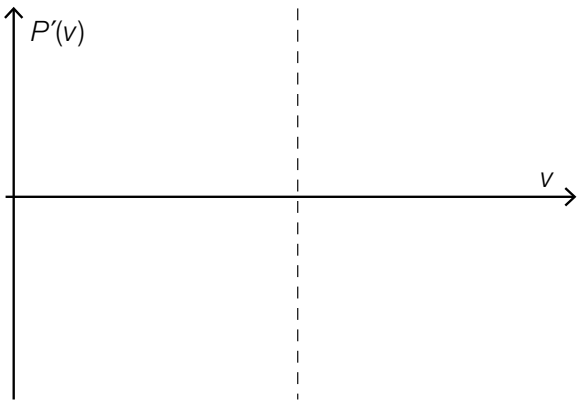


Abbildung 2

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die tatsächliche Leistung eines bestimmten Windrads in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann für Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bis 10 m/s näherungsweise durch die Polynomfunktion P beschrieben werden.

$P(v) = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$ mit $5 \leq v \leq 10$

v ... Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
$P(v)$ ... Leistung bei der Windgeschwindigkeit v in Megawatt (MW)

– Berechnen Sie, bei welcher Windgeschwindigkeit eine Leistung von 0,5 MW erzielt wird.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:

$$\frac{P(8) - P(7)}{P(7)}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

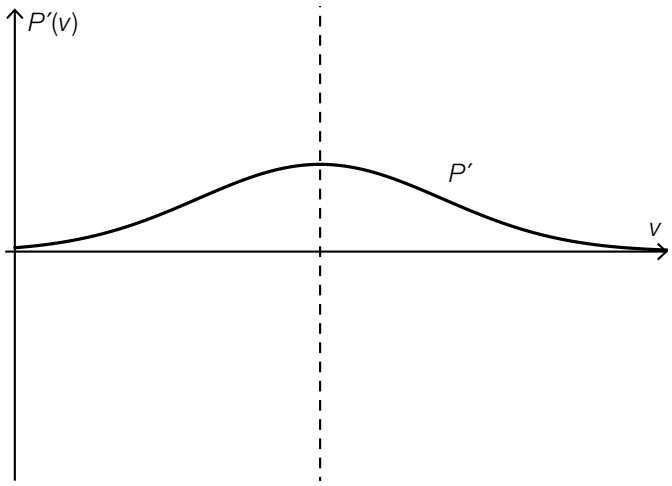
a) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow P_N = c \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$0{,}85 = 0{,}169 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$d = 80{,}02\ldots$

Der Durchmesser beträgt rund 80,0 m.

b) zum Beispiel:



c) $0{,}5 = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$

$v_1 = 7{,}887\ldots$
$(v_2 = -3{,}339\ldots)$

Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.

Es wird die relative Änderung der Leistung des Windrads bei einem Anstieg der Windgeschwindigkeit von 7 m/s auf 8 m/s ermittelt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers

b) 1 × A1: für die richtige Darstellung (Wendestelle von P als Maximumstelle von P')
1 × A2: für die richtige Darstellung (Vorzeichen der Ableitungsfunktion $P'(P'(v) > 0)$ und Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion P')
Das Krümmungsverhalten von P' ist für die Punktevergabe nicht relevant.

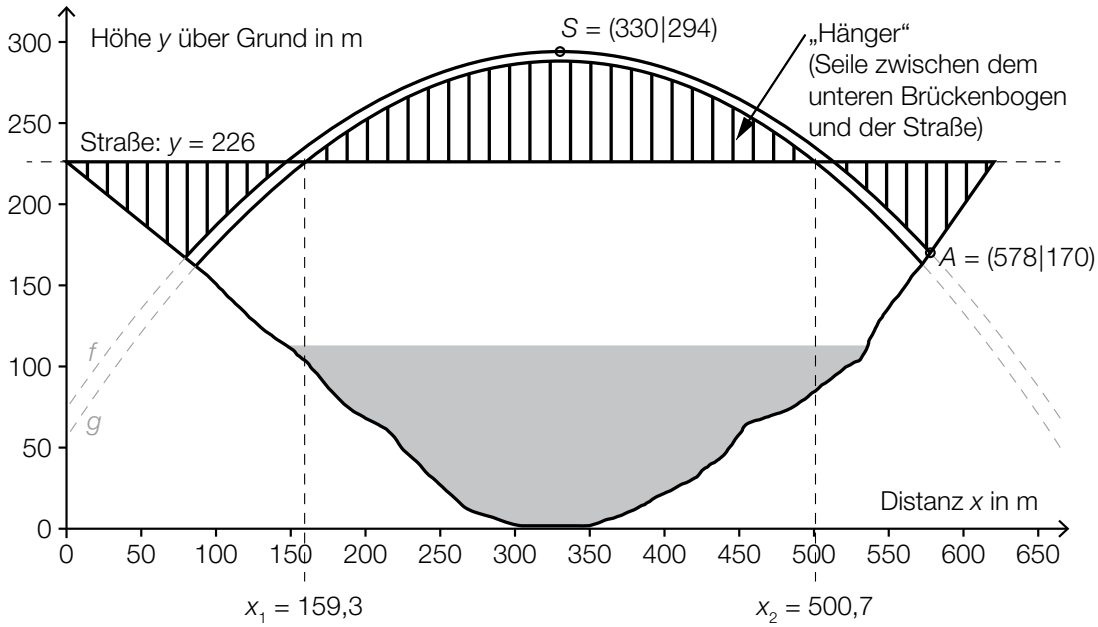
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Windgeschwindigkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

Wushan-Brücke

Aufgabennummer: A_177

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt:



Die obige Abbildung stellt die Geometrie der Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f. Die Stellen x_1 und x_2 markieren die Schnittpunkte des unteren Brückenbogens mit der Straße $y = 226$.

a) – Erstellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f.

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288 \quad \text{mit} \quad 86 \leq x \leq 574$

Jemand stellt zur Berechnung der Höhe $H(x)$ der Hänger an der Stelle x folgende Formel auf:

$H(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760) \quad \text{für} \quad x_1 \leq x \leq x_2$

– Weisen Sie die Korrektheit dieser Formel nach.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5$ m/s von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe (über Grund) des Steins näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m
g … Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s^2)

– Berechnen Sie diejenige Zeit t_a, die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion v für die Geschwindigkeit des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(330) = 294 \;\Rightarrow\; 330^2 \cdot a + 330 \cdot b + c = 294$
$f(578) = 170 \;\Rightarrow\; 578^2 \cdot a + 578 \cdot b + c = 170$
$f'(330) = 0 \;\Rightarrow\; 660 \cdot a + b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{496} = -0{,}0020\ldots,\; b = \frac{156}{124} = 1{,}3306\ldots,\; c = \frac{9231}{124} = 74{,}4435\ldots$

$f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{156}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$

b) Anwendung der binomischen Formel und Vereinfachung:

$H(x) = g(x) - 226 = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 62 = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 330^2) + 62$

$= -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 330^2 - 62 \cdot 470) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760)$

c) $113 = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t_a = 4{,}317\ldots$ (oder $t_a = -5{,}336\ldots$)
Der Stein benötigt bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche rund 4,32 s.

$v(t) = |h'(t)|$
$v(t) = g \cdot t + 5$

$v(t)$ … Geschwindigkeit des Steins zur Zeit t in m/s

(Eine Angabe der Geschwindigkeit mit negativem Vorzeichen, also $v(t) = -g \cdot t - 5$, ist ebenfalls möglich.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: www.highestbridges.com/,
Rrm998 – Own work, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:YangtzeRiver-Bridge.jpg