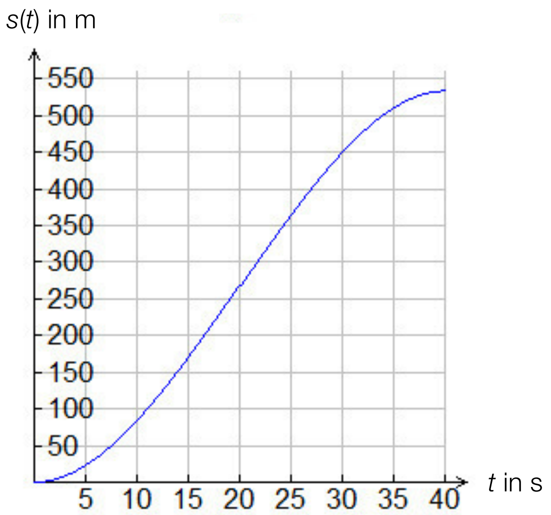
Autofahrt (1)

Aufgabennummer: B_072

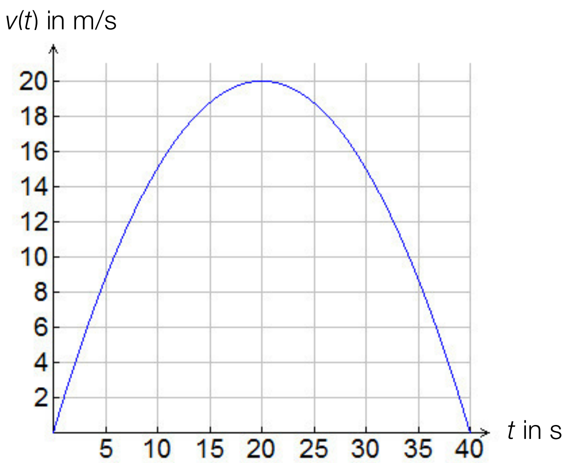
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im folgenden Weg-Zeit-Diagramm ist die von einem Auto zurückgelegte Strecke s in Metern (m) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) für $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die mittlere Geschwindigkeit des Autos für das Zeitintervall $15\text{ s} \leq t \leq 30\text{ s}$ ab.
– Lesen Sie aus der Grafik die momentane Geschwindigkeit des Autos für den Zeitpunkt $t = 30\text{ s}$ ab.

b) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Autos für die ersten 40 s seiner Fahrt.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die Beschleunigungsfunktion an.
[1 aus 5]

Die Beschleunigung ist nach ungefähr 40 Sekunden gleich null.	☐
Die Beschleunigung ist für 0 s ≤ t ≤ 40 s positiv.	☐
Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich 0 s ≤ t ≤ 40 s fallend.	☐
Die Beschleunigung ist nach ungefähr 20 Sekunden maximal.	☐
Die Beschleunigung ist nach 5 Sekunden ungefähr gleich groß wie nach 35 Sekunden.	☐

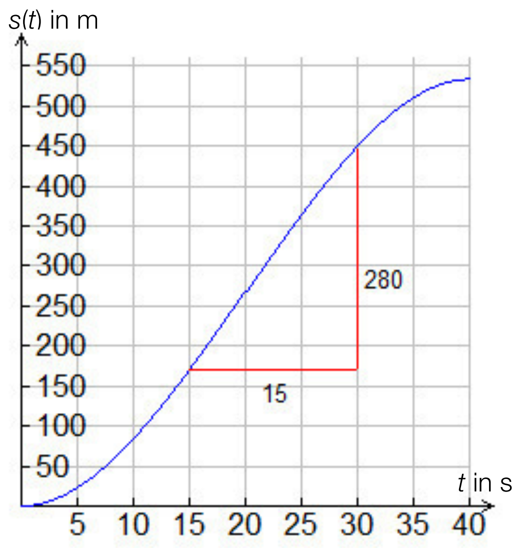
c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 Metern pro Sekunde (m/s) und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich null. Die Geschwindigkeit kann mithilfe einer quadratischen Funktion $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

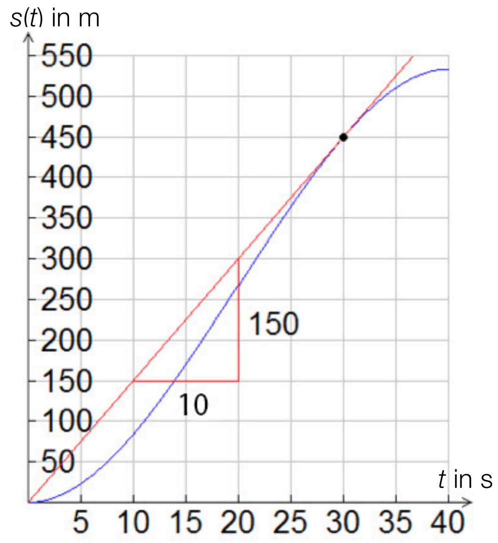
– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c auf.
– Ermitteln Sie diejenige Funktion, die die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)





Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\frac{280}{15}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Momentangeschwindigkeit entspricht der Steigung der Tangente bei $t = 30$ s und beträgt rund $\frac{150}{10}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Etwaige Ableseungenauigkeiten werden toleriert!

b)

Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ fallend.	☒

c) $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$, $v'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

1. $v'(25) = 0 \Rightarrow$ Gleichung 1: $50a + b = 0$
2. $v(25) = 15 \Rightarrow$ Gleichung 2: $625a + 25b + c = 15$
3. $v(50) = 0 \Rightarrow$ Gleichung 3: $2\,500a + 50b + c = 0$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz: $v(t) = 1{,}2 \cdot t - 0{,}024 \cdot t^2$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 1
c) leicht	c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

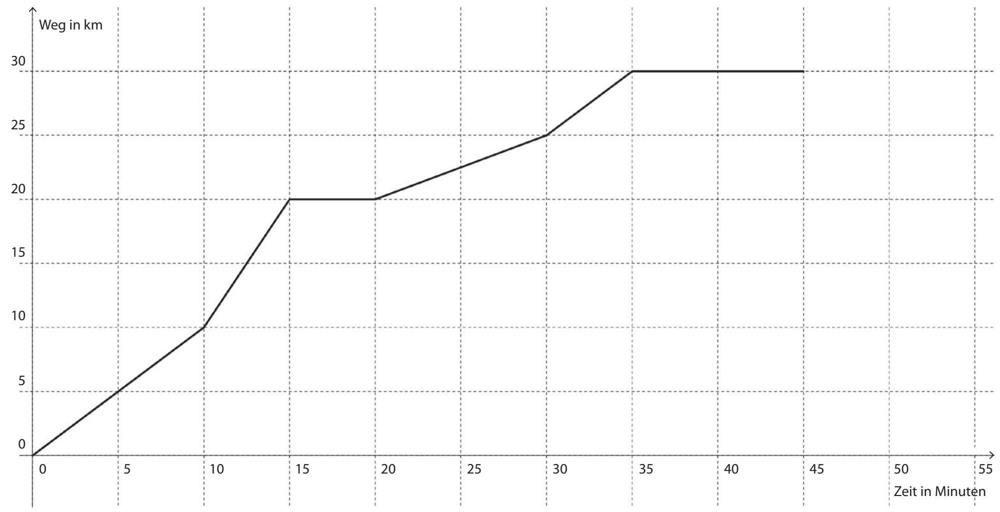
Autofahrt (2)

Aufgabennummer: A_200

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Frau Maier ist beruflich sehr viel mit dem Auto unterwegs und benutzt ihren Bordcomputer, um zurückgelegte Strecken, die mittlere Geschwindigkeit und den mittleren Kraftstoffverbrauch zu ermitteln.

a) Im Folgenden sehen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, das näherungsweise Frau Maiers Fahrverhalten an einem ihrer Arbeitstage beschreibt:



– Bestimmen Sie, in welchem Zeitintervall Frau Maier mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h unterwegs ist.

b) Frau Maiers Bordcomputer kann die seit Fahrtbeginn verbrauchte Benzinmenge anzeigen. Intern berechnet der Computer für eine der Fahrten von Frau Maier die verbrauchte Benzinmenge in Abhängigkeit vom bisher zurückgelegten Weg mithilfe folgender Funktion:

$$f(x) = 0{,}0000006x^3 + 0{,}0002x^2 + 0{,}08x$$

x ... Strecke in Kilometern (km), die seit Fahrtbeginn zurückgelegt wurde
$f(x)$ ... verbrauchte Benzinmenge in Litern (L) nach x zurückgelegten Kilometern

– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man den mittleren Benzinverbrauch pro Kilometer für ein beliebiges Wegintervall $[x_1; x_2]$ berechnen kann.
– Berechnen Sie den mittleren Benzinverbrauch pro Kilometer im Wegintervall [50 km; 100 km].

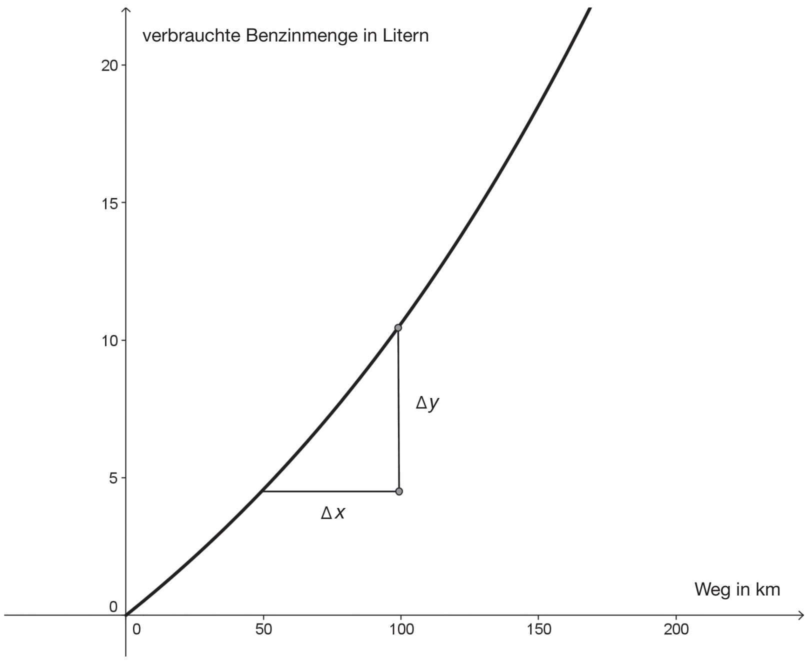
c) Die seit Fahrtbeginn verbrauchte Benzinmenge wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(x) = 0{,}0000006x^3 + 0{,}0002x^2 + 0{,}08x$$

x ... Strecke in km, die seit Fahrtbeginn zurückgelegt wurde
$f(x)$ ... die seit Fahrtbeginn verbrauchte Benzinmenge in Litern nach x zurückgelegten Kilometern

– Geben Sie an, mit welcher Rechenoperation man den momentanen Benzinverbrauch bei x Kilometern berechnen kann.
– Berechnen Sie den momentanen Benzinverbrauch bei 50 Kilometern in Litern pro Kilometer (L/km).

d) – Erklären Sie anhand der unten stehenden Grafik, welche Größe man mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet.
– Erläutern Sie, welche Größe man erhält, wenn Δx gegen null geht.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Es handelt sich um das Zeitintervall von 20 min bis 30 min.

Ein möglicher Lösungsweg wäre:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{vergangene Zeit}}$$

Für das Intervall von 20 min bis 30 min ergibt dies $\frac{5}{10}$ km/min = 30 km/h.

b) Formel:
Für ein allgemeines Intervall $[x_1; x_2]$ gilt:

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{\text{verbrauchte Benzinmenge}}{\text{zurückgelegte km}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{\text{verbrauchte Benzinmenge}}{\text{zurückgelegte km}} = \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50}$$

$f(100) = 10{,}6$
$f(50) = 4{,}575$

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50} = \frac{10{,}6 - 4{,}575}{100 - 50} = 0{,}1205$$

Frau Maier hat im angegebenen Wegintervall durchschnittlich 0,1205 L Benzin pro km gebraucht.

c) Man berechnet den momentanen Benzinverbrauch bei x km durch $f'(x)$.

Der momentane Benzinverbrauch bei Kilometer 50 ist die Ableitung $f'(50)$.

$f'(x) = 0{,}0000018x^2 + 0{,}0004x + 0{,}08$
$f'(50) = 0{,}1045$

Der momentane Benzinverbrauch bei Kilometer 50 beträgt also 0,1045 L/km.

d) Mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet man den mittleren Benzinverbrauch im Intervall [50 km; 100 km] (Differenzenquotient).

Wenn Δx gegen null geht, erhält man den momentanen Benzinverbrauch für $x = 50$ km (Differenzialquotient).

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Zeitintervalls

b) 1 × A: für die Aufstellung des richtigen Modells (Differenzenquotient)
1 × B: für die richtige Berechnung des durchschnittlichen Benzinverbrauchs

c) 1 × A: für die korrekte Beschreibung des momentanen Benzinverbrauchs durch die 1. Ableitung an der Stelle x
1 × B: für die richtige Berechnung des momentanen Benzinverbrauchs bei Kilometer 50

d) 1 × D: für die richtige Erklärung
1 × D: für die richtige Erklärung

Erfassen der Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: A_196

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion s_1.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

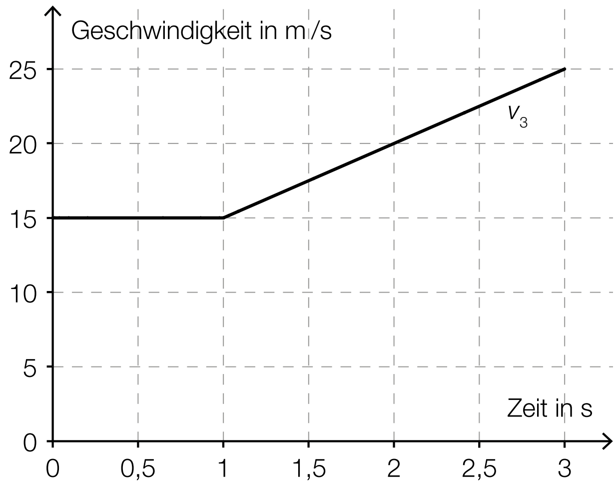
$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.
– Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$

Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

$a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

An der Stelle $t_0 = 2$ gilt:

$v_2'(2) = a_2(2) = 0$

$v_2''(2) = a_2'(2) = -2 < 0$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist.
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

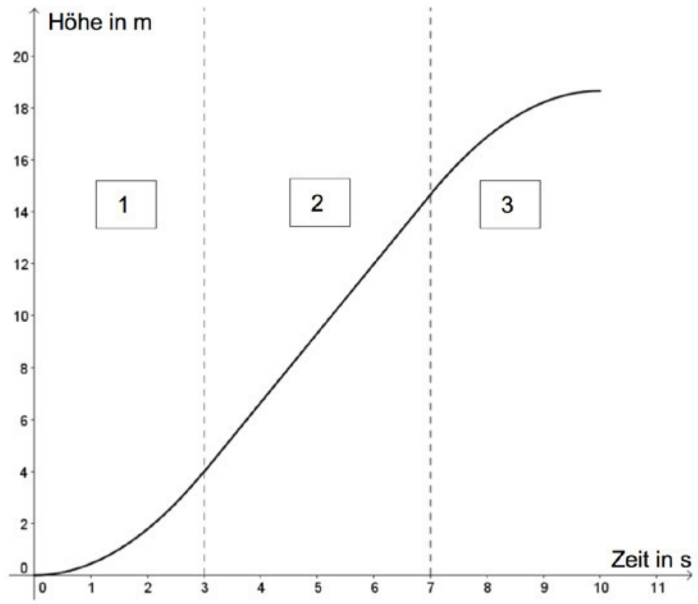
b) 1 × D1: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit ungleich null ist
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeit t_0
1 × D2: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

Fahrstuhl im Hochhaus

Aufgabennummer: A_221		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Ein Fahrstuhl fährt in einem Hochhaus nach oben. Die nachstehende Grafik stellt die erreichte Höhe in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden dar.



a) – Beschreiben Sie den Bewegungsablauf dieses Fahrstuhls in Bezug auf die Geschwindigkeit in den drei markierten Abschnitten in Worten.
– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, wann der Fahrstuhl seine maximale Geschwindigkeit während dieser Fahrt erreicht.

b) Der Anfahrtsvorgang in den ersten 3 Sekunden, in denen der Fahrstuhl 4 m zurücklegt, kann durch eine quadratische Funktion beschrieben werden. Der Scheitelpunkt des Funktionsgraphen liegt im Ursprung.

– Stellen Sie eine Gleichung dieser Weg-Zeit-Funktion auf.

c) Während des 3. Abschnitts gilt:

$$h(t) = -\frac{4}{9} \cdot (t - 10)^2 + \frac{56}{3} \quad \text{mit} \quad 7 \leq t \leq 10$$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe zur Zeit t in m

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a.
– Beschreiben Sie, wie sich die Geschwindigkeit des Fahrstuhls ändert, wenn die Beschleunigung ein negativer, konstanter Wert ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) In den ersten 3 Sekunden wird der Aufzug immer schneller. Anschließend, bis zum Ende der 7. Sekunde, behält der Aufzug eine konstante Geschwindigkeit bei. Danach wird er gebremst und kommt zum Zeitpunkt $t = 10$ zum Stillstand.

Die maximale Geschwindigkeit wird nach 3 Sekunden erreicht.

b) $h(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe (= zurückgelegter Weg) zur Zeit t in m

$$\left.\begin{array}{l} h(3) = 4 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot a + 3 \cdot b = 4 \\ h'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{9},\ b = 0$$

$$h(t) = \frac{4}{9} \cdot t^2$$

c) $v(t) = h'(t) = -\frac{8}{9} \cdot (t - 10)$
$a(t) = h''(t) = -\frac{8}{9}$

Die Geschwindigkeit des Fahrstuhls nimmt gleichmäßig (linear) ab.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

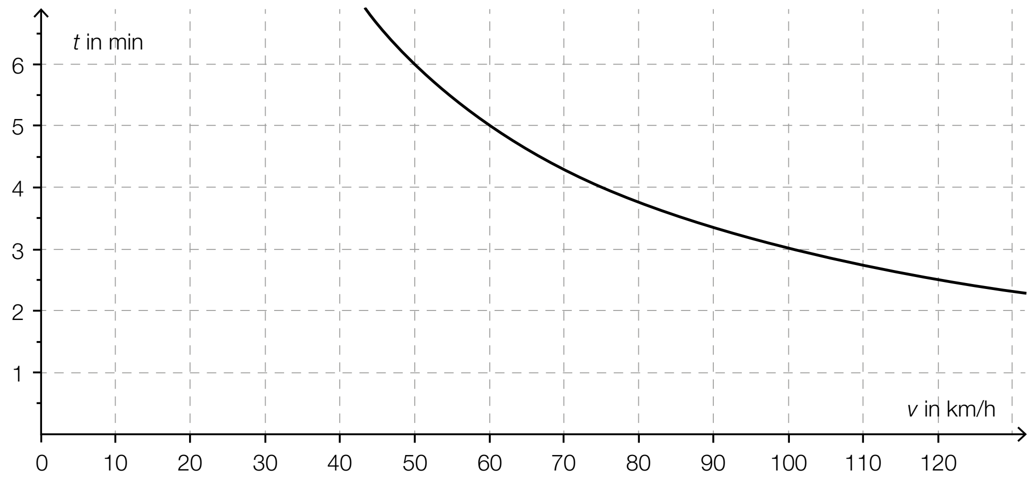
Fahrzeiten

Aufgabennummer: A_165

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Folgenden wird das Befahren verschiedener Strecken nach unterschiedlichen Aspekten analysiert.

a) Für eine bestimmte Strecke sind in der nachstehenden Grafik die Fahrzeiten t in min bei unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten v in km/h dargestellt.



Für die Strecke wird bei einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h die Zeit t_1 und bei einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h die Zeit t_2 benötigt.
Es wird behauptet, dass für die gleiche Strecke bei einer konstanten Geschwindigkeit von 75 km/h die Zeit $\frac{t_1 + t_2}{2}$ benötigt wird.

– Zeigen Sie mithilfe der Grafik, dass diese Aussage falsch ist.

b) Eine Person A fährt eine Strecke von 400 km Länge mit durchschnittlich 100 km/h und legt einen Tankstopp von 15 min ein. Eine zweite Person B startet zur gleichen Zeit, fährt auf der gleichen Strecke mit 80 km/h und legt keinen Tankstopp ein.

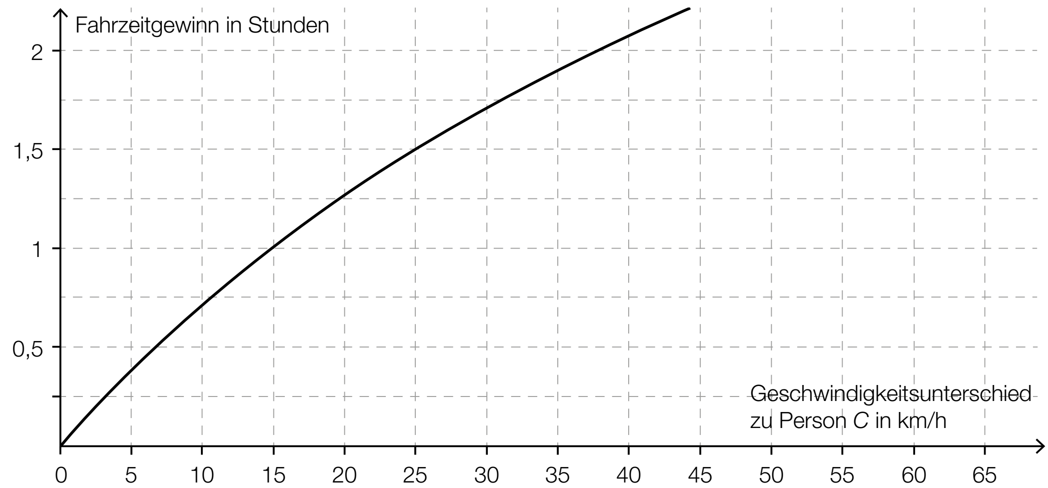
– Berechnen Sie, um wie viele Minuten die Person A trotz des Zwischenstopps früher als die Person B ans Ziel kommt.

c) Eine Person C fährt eine Strecke von 400 km Länge mit einer mittleren Geschwindigkeit von 70 km/h.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion s, die die Entfernung der Person C vom Zielort in Abhängigkeit von der gefahrenen Zeit beschreibt.

Eine weitere Person D fährt die Strecke mit durchschnittlich 100 km/h.

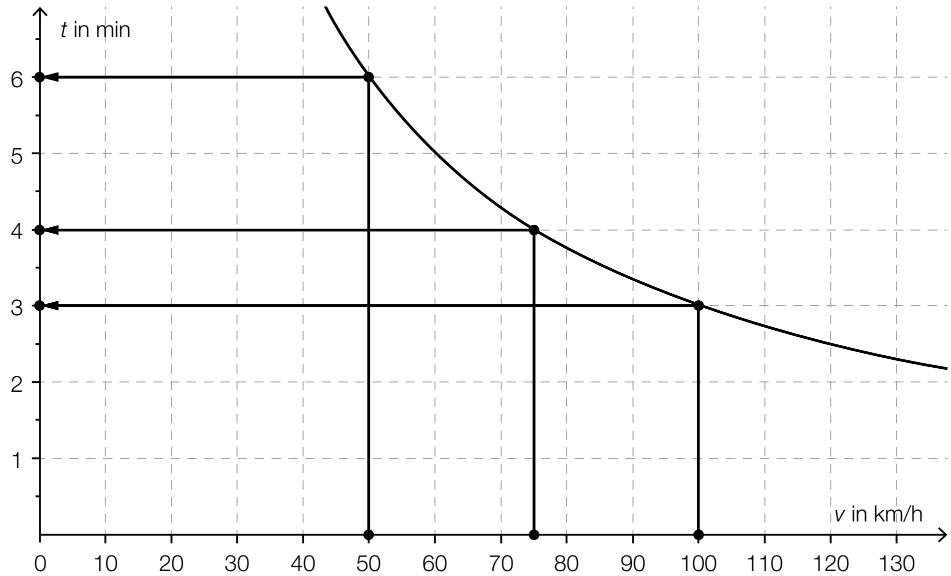
– Lesen aus der nachstehenden Abbildung den Fahrzeitgewinn von Person D ab.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Fährt man die Strecke mit 50 km/h, so braucht man 6 min, bei 100 km/h braucht man 3 min.

$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4{,}5$

Das arithmetische Mittel der Fahrzeiten beträgt 4,5 min.
Fährt man 75 km/h, so benötigt man für die Strecke 4 min und nicht 4,5 min. Daher ist die Behauptung falsch.

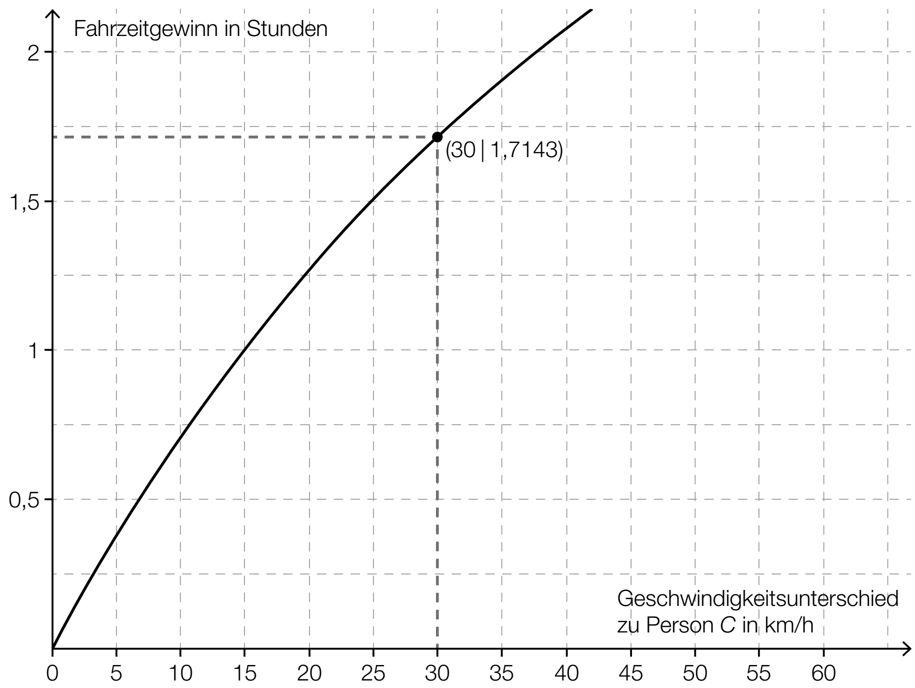
b) Fahrzeit: $t = \frac{400}{v}$

Person A: 4 h + 0,25 h
Person B: 5 h
Differenz: 0,75 h = 45 min

c) $s(t) = 400 - 70 \cdot t$

t ... gefahrene Zeit in h
$s(t)$ ... Entfernung vom Zielort zur Zeit t in km

Ablesen der Werte bei 30 km/h Geschwindigkeitsunterschied:



Person D hat einen Fahrzeitgewinn von rund 1,7 h.
Toleranz: ±0,1 h

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

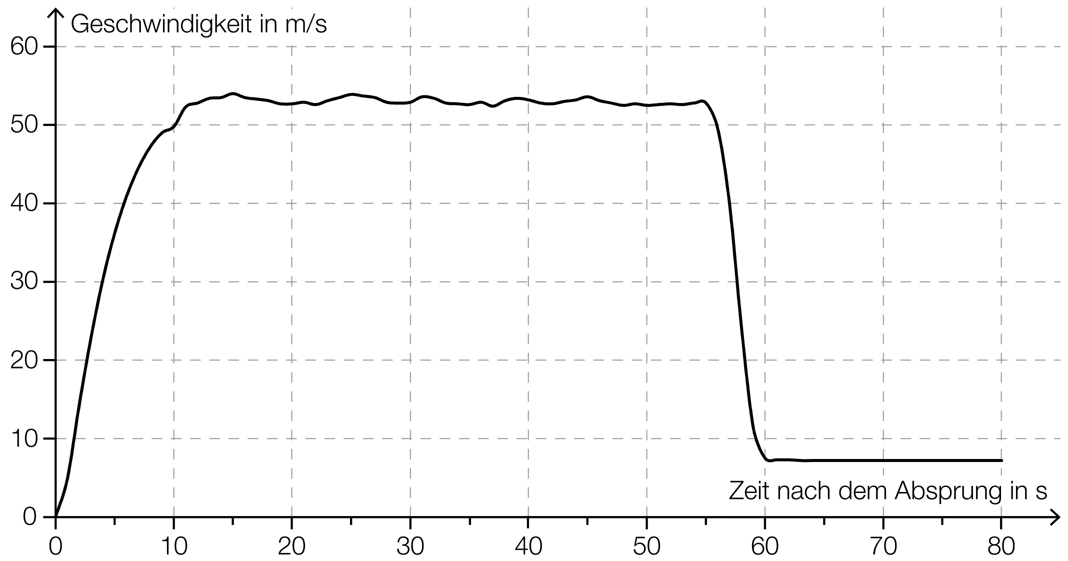
Quellen: –

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: A_261

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, g = 9,81 m/s²

– Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

– Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1 300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

Der Fallschirmspringer landet auf einem Feld, das auf einer Meereshöhe von 350 Metern liegt.

– Berechnen Sie, wie lange der gesamte Fallschirmsprung (vom Absprung bis zur Landung) dauert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

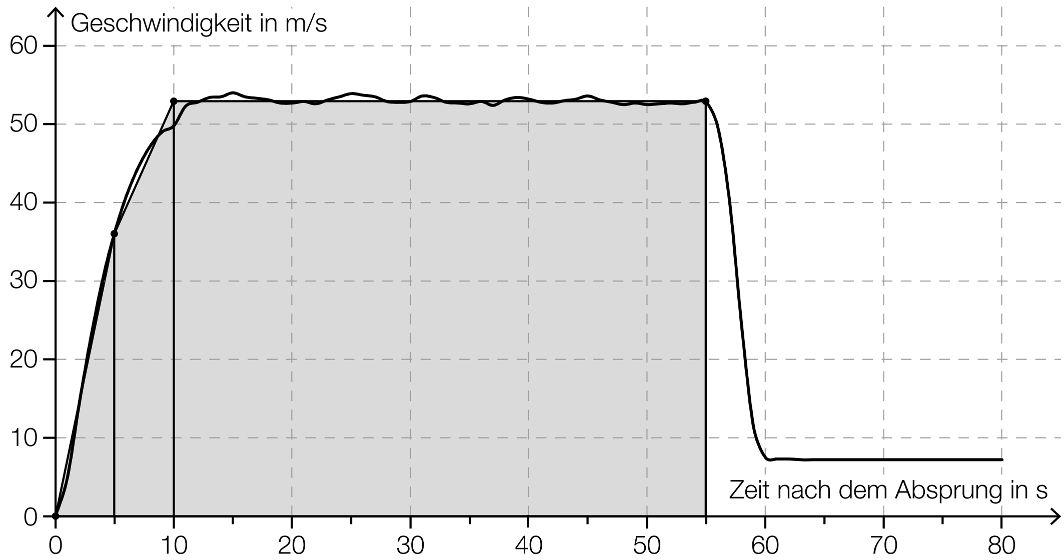
Möglicher Lösungsweg

a) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$

$v(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$

Toleranzbereich: [2 400; 2 900]

Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s

$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

$350 = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 133$

$133 + 60 = 193$

Der Fallschirmsprung dauert vom Absprung bis zur Landung insgesamt 193 Sekunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit mithilfe des Fallgesetzes

b) 1 × B: für das richtige Abschätzen des Flächeninhalts im Toleranzbereich [2 400; 2 900]
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung der insgesamten Dauer des Fallschirmsprungs

Freier Fall eines Apfels

Aufgabennummer: A_181

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Apfel fällt vom Baum auf den Boden. Die senkrechte Entfernung des frei fallenden Apfels vom Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch die Funktion h beschrieben:

$h(t) = u - 5 \cdot t^2$ mit $u \in \mathbb{R} > 0$

t … Fallzeit in s
$h(t)$ … Abstand des Apfels zur Zeit t zum Boden in m

a) – Zeigen Sie, dass die Konstante u der Fallhöhe entspricht.
– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Fallzeit t_F des Apfels, wenn u bekannt ist.

t_F = ________________________________

b) Ein Apfel fällt aus einer Höhe von 15 m.

– Berechnen Sie den Betrag der mittleren Geschwindigkeit des Apfels für den Zeitraum $0{,}5\text{ s} \leq t \leq 1{,}5\text{ s}$.
– Beschreiben Sie, wie man vorgeht, um für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 die Momentangeschwindigkeit zu erhalten.

c) – Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung des Apfels.

d) Der Luftwiderstand F_W, den der Apfel während seines Falls erfährt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$F_W = k \cdot v^2$

F_W … Luftwiderstand
k … Konstante
v … Geschwindigkeit des Apfels

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Luftwiderstand F_W ist proportional zur Geschwindigkeit v.	☐
Wird der Luftwiderstand F_W verdoppelt, vervierfacht sich die Geschwindigkeit v.	☐
Der Luftwiderstand F_W ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v.	☐
Haben Luftwiderstand F_W und Geschwindigkeit v den gleichen Zahlenwert, so gilt $k = 1$.	☐
Nimmt die Geschwindigkeit v um den Wert 1 zu, dann nimmt der Luftwiderstand um den Wert k zu.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Apfel am höchsten Punkt (≙ Fallhöhe).
$h(0) = u - 5 \cdot 0^2 = u$

Ist der Apfel am Boden angelangt, gilt $h(t) = 0$.
$0 = u - 5 \cdot t_F^2$
$t_F = \sqrt{\frac{u}{5}}$

b) $\left|\frac{h(1{,}5) - h(0{,}5)}{1{,}5 - 0{,}5}\right| = \left|\frac{3{,}75 - 13{,}75}{1}\right| = 10$

Im Zeitintervall [0,5; 1,5] fällt der Apfel mit einer mittleren Geschwindigkeit von 10 m/s.

Um die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu bestimmen, muss die 1. Ableitung $h'(t)$ berechnet und dann für t der Wert von t_0 eingesetzt werden.

c) Zur Berechnung der Beschleunigung muss $h(t)$ zweimal abgeleitet werden.
$h'(t) = -10 \cdot t$
$|a(t)| = |h''(t)| = 10$
Die Beschleunigung beträgt 10 m/s².

d)

[…]	
[…]	
Der Luftwiderstand F_W ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v.	☒
[…]	
[…]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Grazer Hausberg

Aufgabennummer: A_189

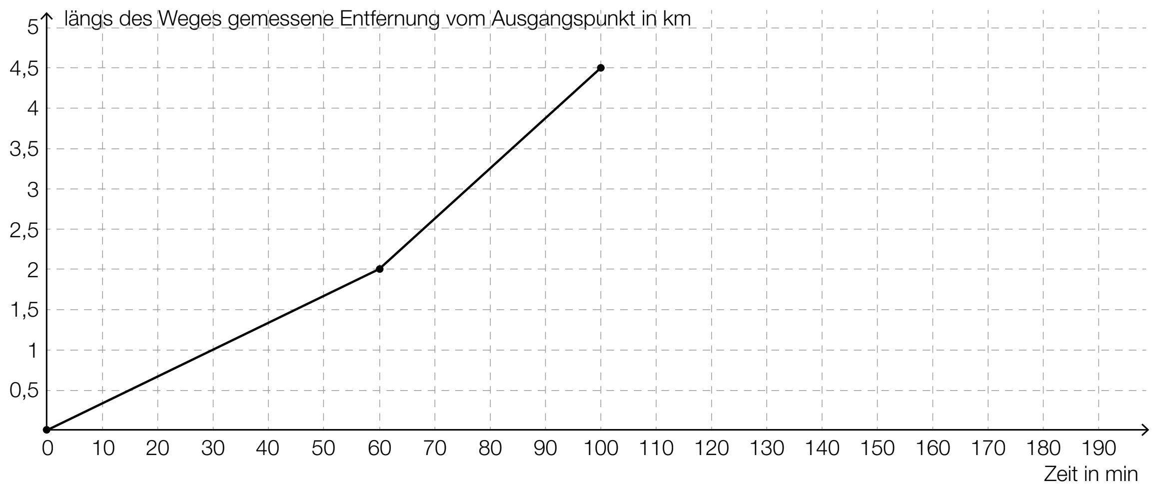
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Schöckl gilt als Grazer Hausberg. Es führen viele verschiedene Wege und Straßen um ihn herum und auf den Gipfel.

a) Die Talstation einer Seilbahn liegt auf 780 m und die Bergstation auf 1 436 m Höhe über dem Meeresspiegel. Die als geradlinig angenommene Strecke, die die Seilbahn zurücklegt, beträgt 2 087 m. Die Fahrtdauer von der Talstation zur Bergstation beträgt 7 min.

– Argumentieren Sie, warum man mit dem Ausdruck $\arctan\left(\frac{656}{2\,087}\right)$ den durchschnittlichen Steigungswinkel der Strecke nicht berechnen kann.
– Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Seilbahn in Metern pro Sekunde.

b) Das nachstehende Diagramm zeigt näherungsweise den Verlauf einer Wanderung auf den Schöckl.

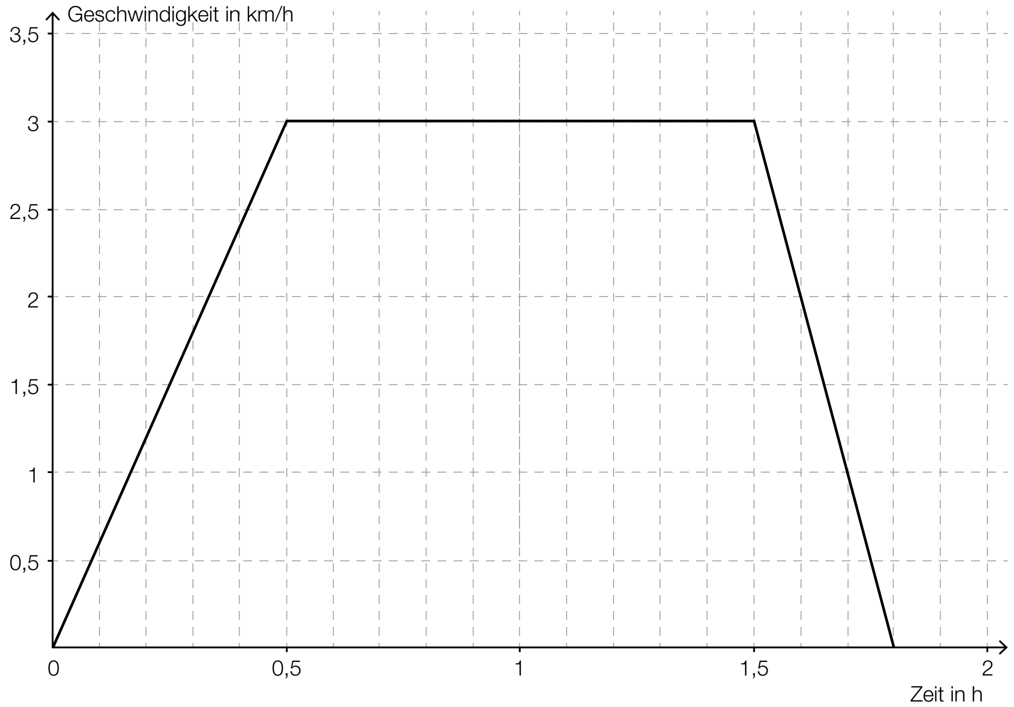


– Begründen Sie unter Verwendung dieses Diagramms, in welchem der beiden Zeitabschnitte der Wanderer schneller gegangen ist.

Der Wanderer macht nach dem Aufstieg keine Pause und wandert mit einer mittleren Geschwindigkeit von 3,375 km/h den gleichen Weg bergab.

– Vervollständigen Sie im obigen Diagramm den Verlauf der Wanderung.

c) Der nachstehende Graph zeigt näherungsweise die Geschwindigkeit bei einer Wanderung auf den Schöckl in Abhängigkeit von der Zeit.

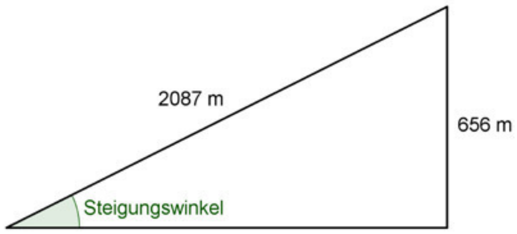


– Bestimmen Sie mithilfe des Graphen den zurückgelegten Weg dieses Wanderers.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Tangens ist das Verhältnis zwischen der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete.



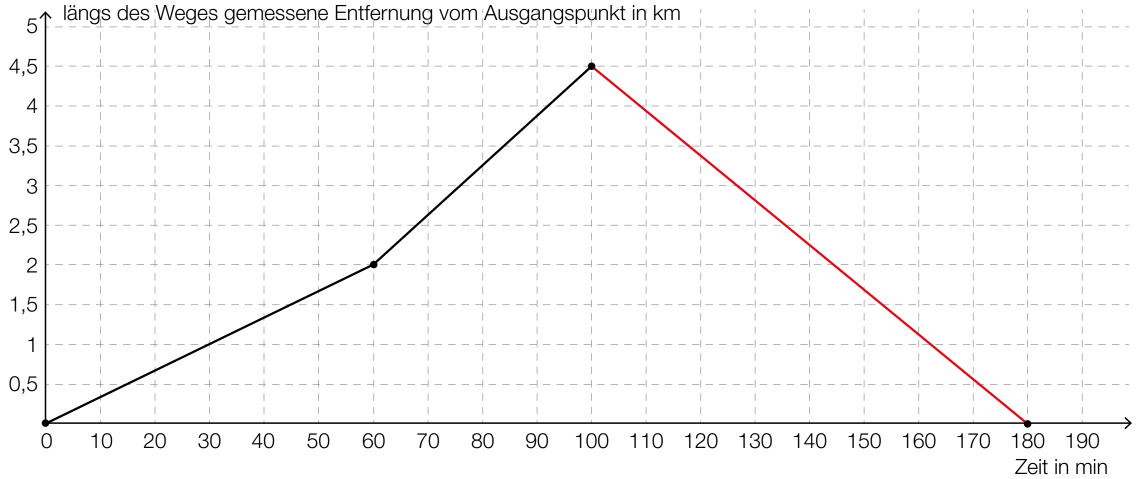
In diesem Beispiel ist aber das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse angeschrieben, also muss der Arkussinus verwendet werden: Steigungswinkel = $\arcsin\left(\frac{656}{2\,087}\right)$.

$$v = \frac{2\,087}{7 \cdot 60} = 4{,}969\ldots$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt rund 4,97 m/s.

b) Der Anstieg der Geraden entspricht der Geschwindigkeit, also ist der Wanderer im zweiten Abschnitt schneller gegangen.

Die rote Gerade stellt den Abstieg des Wanderers grafisch dar:



c) Der zurückgelegte Weg kann als Flächeninhalt unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ermittelt werden. Dieser Flächeninhalt kann z. B. mit der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes berechnet werden:

$$\frac{1{,}8 + 1}{2} \cdot 3 = 4{,}2$$

Der zurückgelegte Weg beträgt 4,2 km.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Schöckl-Seilbahn

Mopedfahrt

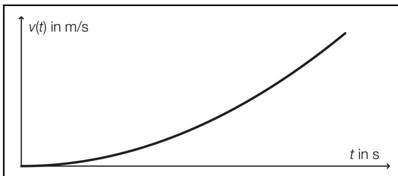
Aufgabennummer: A_120

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

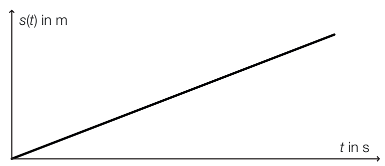
Kurt und sein Freund Bernd fahren mit ihren Mopeds zu einem Badesee.

a) Kurt beschleunigt sein Moped gleichmäßig vom Stillstand auf 12,5 Meter pro Sekunde (m/s) in 6 Sekunden (s).

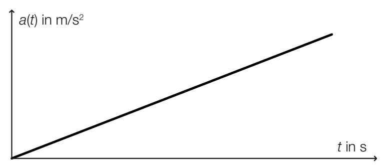
– Kreuzen Sie diejenige Grafik an, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt. *[1 aus 5]*



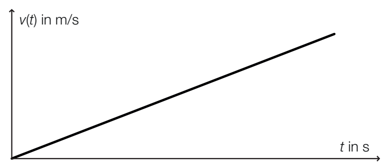
☐



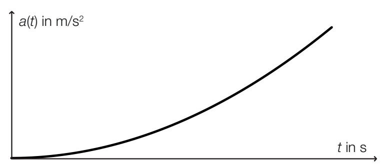
☐



☐



☐



☐

b) Auf einem Teilstück kann die Geschwindigkeit von Bernd näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$v(t) = 0{,}3 \cdot t + 0{,}8$

t … Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Berechnen Sie den Weg, der innerhalb der ersten Minute zurückgelegt wurde.

c) Bernd wohnt im Ort A, Kurt im 10 km entfernten Ort B, der Badesee liegt im Ort C. Die Straße führt von A über B nach C. Kurt fährt mit durchschnittlich 45 km/h und Bernd 6 Minuten früher mit durchschnittlich 50 km/h in Richtung C.

– Kreuzen Sie die richtige Gleichung an, mit der die Fahrzeit t ermittelt werden kann, die Bernd benötigt, um Kurt einzuholen. *[1 aus 5]*

$45 \cdot t - 50 \cdot (t - 0{,}1) = 0$	☐
$50 \cdot (t - 6) = 10 - 45 \cdot t$	☐
$50 \cdot t - 45 \cdot (t - 0{,}1) = 10$	☐
$5 \cdot t = 4{,}5$	☐
$50 \cdot t = 45 \cdot t - 10$	☐

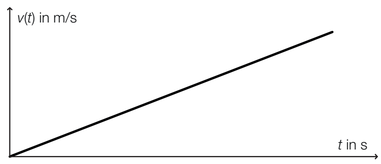
d) Auf einem Teilstück erhöht Kurt – ausgehend von einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 – seine Geschwindigkeit pro Sekunde näherungsweise um 1 %.

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit t.
– Berechnen Sie die Geschwindigkeitserhöhung nach 10 Sekunden bezogen auf die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in Prozent.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

[...]	
[...]	
[...]	
	☒
[...]	

b) $s = \int_0^{60} (0{,}3 \cdot t + 0{,}8)\,\mathrm{d}t = 588$

Bernd legt innerhalb der ersten Minute 588 m zurück.

c)

[...]	
[...]	
$50 \cdot t - 45 \cdot (t - 0{,}1) = 10$	☒
[...]	
[...]	

d) $v(t) = v_0 \cdot 1{,}01^t$
$v(10) = v_0 \cdot 1{,}01^{10} \approx v_0 \cdot 1{,}1046$

Die Geschwindigkeit hat sich um ca. 10,5 % erhöht.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1
d) 2

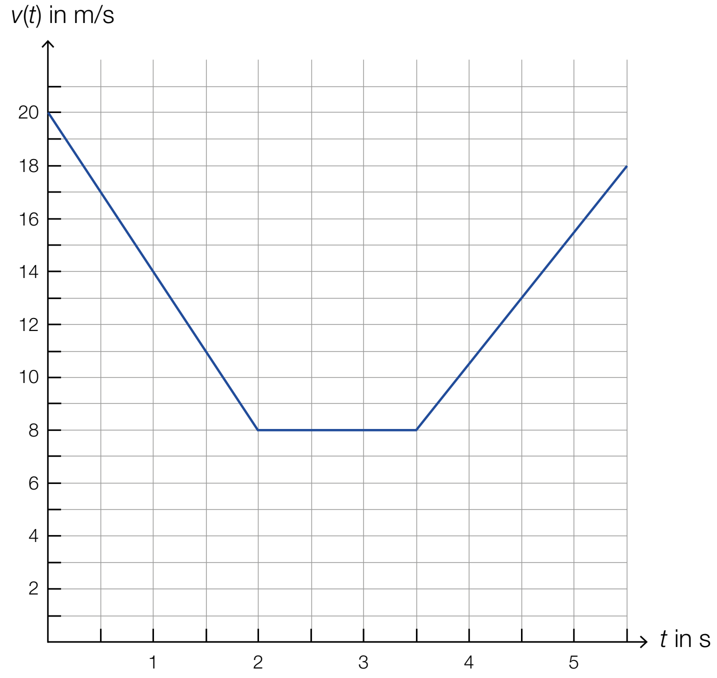
Thema: Alltag

Quellen: –

Motorrad

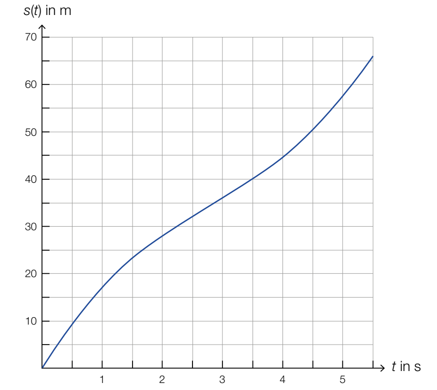
Aufgabennummer: A_167		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Der nachstehende Graph zeigt ein vereinfachtes Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines 5,5 s dauernden Ausschnitts einer Motorradfahrt.

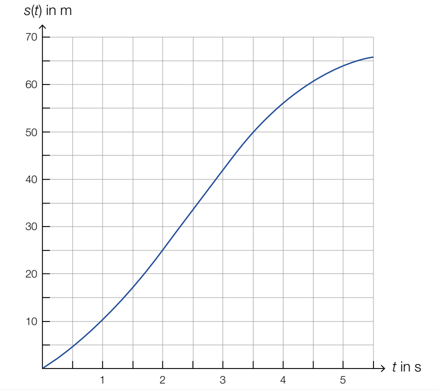


a) – Beschreiben Sie die dargestellte Fahrt des Motorrads in Worten.

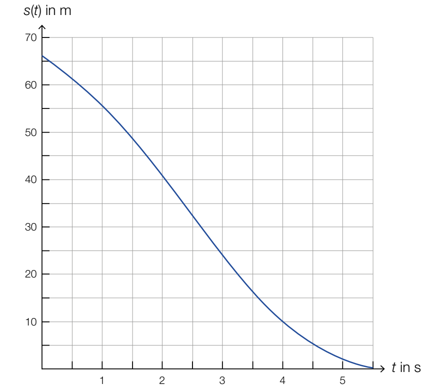
– Kreuzen Sie das zum Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm passende Weg-Zeit-Diagramm an. *[1 aus 5]*



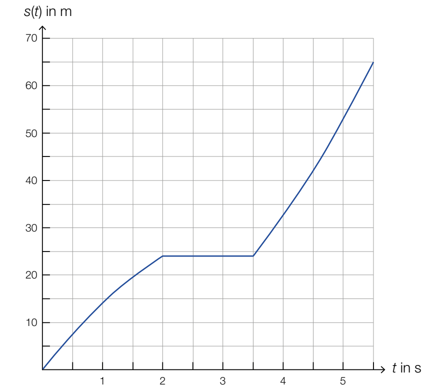
☐



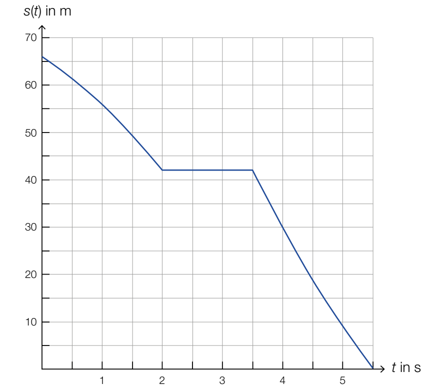
☐



☐



☐



☐

b) – Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie mithilfe des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms die Strecke ermitteln können, die das Motorrad innerhalb der dargestellten 5,5 s zurückgelegt hat.

c) – Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Motorrads im Zeitintervall [0; 5,5].

d) Die Kraft, die auf einen Motorradfahrer beim Durchfahren einer Kurve mit dem Radius r wirkt, kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

F … Kraft in Newton (N)
m … Masse in kg
v … Geschwindigkeit in m/s
r … Kurvenradius in m

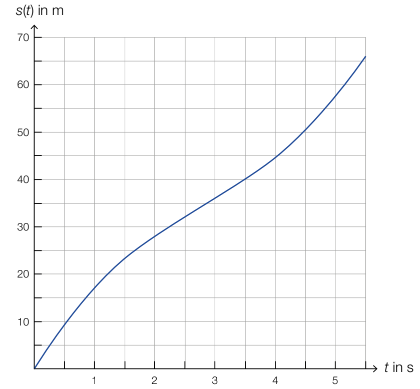
Durch das „Schneiden" der Kurve kann man den Kurvenradius vergrößern und damit bei gleichbleibender Kraft die Kurve schneller durchfahren.

– Geben Sie an, um welchen Faktor der Kurvenradius vergrößert werden muss, damit die Kurve bei gleichbleibender Kraft mit doppelt so großer Geschwindigkeit durchfahren werden kann.
– Zeigen Sie anhand der Formel, dass Ihre Behauptung stimmt.

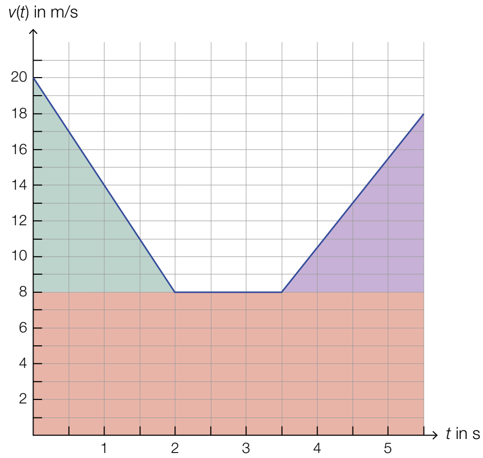
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Motorrad bremst in den ersten 2 s gleichmäßig von 20 m/s auf 8 m/s ab, fährt 1,5 s mit konstanter Geschwindigkeit von 8 m/s weiter und beschleunigt schließlich wieder gleichmäßig auf 18 m/s innerhalb von 2 s.

	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

b) Der zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter der Geschwindigkeitsfunktion. Diese Fläche kann wie, in der nebenstehenden Skizze dargestellt, in 2 Dreiecke und ein Rechteck zerlegt werden.
(Auch die Beschreibung der Berechnung mithilfe des Integrals ist als richtig zu werten).



c) $\bar{a} = \frac{18 - 20}{5{,}5 - 0} = -0{,}363... \approx -0{,}36$
Die mittlere Beschleunigung beträgt rund –0,36 m/s².

d) Um die Geschwindigkeit v verdoppeln zu können, muss der Kurvenradius r um den Faktor 4 vergrößert werden.
Verdoppelt man in der Formel die Geschwindigkeit von v auf $2 \cdot v$ und vervierfacht zugleich den Kurvenradius vor r auf $4 \cdot r$, so erhält man dieselbe Kraft wie zuvor:
$$F = m \cdot \frac{(2 \cdot v)^2}{4 \cdot r} = m \cdot \frac{4 \cdot v^2}{4 \cdot r} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	**Punkteanzahl:**
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 1
d) schwer	d) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Motorradfahrt

Aufgabennummer: A_163

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Jugendliche fahren mit ihren Motorrädern von Jenbach nach Schwaz.

a) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist der Funktionsgraph für die ersten Sekunden eines Motorradfahrers nach der Abfahrt von Jenbach dargestellt.

– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit v in den ersten 20 Sekunden in Kilometern pro Stunde (km/h).

b) Die Geschwindigkeit eines Motorrads kann für eine halbe Stunde Fahrt näherungsweise mit der Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -925 \cdot t^3 + 600 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 15$ mit $0 \leq t \leq 0{,}5$

t ... Zeit in Stunden (h)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorrads zur Zeit t in Kilometern pro Stunde (km/h)

– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg für diese halbe Stunde.

c) Während der Fahrt muss ein Motorradfahrer eine Vollbremsung durchführen. Der Bremsweg s kann näherungsweise mit folgender Formel berechnet werden:

$$s = \frac{v^2}{100}$$

s ... Bremsweg in Metern (m)
v ... Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)

– Erklären Sie, wie sich der Bremsweg verändert, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird.

Der Motorradfahrer möchte die Geschwindigkeit v bei einem vorgegebenen Bremsweg s bestimmen.

– Kreuzen Sie die zutreffende Formel an. *[1 aus 5]*

$v = \frac{\sqrt{100}}{s}$	☐
$v = s^2 \cdot 100$	☐
$v = \sqrt{s} \cdot 10$	☐
$v = \frac{s}{\sqrt{100}}$	☐
$v = \sqrt{\frac{s}{100}}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die mittlere Geschwindigkeit kann mit dem Differenzenquotienten aus den abgelesenen Punkten (0|0) und (20|140) berechnet werden.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{140 - 0}{20 - 0} = 7$$

$\overline{v} = 7$ m/s

Umrechnen in km/h: $7 \cdot 3{,}6 = 25{,}2$

Das Motorrad fährt in den ersten 20 Sekunden mit einer mittleren Geschwindigkeit von 25,2 km/h.

b) $s(t) = \int_0^{0,5} (-925 \cdot t^3 + 600 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 15)\,\mathrm{d}t = 14{,}0469\ldots \approx 14{,}05$

Das Motorrad legt in der halben Stunde rund 14,05 km zurück.

c) Setzt man in die Formel statt v die doppelt so hohe Geschwindigkeit $2v$ ein, ergibt das Quadrat $4v^2$. Das bedeutet: Wenn man mit doppelt so hoher Geschwindigkeit bremst, dann vervierfacht sich der Bremsweg.

[...]	
[...]	
$v = \sqrt{s} \cdot 10$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesinstitut
bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Section-Control*

Aufgabennummer: A_226

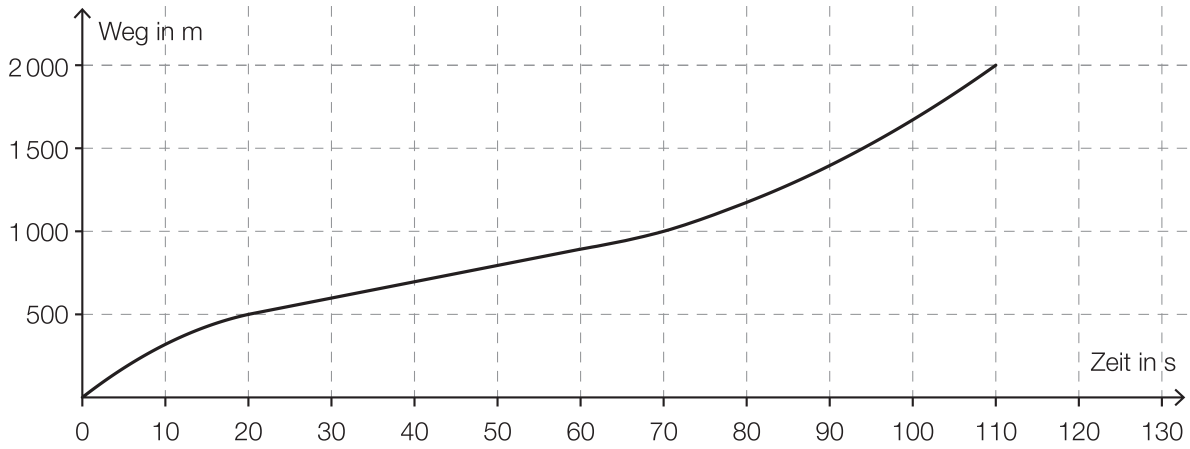
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %.“

– Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

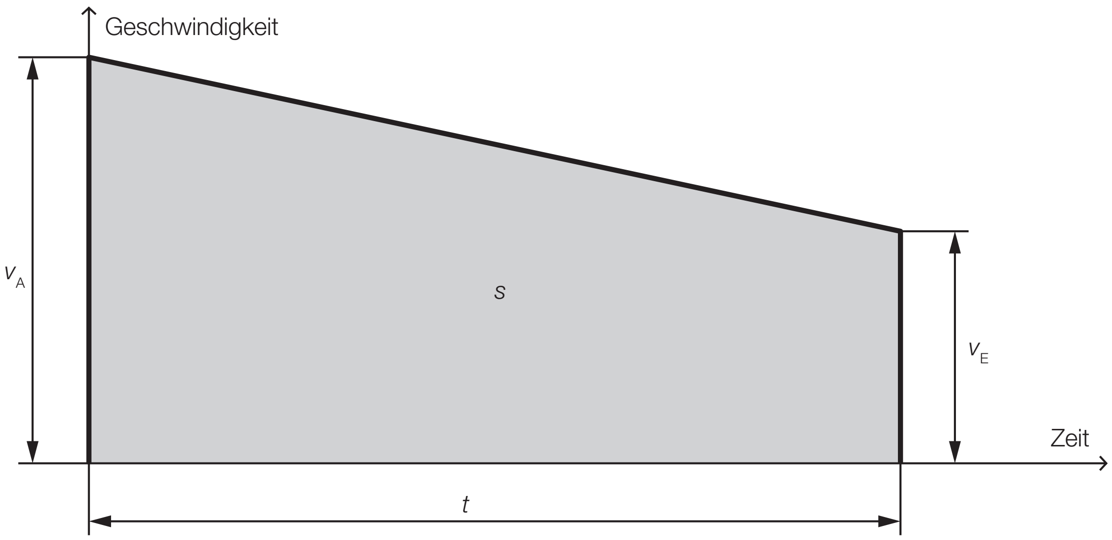
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.
– Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs:

$v_A =$ ______________________________

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14{,}285\ldots \text{ m/s} \approx 14{,}29 \text{ m/s}$

Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte
1 × D: für eine richtige Argumentation

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

U-Bahn*

Aufgabennummer: A_103

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Strecke zwischen der Haltestelle *Rathaus* und der Haltestelle *Volkstheater* benötigt ein Zug der U-Bahn-Linie U2 in Wien durchschnittlich 60 Sekunden. Der zurückgelegte Weg des Zugs zwischen diesen beiden Haltestellen lässt sich annähernd durch die Zeit-Weg-Funktion s wie folgt beschreiben:

$$s(t) = -\frac{1}{180} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2$$

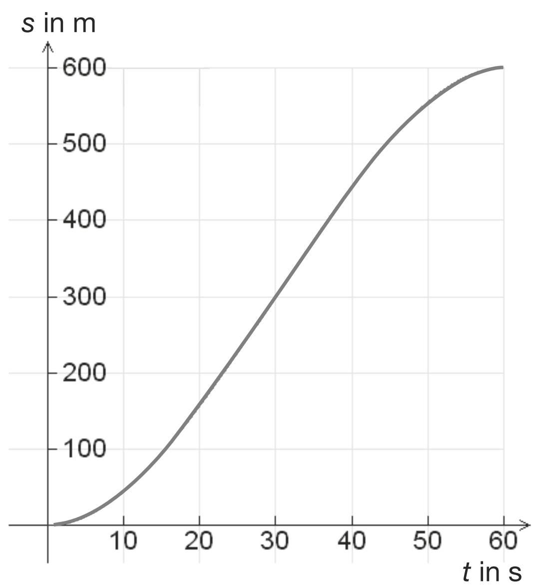
t … Zeit nach der Abfahrt in Sekunden (s), $0 \leq t \leq 60$
$s(t)$ … zurückgelegter Weg in Metern zum Zeitpunkt t

a) – Berechnen Sie die Strecke s in Metern, die der U-Bahn-Zug zwischen den beiden Haltestellen zurücklegt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für das Zeitintervall [30; 45].

c) – Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für t = 45 s.

d) – Erklären Sie, wie am unten abgebildeten Zeit-Weg-Diagramm die Momentangeschwindigkeit abgelesen werden kann.
– Lesen Sie näherungsweise den Zeitpunkt ab, zu dem die Momentangeschwindigkeit maximal ist.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $s(60) = 600$

Die Strecke zwischen den beiden Haltestellen beträgt 600 m.

b) mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

für [30; 45]: $\overline{v} = \frac{506{,}25 - 300}{45 - 30} = 13{,}75$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt 13,75 m/s.

c) Momentangeschwindigkeit $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{60} \cdot t^2 + t$

$v(45) = 11{,}25$

Die Momentangeschwindigkeit für $t = 45$ beträgt 11,25 m/s.

d) Die Momentangeschwindigkeit ist die (momentane) Änderungsrate der Weg-Zeit-Funktion und entspricht geometrisch der Steigung des Graphen der Weg-Zeit-Funktion.
Der Graph der Weg-Zeit-Funktion hat die größte Steigung und damit die maximale Momentangeschwindigkeit im Wendepunkt bei 30 Sekunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 x B für die richtige Berechnung
b) 1 x A für den richtigen Ansatz (Verwendung des Differenzenquotienten)
1 x B für die richtige Berechnung
c) 1 x A für den richtigen Ansatz (Verwendung der 1. Ableitung)
1 x B für die richtige Berechnung
d) 1 x D für die richtige Erklärung
1 x C für das richtige Ablesen des Zeitpunkts mit maximaler Momentangeschwindigkeit

Zugfahrt*

Aufgabennummer: A_149

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

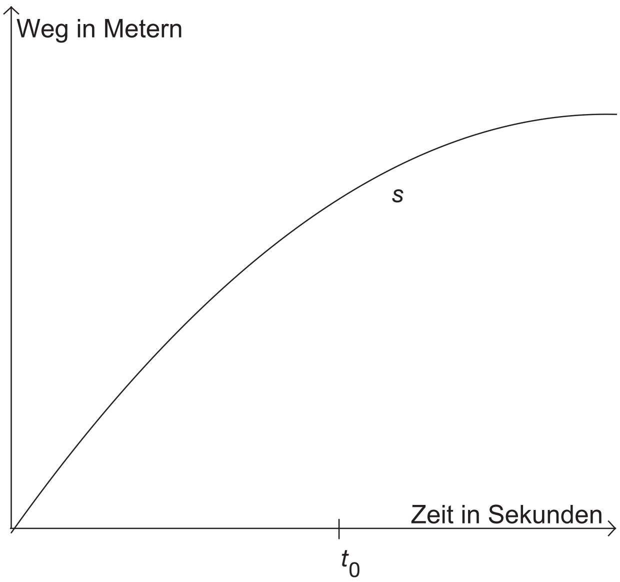
a) Ein Zug fährt ohne Zwischenstopps von der Station *Liesing* zur Station *Mödling*. Die Geschwindigkeit des Zuges auf dieser Strecke kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}16 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t$

t ... Zeit in Minuten (min), seitdem der Zug die Station *Liesing* verlassen hat
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Kilometern pro Minute (km/min)

– Berechnen Sie die Fahrtdauer in Minuten.

b) Der zwischen zwei anderen Stationen zurückgelegte Weg eines Zuges kann durch den Funktionsgraphen im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm beschrieben werden.



– Zeichnen Sie die Tangente im Punkt $P = (t_0 | s(t_0))$ im obenstehenden Diagramm ein.
– Erklären Sie die Bedeutung der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im Folgenden wird modellhaft von einer konstanten Geschwindigkeit (gemessen in km/h) eines Zuges und einer Schnellbahn ausgegangen.
Die Entfernung von Ort *A* nach Ort *B* auf einer geradlinigen Streckenführung beträgt 20 km.
Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v_1 von Ort *A* nach Ort *B*. Die Schnellbahn, deren Geschwindigkeit um ein Drittel geringer ist, fährt in die entgegengesetzte Richtung. Der Zug passiert Ort *A* zum selben Zeitpunkt wie die Schnellbahn Ort *B*. Sie begegnen einander nach 10 Minuten.

– Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 des Zuges.

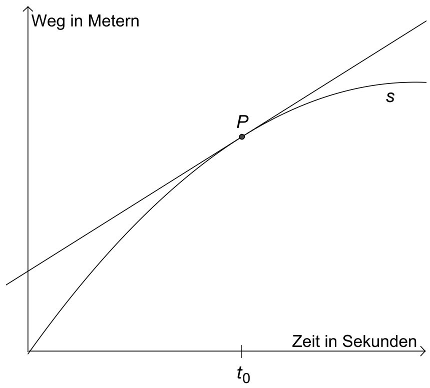
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}16 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t = 0$

$t_1 = 0$ Abfahrt
$t_2 = 4{,}69$ Ankunft in Mödling nach 4,69 min

b)



Der Anstieg der Tangente ist die Momentangeschwindigkeit des Zuges zum Zeitpunkt t_0.

Als richtig zu werten ist auch der Begriff „Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0", aber nicht „Durchschnittsgeschwindigkeit".

c) Ansatz (z. B.: Gleichungssystem):

v_2 ... Geschwindigkeit der Schnellbahn

I: $v_2 = \frac{2}{3} \cdot v_1$
II: $\frac{v_1}{6} + \frac{v_2}{6} = 20$
$\frac{v_1}{6} + \frac{v_1}{9} = 20$

$v_1 = 72$ km/h

Die Geschwindigkeit des Zuges beträgt 72 km/h.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das Erkennen des richtigen Modells (Berechnen der Nullstellen)
1 × B für die richtige Berechnung der Fahrzeit
b) 1 × B für das richtige Einzeichnen der Tangente
1 × D für die richtige Erklärung im Sachzusammenhang
c) 1 × A für einen richtigen Lösungsansatz
1 × B für die richtige Berechnung von v_1