Wahrscheinlichkeitsverteilung

Rookie Level

Brettspiele * (B_257)

b) Bei einem Brettspiel wird mit einem fairen Spielwürfel gewürfelt und man rückt mit der Spielfigur so viele Felder vor, wie die gewürfelte Augenzahl angibt. Würfelt man im ersten Wurf einen Sechser, so würfelt man ein zweites Mal und rückt die dabei gewürfelte Augenzahl zusätzlich vor.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Felder, die man vorrücken darf.

– Stellen Sie eine Tabelle auf, der man alle möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
– Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes in diesem Sachzusammenhang.

Gummibaerchen ziehen * (B_354)

c) Eine kleine Packung Gummibärchen enthält 5 rote Gummibärchen und je 1 grünes, 1 gelbes und 1 weißes Gummibärchen. Es wird ein Gummibärchen nach dem anderen zufällig aus der Packung genommen und nicht wieder zurückgelegt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der benötigten Züge, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

– Erstellen Sie eine Tabelle, der man die möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
– Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Weihnachtsmarkt * (B_479)

d) Jemand beobachtete auf dem Weihnachtsmarkt das Kaufverhalten und bestimmte die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Anzahl n der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von n Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	
≥ 5	0

1) Vervollständigen Sie die obige Tabelle durch Eintragen des fehlenden Wertes.
2) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person.

Sportgeschaeft (B_263)

d) Als Werbestrategie wird den Besuchern ein Gewinnspiel angeboten. Jeder Besucher darf mit einem fairen Spielwürfel, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, einmal würfeln. Zeigt der Würfel die Augenzahl 6, gewinnt man einen 10-Euro-Gutschein, bei der Augenzahl 5 gewinnt man einen 5-Euro-Gutschein. Bei jeder anderen Augenzahl gewinnt man nichts.

– Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns eines Besuchers.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswerts im gegebenen Sachzusammenhang.

Muenzen (2) * (B_493)

c) In einer Geldbörse sind 5 Ein-Euro-Münzen und 7 Zwei-Euro-Münzen. Dorian zieht nacheinander und ohne Zurücklegen 2 zufällig ausgewählte Münzen.

Die Zufallsvariable X gibt diejenigen Geldbeträge an, die Dorian erhalten kann. $P(X = x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau den Geldbetrag x_i zu erhalten.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für das oben beschriebene Zufallsexperiment.

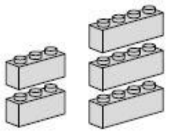
x_i			
$P(X = x_i)$			

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

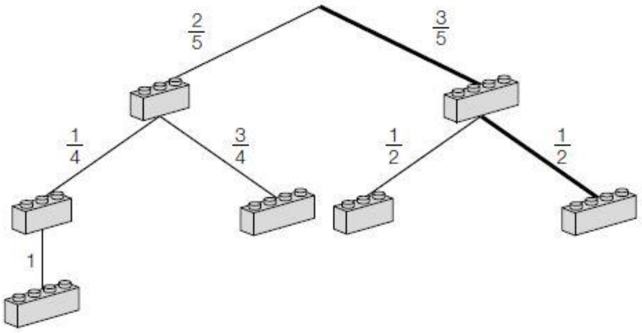
Pro Level

Lego * (B_409)

c) Tobias spielt mit 5 Legosteinen: 2 Steine mit 3 Noppen in einer Reihe und 3 Steine mit 4 Noppen in einer Reihe (siehe nachstehende Abbildung).



Er zieht zufällig (also ohne die Anzahl der Noppen zu sehen oder zu ertasten) einen Legostein nach dem anderen und legt sie aneinander. Er zieht so lange, bis die entstehende Mauer mindestens 7 Noppen lang ist.
Das nachstehende Baumdiagramm zeigt seine möglichen Züge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



– Beschreiben Sie, welches Ereignis *E* durch den fett gezeichneten Pfad beschrieben wird.

Die Zufallsvariable *X* beschreibt die gesamte Anzahl der Noppen in der Mauer.

– Bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Baumdiagramms und tragen Sie diese in der nachstehenden Tabelle ein.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$			

Die Zufallsvariable *Y* beschreibt die Anzahl der Züge, die Tobias benötigt, um eine Mauer mit mindestens 7 Noppen zu erhalten.

– Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen *Y*.

Regentage_in_Gmunden (B_253)

Die angeführte Tabelle zeigt die durchschnittliche Anzahl der Regentage in Gmunden (Oberösterreich) für die Monate Juni bis September.

Monat	durchschnittliche Anzahl der Regentage
Juni	15,2
Juli	13,8
August	12,3
September	11,0

b) In einem Hotel kostet eine bestimmte Zimmerkategorie € 75 pro Übernachtung. Der Hotelier hat für den Monat August nun folgende Idee:
Hotelgäste sollen für jeden Regentag nur mehr die Hälfte bezahlen. Damit der durchschnittliche Zimmerpreis von € 75 erhalten bleibt, erhöht der Hotelier den offiziellen Zimmerpreis.
– Berechnen Sie, wie hoch er den neuen Zimmerpreis ansetzen muss.

Schokoriegel * (B_107)

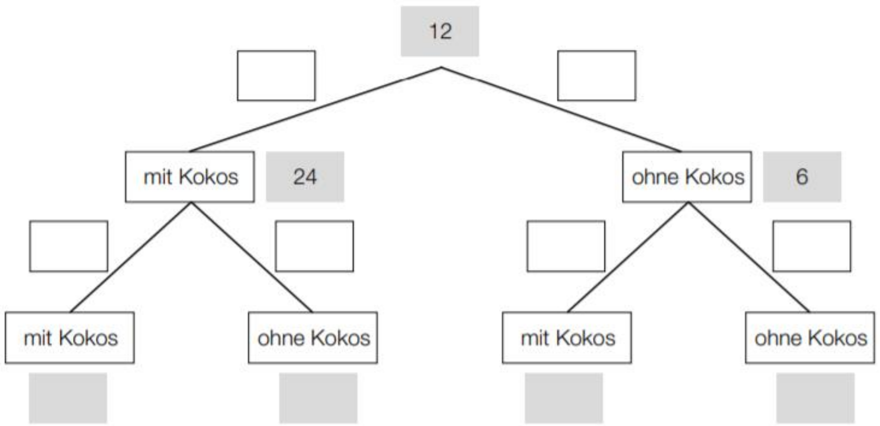
c) In einer Schale sind zwei verschiedene Sorten Schokoriegel: 5 Riegel mit Kokos, 10 Riegel ohne Kokos.

Man bietet Ihnen folgendes Spiel an:

Sie erhalten 12 Spielmünzen. Sie müssen ohne Hinsehen 2-mal hintereinander einen Schokoriegel aus der Schale ziehen und behalten. Jedes Mal, wenn Sie einen Schokoriegel mit Kokos ziehen, wird die Anzahl Ihrer Spielmünzen verdoppelt, andernfalls wird sie halbiert.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten in die weißen Kästchen ein.

2) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels in die grauen Kästchen ein.



Im Folgenden betrachtet man die Zufallsvariable X:

X … Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle alle auftretenden Werte für X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein.

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels			
Wahrscheinlichkeit			

4) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

Brettspiel (B_288)

Bei einem Spiel gewinnt diejenige Person, die als erstes ein vorgegebenes Muster auf ihrem Spielbrett mit roten und grünen Farbsteinen ausgelegt hat.
Bei einem Spielzug wird zuerst mit 2 Zahlenwürfeln („normale" Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6) geworfen. Die aus den Augenzahlen gebildete Summe (Augensumme) bestimmt, wie viele Farbsteine man auf das Spielbrett legen darf.
Anschließend wird für jeden zu legenden Farbstein die Farbe gewürfelt. Dazu wird ein spezieller Farbwürfel mit 4 grünen und 2 roten Seiten verwendet.
Ein Spielzug besteht daher aus dem Werfen der 2 Zahlenwürfel und dem darauffolgenden mehrmaligen Werfen des Farbwürfels.

a) Die Augensumme der beiden Zahlenwürfel kann als Zufallsvariable X betrachtet werden.

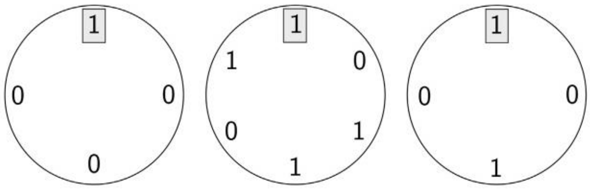
– Erstellen Sie eine Tabelle, in der man für alle möglichen Augensummen der beiden Würfel die jeweilige Wahrscheinlichkeit ablesen kann.

– Interpretieren Sie den Ausdruck $\sum_{i=2}^{12} (i \cdot P(X = i)) = 7$ im gegebenen Sachzusammenhang.

All Star Level

Vergnügungspark (4) (B_293)

c) Im Vergnügungspark wird es einen Glücksspielautomaten mit den 3 nachstehend dargestellten Rädern geben.



Wirft man eine 1-Euro-Münze ein, drehen sich die Räder unabhängig voneinander und kommen nach einer kurzen Zeit zum Stillstand, wobei pro Rad genau eine zufällige Zahl sichtbar ist. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der sichtbaren Einsen auf den 3 Rädern.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die passende Berechnung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$P(X = 1)$	
$P(X \geq 1)$	

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 1, so ist der Gewinn G = € 5. Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 0, so ist der Gewinn G = € 2. Bei allen anderen Resultaten verfällt der Einsatz, also G = € –1.

– Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn für diesen Glücksspielautomaten.

Lösungen

Rookie Level

Brettspiele * (B_257) Lösung

b)

x_i	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \frac{15}{6} + \frac{57}{36} \approx 4{,}08$

Der Erwartungswert gibt an, um wie viele Felder man im Mittel vorrücken darf, wenn man oft spielt.

Gummibaerchen ziehen * (B_354) Lösung

c)

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{56}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{56} + 4 \cdot \frac{1}{56} = 1{,}5$

Der Erwartungswert gibt an, wie viele Züge man im Mittel benötigt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

Weihnachtsmarkt * (B_479) Lösung

d1)

Anzahl n der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von n Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	**0,1**
≥ 5	0

d2) $0 \cdot 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}12 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}46$

Der Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person beträgt 1,46.

Sportgeschaeft (B_263) Lösung

d) $E(\text{„Gewinn"}) = 10 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}50$

Der Erwartungswert beträgt € 2,50.

Der Erwartungswert beschreibt den mittleren Gewinn pro Person unter der Annahme, dass eine große Anzahl an Personen an diesem Spiel teilnimmt.

Muenzen (2) * (B_493) Lösung

c1)

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot 2 = \frac{35}{66}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

c2) $E(X) = 2 \cdot \frac{5}{33} + 3 \cdot \frac{35}{66} + 4 \cdot \frac{7}{22} = \frac{19}{6} = 3{,}166...$

Der Erwartungswert beträgt rund € 3,17.

Pro Level

Lego * (B_409) Lösung

c) E ist das Ereignis, dass 2 Steine mit 4 Noppen gezogen werden.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{10}$

y_i	2	3
$P(Y = y_i)$	0,9	0,1

$E(Y) = 2 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$

Regentage in Gmunden (B_253) Lösung

b) Formel für den Erwartungswert: $E(X) = \sum x_i \cdot p_i$

A … Preis des Angebots

Wahrscheinlichkeit für einen Regentag im August: $p_R = \frac{12{,}3}{31} = 0{,}397$

$75 = 0{,}397 \cdot A \cdot 0{,}5 + (1 - 0{,}397) \cdot A$

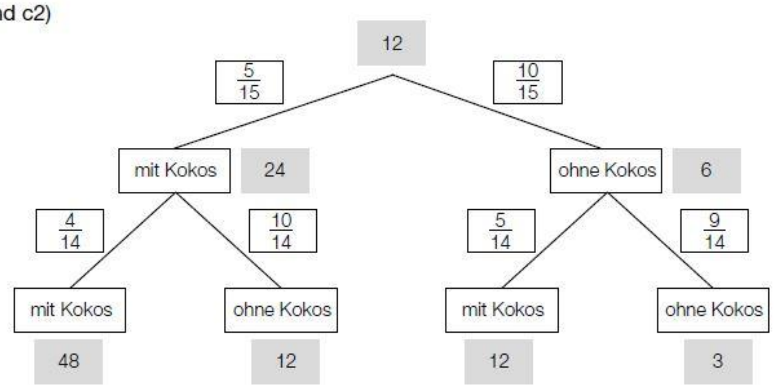
$75 = 0{,}8015 \cdot A$

$A = 93{,}56$

Der Hotelier müsste einen Preis von € 93,56 pro Übernachtung veranschlagen, um mit einem durchschnittlichen Preis von € 75 pro Übernachtung auszusteigen.

Schokoriegel * (B_107) Lösung

c1 und c2)



c3)

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels	48	12	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$	$2 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{10}{21}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$

c4) $E(X) = 48 \cdot \frac{2}{21} + 12 \cdot \frac{10}{21} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{81}{7} = 11{,}57\ldots$

Brettspiel (B_288) Lösung

a)

Augensumme x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit dem Ausdruck wird der Erwartungswert der Zufallsvariablen X berechnet. Man kann erwarten, dass man bei oftmaliger Wiederholung des Spielzugs im Mittel 7 Farbsteine pro Runde auf das Spielbrett legen darf.

All Star Level

Vergnügungspark (4) (B_293) Lösung

c)

$P(X = 1)$	C
$P(X \geq 1)$	B

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Gewinnerwartung =

$$5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = € -0{,}125$$