

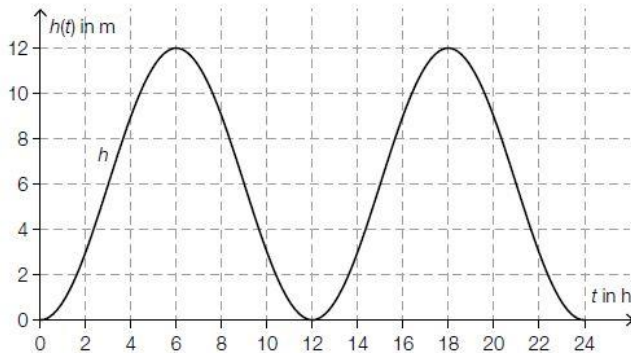
Trigonometrische Funktionen

Rookie Level.....	2
Ebbe und Flut * (B_414).....	2
Fedependel * (B_431).....	2
Harmonische_Schwingung (B_053).....	3
Programmieren (B_031).....	4
Servomotor * (B_213).....	4
Wasserstand_in_einem_Hafenbecken (B_085).....	5
Wings for Life World Run * (B_022).....	5
Sightseeing in London (B_361).....	6
Blutdruck* (B_448).....	6
Pro Level.....	7
Der_Schall (B_067).....	7
Im Moebelhaus * (B_427).....	7
Riesenraeder * (B_311).....	8
Sinusfunktionen * (B_437).....	9
All Star Level.....	11
Energieverbrauch * (B_214).....	11
Lösungen.....	12
Rookie Level.....	12
Pro Level.....	16
All Star Level.....	18

Rookie Level

Ebbe und Flut * (B_414)

- a) Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet. Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion h mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $B > 0$.



- Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und B ab.
- Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω .
- Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ .

- b) Die Wassertiefe in einem Hafenbecken kann näherungsweise durch die folgende Funktion H beschrieben werden:

$$H(t) = 6 + 1,8 \cdot \cos(0,507 \cdot t)$$

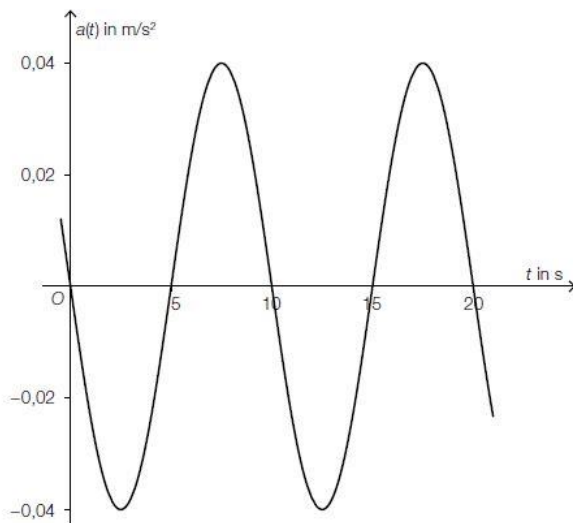
t ... Zeit nach Mitternacht in h

$H(t)$... Wassertiefe zur Zeit t in m

- Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie die Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens.
- Geben Sie an, welche Zeitpunkte im gegebenen Sachzusammenhang durch die Lösungen der Gleichung $H'(t) = 0$ berechnet werden.

Federpendel * (B_431)

- a) Das nachstehende Beschleunigung-Zeit-Diagramm zeigt den sinusförmigen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers durch die Federkraft. Es gilt: $a(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$.



- Bestimmen Sie A , ω und φ mithilfe des obigen Diagramms.
- Markieren Sie im obigen Diagramm alle Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist.

b) Die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit kann durch eine Funktion v mit $v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden ($A, \omega > 0$).

– Vervollständigen Sie die nachstehende Aussage mit $t_2 \neq t_1$ so, dass sie richtig ist.

Für $t_2 = t_1 + \frac{\boxed{} \cdot \pi}{\boxed{}}$ ist $\int_{t_1}^{t_2} A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) dt = 0$.

– Zeigen Sie, dass $A \cdot \omega$ die maximale Steigung der Funktion v ist.

c) Die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer Federkraft wird durch Reibung gedämpft. Für die Auslenkung aus der Ruhelage (Startposition) gilt:

$$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t) \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in s

$f(t)$... Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t in m

– Bestimmen Sie diejenigen Intervalle, in denen der Betrag der Auslenkung aus der Ruhelage größer als 0,2 m ist.

Harmonische Schwingung (B_053)

Die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt allgemein die harmonische Schwingung eines mathematischen Pendels.

A ... Amplitude in Metern (m)

T ... Zeitdauer in Sekunden (s), die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt

φ ... Phasenwinkel im Bogenmaß (rad)

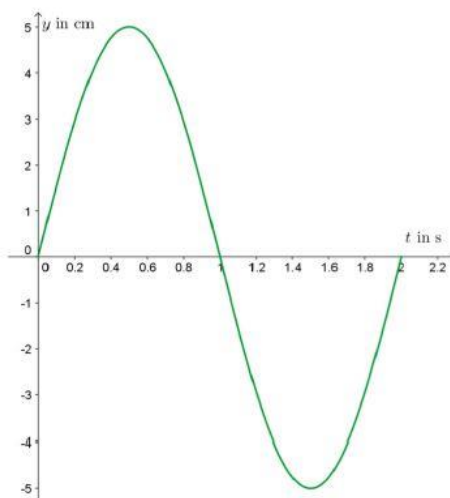
$y(t)$... Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t in Metern (m)

ω ... Kreisfrequenz (s^{-1}), $\omega = \frac{2\pi}{T}$

a) – Ermitteln Sie die Funktion für die Geschwindigkeit v des harmonisch schwingenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t .
– Bestimmen Sie daraus allgemein den Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den Umkehrpunkt erreicht.

b) Der zeitliche Verlauf der Auslenkung einer vollen Schwingung eines harmonisch schwingenden Pendels ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.

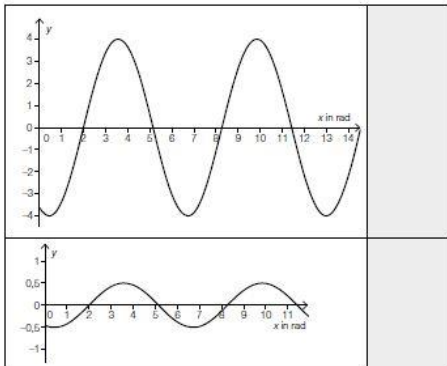
– Interpretieren Sie den Funktionsgraphen in Bezug auf die Auslenkung und die Geschwindigkeit des Pendels an den Extremstellen und an den Nullstellen.
– Geben Sie jeweils die ungefähren Zahlenwerte dieser Größen an.



c) – Geben Sie für ein harmonisch schwingendes Pendel mit $A = 2$ cm, $\omega = 2$ s^{-1} und $\varphi = 0,5$ rad die lineare Näherung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ s an. Runden Sie die Parameter auf 3 Dezimalstellen.
– Berechnen Sie den relativen Fehler, der sich bei Berechnung der Auslenkung nach $t = 0,2$ s bei Verwendung dieser Näherung ergibt.

Programmieren (B_031)

- a) Um das Auf-und-ab-Fliegen zweier Hexen am Bildschirm darzustellen, werden Wellenlinien benötigt.
- Ordnen Sie den beiden Flugkurven jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu. [2 zu 4]



A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

- Erklären Sie den Einfluss des Parameters c in der allgemeinen Sinusfunktion $y(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$.

Servomotor * (B_213)

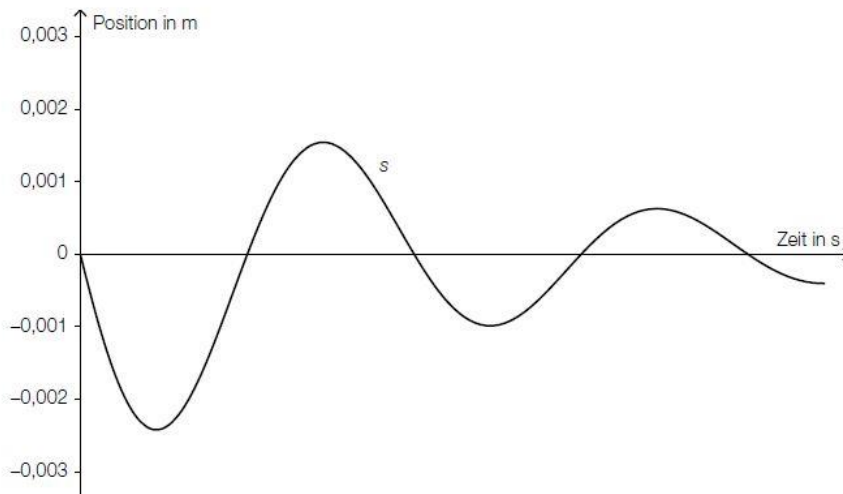
- a) Ein Servomotor steuert die Bewegung eines Bauteils. Diese kann näherungsweise durch folgende Funktion s beschrieben werden:

$$s(t) = -0,003 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t) \quad \text{mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in Sekunden (s)

$s(t)$... Position des Bauteils bezogen auf die Ausgangslage zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der Graph der Funktion s ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



- Markieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ in der obigen Abbildung.
- Interpretieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ im gegebenen Sachzusammenhang.
- Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt dieser Bewegung, zu dem die Geschwindigkeit erstmals null beträgt.

Wasserstand_in_einem_Hafenbecken (B_085)

Die Höhe des Wasserstandes in einem Hafenbecken an der Ostsee lässt sich aufgrund der Gezeiten annähernd durch folgende Funktion H beschreiben:

$$H(t) = 4 + 1,5 \cdot \cos(0,507 \cdot t)$$

$H(t)$... Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
 t ... Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht am 12. März, $0 \text{ h} \leq t \leq 24 \text{ h}$

- a) – Berechnen Sie die Wassertiefe im Hafenbecken am Morgen des 12. März um 8:15 Uhr.
- c) Die Funktion für die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit t lautet allgemein:

$$H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter im angegebenen Zusammenhang.

- d) An einem bestimmten Tag beträgt der Wasserstand im Hafenbecken um 3:06 Uhr 9,5 m und jener um 9:18 Uhr 2,5 m.
 – Berechnen Sie die Größe der Parameter a und b , wenn der Wasserstand durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$H_1(t) = a + b \cdot \sin(0,507 \cdot t)$$

$H_1(t)$... Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
 t ... Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht, $0 \text{ h} \leq t \leq 24 \text{ h}$

– Ermitteln Sie, ob ein Schiff mit einem Tiefgang (Distanz von der Wasserlinie bis zum tiefsten Punkt eines Schiffs) von 5,5 m um 18:00 Uhr noch im Hafen anlegen kann.

Wings for Life World Run * (B_022)

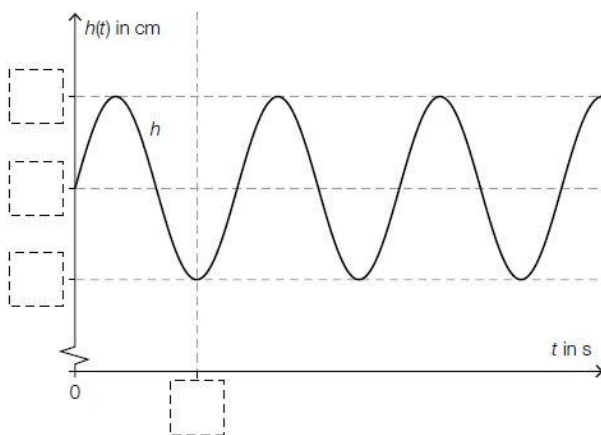
- c) Beim Laufen bewegt sich der Schwerpunkt des menschlichen Körpers in regelmäßigen Zeitabständen auf und ab.

Modellhaft kann der zeitliche Verlauf der Höhe des Schwerpunkts durch die Funktion h beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$$h(t) = 5 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t) + 110$$

t ... Zeit in s

$h(t)$... Höhe des Schwerpunkts über dem Boden zur Zeit t in cm



– Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Sightseeing in London (B_361)

- a) Das *London Eye* ist das höchste Riesenrad Europas. Der Aufhängepunkt einer Gondel beschreibt einen Kreis mit einem Durchmesser von 121 m und erreicht eine maximale Höhe von 135 m. Das sich mit konstanter Geschwindigkeit drehende Rad benötigt für eine volle Umdrehung 40 Minuten.

Die Höhe des Aufhängepunkts einer Gondel über dem Boden kann in Abhängigkeit von der Zeit durch eine allgemeine Sinusfunktion h beschrieben werden:

$$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$$

t ... Zeit in min

$h(t)$... Höhe des Aufhängepunkts über dem Boden zur Zeit t in m

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Aufhängepunkt an der tiefsten Stelle.

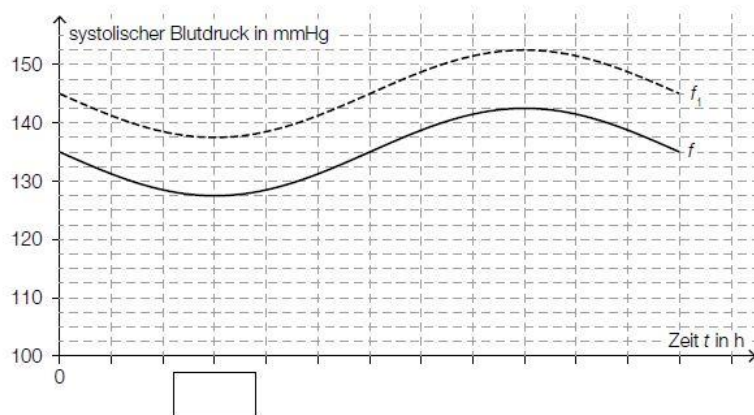
– Ermitteln Sie die Parameter a , b , c und d .

Wählt man für $t = 0$ denjenigen Zeitpunkt, zu dem sich der Aufhängepunkt an der höchsten Stelle befindet, so wird die Höhe des Aufhängepunkts in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion g beschrieben.

– Erklären Sie, in welchen Parametern sich die Funktion g von h unterscheidet.

Blutdruck* (B_448)

- b) Die zeitliche Entwicklung des sogenannten *systolischen Blutdrucks* einer Testperson wird durch eine Funktion f modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion f wird beschrieben durch:

$$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 135$$

t ... Zeit in h

$f(t)$... systolischer Blutdruck zur Zeit t in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg)

a ... Parameter

- 1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zeitangabe in das dafür vorgesehene Kästchen ein.
- 2) Bestimmen Sie den Parameter a .

Der Graph der Funktion f_1 in der obigen Abbildung entsteht durch vertikale Verschiebung des Graphen von f .

- 3) Erstellen Sie ausgehend von f eine Funktionsgleichung für f_1 .

Pro Level

Der_Schall (B_067)

- c) Ein einzelner Ton kann durch eine Sinusschwingung dargestellt werden. Die Hörbarkeit eines Tones für den Menschen hängt von der Lautstärke (Amplitude A) und von der Tonhöhe (Frequenz f) ab. Je größer die Amplitude ist, desto lauter ist der Ton. Je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton.

Die folgende Funktion gibt die Schwingung einer Schallwelle für den Kammerton a mit einer Frequenz $f = 440$ Hz wieder:

$$y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot 440 t)$$

$y(t)$... Auslenkung in Längeneinheiten zum Zeitpunkt t

t ... Zeit in Sekunden (s)

A ... Amplitude in Längeneinheiten

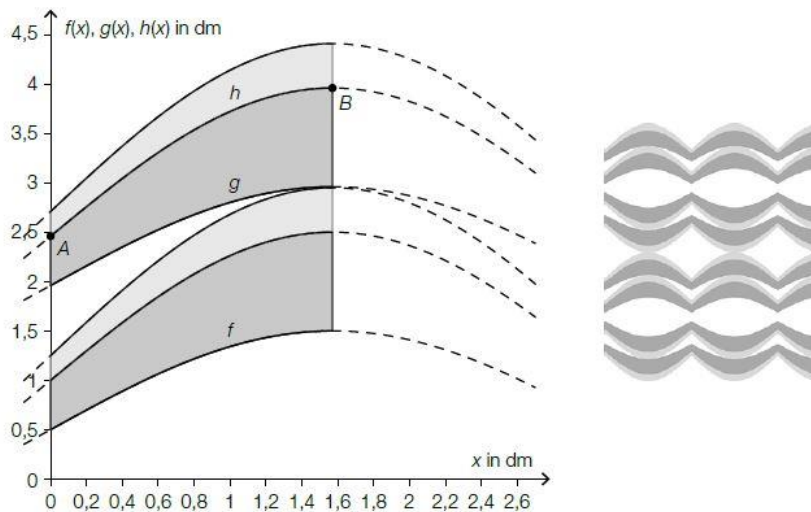
- Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für den Kammerton a mit doppelter Lautstärke auf.

Als *Hörgrenze* bezeichnet man diejenige Frequenz, bei der ein Ton einer bestimmten Lautstärke gerade noch hörbar ist. Die Hörgrenze bei einem Menschen im Alter von 35 Jahren beträgt etwa 15 kHz.

- Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für diese Frequenz auf.

Im Moebelhaus * (B_427)

- b) Ein Stoffmuster im Retro-Stil entsteht, indem ein Ausschnitt immer wieder kopiert und gespiegelt wird. Dabei werden die Begrenzungslinien als Graphen von Funktionen modelliert (siehe nachstehende Abbildungen).



Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = \sin(x) + 0,5$$

$x, f(x)$... Koordinaten in dm

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f entlang der vertikalen Achse um 1,46 dm nach oben.

- Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

Der Graph der Funktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(x) + b$ verläuft durch den Punkt $A = (0 | 2,46)$ und den Hochpunkt $B = \left(\frac{\pi}{2} | 3,96\right)$.

- Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b .

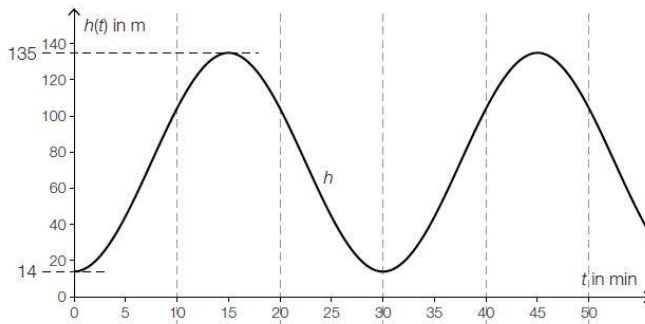
Riesenraeder * (B_311)

Dreht sich ein Riesenrad mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$$

- a) Das *London Eye*, eines der größten Riesenräder, dreht sich so langsam, dass es für das Ein- und Aussteigen der Fahrgäste nicht anhalten muss.

Der Graph der Funktion h ist in folgender Abbildung dargestellt:



- Lesen Sie den Durchmesser des Riesenrades ab.
- Ermitteln Sie den Parameter ω .
- Ermitteln Sie den Parameter c .

- b) Dreht sich das *Wiener Riesenrad* ohne Zwischenstopps, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$$h(t) = 30,48 \cdot \sin(0,02464 \cdot t) + 34,27$$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Sekunden (s)

$h(t)$... Höhe, in der sich diese Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in Metern (m)

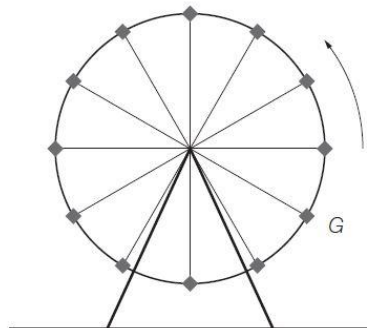
- Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem diese Gondel erstmals eine Höhe von 60 m erreicht.
- Bestimmen Sie die Zeitdauer, während derer sich die Gondel im Laufe einer Umdrehung in einer Höhe von mindestens 60 m befindet.

- c) Ein Riesenrad mit 12 gleichmäßig verteilten Gondeln dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet, ist:

$$h(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot t + \varphi\right) + 20$$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in s

$h(t)$... Höhe, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in m



- Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) sich eine Gondel entlang der Kreisbahn bewegt.

Die Gondel G befindet sich zur Zeit $t = 0$ s an der in der oben stehenden Skizze dargestellten Position.

- Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie den Parameter φ für die Funktion h der Gondel G ermitteln können.

Sinusfunktionen * (B_437)

- a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

$$U_Z = 150 \text{ V}$$

$$U_L = 100 \text{ V}$$

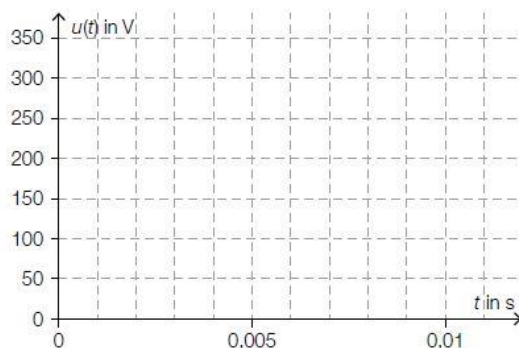
Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

t ... Zeit in s

$u(t)$... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

- 1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.



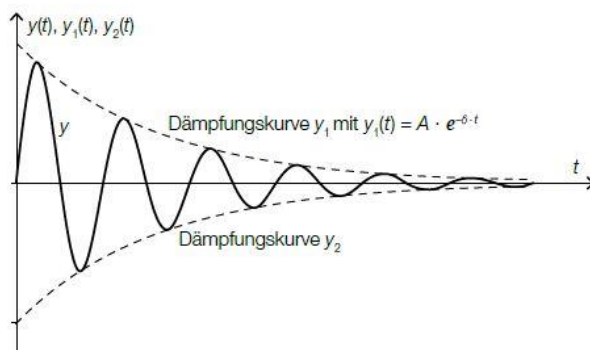
- 2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall $[0; 0,01]$ leuchtet.

- b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

t ... Zeit

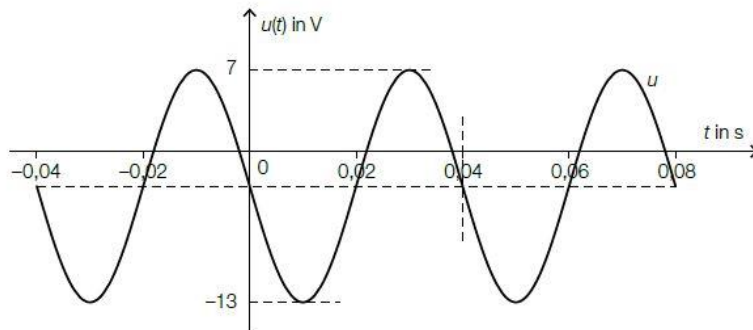
$y(t)$... Auslenkung zur Zeit t



- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).
- 2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k , an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:

$$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega} \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.



- 1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab.
- 2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω .
- 3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ .

All Star Level

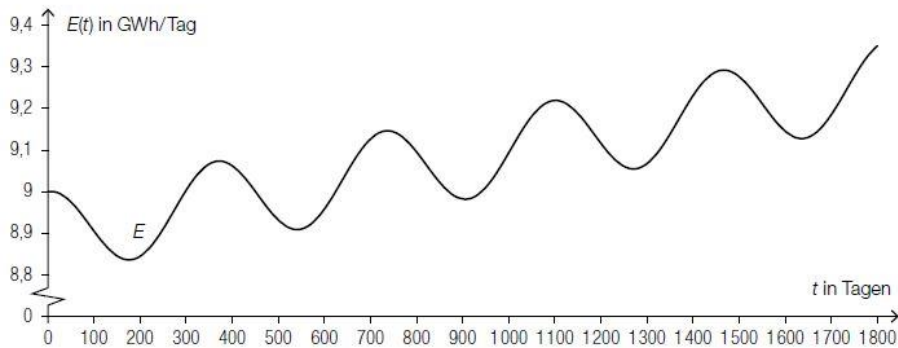
Energieverbrauch * (B_214)

Der Energieverbrauch einer Großstadt unterliegt Schwankungen. Mit der Funktion E wird der voraussichtliche Energieverbrauch pro Tag für die nächsten 5 Jahre modelliert:

$$E(t) = 8,9 + 0,0002 \cdot t + 0,1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in Tagen

$E(t)$... Energieverbrauch zur Zeit t in Gigawattstunden pro Tag (GWh/Tag)



- a) 1) Lesen Sie aus dem oben dargestellten Graphen ab, nach wie vielen Tagen der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen wird.
2) Berechnen Sie die Minimumstelle der Funktion E im Zeitintervall $[400; 700]$.
- b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik diejenige trapezförmige Fläche, deren Flächeninhalt mittels $\frac{E(1400) + E(1500)}{2} \cdot 100$ berechnet wird.
- c) 1) Schreiben Sie die reelle Funktion f mit $f(t) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right)$ mithilfe der Winkel-
funktion Cosinus an.

$$f(t) = \cos\left(\underline{\hspace{2cm}}\right)$$

Lösungen

Rookie Level

Ebbe und Flut * (B_414) Lösung

- a) $A = 6, B = 6$
(keine Ablesetoleranz)

Die Periodendauer T ist 12, daher ergibt sich:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

$t_0 = 3$ h und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

(Jeder Wert $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

- b) Im Durchschnitt beträgt die Wassertiefe im Hafenbecken 6 m.

8:20 Uhr entspricht $t = \frac{25}{3}$
 $H\left(\frac{25}{3}\right) = 5,15\dots$

Die Wassertiefe um 8:20 Uhr beträgt rund 5,2 m.

Man berechnet diejenigen Zeitpunkte (in h nach Mitternacht), zu denen der Wasserstand maximal bzw. minimal ist.

Federpendel * (B_431) Lösung

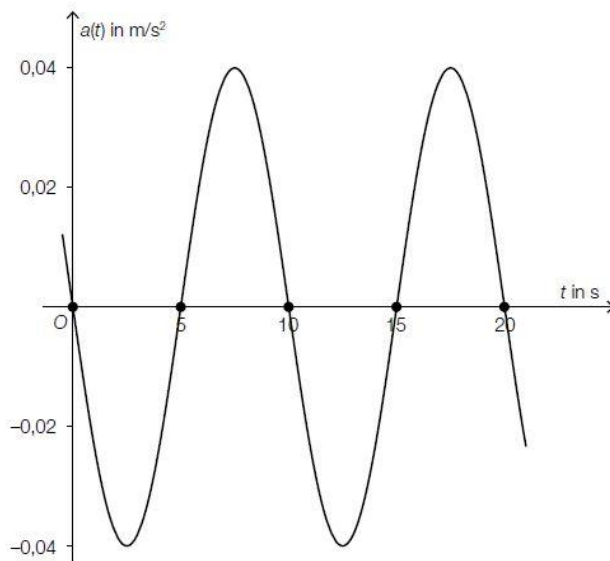
- a) $A = 0,04$
Die Periodendauer T ist 10, daher ergibt sich:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$t_0 = 5$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$$\varphi = -5 \cdot \frac{\pi}{5} = -\pi$$

(Jeder Wert $\varphi = -\pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)



- b) $t_2 = t_1 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

Auch ein Vielfaches der Periodendauer ist als richtig zu werten.

$$v'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Da der maximale Wert von $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ gleich 1 ist, ergibt sich als maximale Steigung von v genau $A \cdot \omega$.

- c) Lösen der Gleichungen $f(t) = \pm 0,2$ mittels Technologieeinsatz:
]0,07...; 0,87...[und]1,33...; 1,60...[

Harmonische Schwingung (B_053) Lösung

a) $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
 $v(t) = y'(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega$

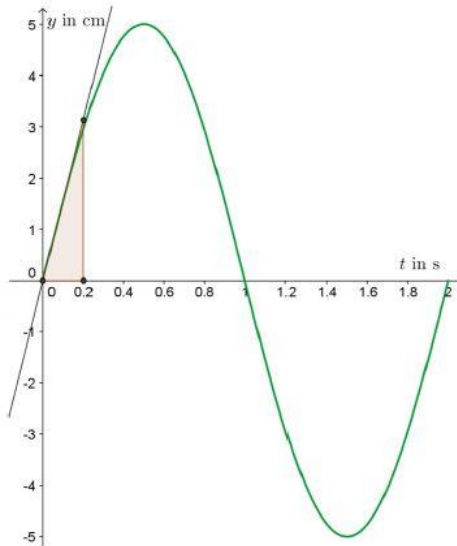
an den Umkehrpunkten gilt: $v(t) = 0$
 Daher ist die Gleichung $A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega = 0$ nach t aufzulösen.

$$t = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(2n+1)\pi - 2\varphi}{2}, \quad n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- b) Der Pendelkörper erreicht die Extremstellen mit einer Auslenkung von 5 cm nach 0,5 s und nach 1,5 s. Er ändert an diesen Stellen die Bewegungsrichtung, die momentane Geschwindigkeit ist jeweils null.

An den Nullstellen bei $t = 0$ s, 1 s und 2 s beträgt die Auslenkung null. Der Pendelkörper erreicht an diesen Stellen jeweils die größte Geschwindigkeit. Die Größe der Geschwindigkeit entspricht dem Anstieg der Kurve in den Nullstellen. Der Anstieg der Tangente in $t = 0$ ist ca. 15,7.

(Alesbar aus der Grafik. Falls jemand mit der 1. Ableitung argumentiert, so ist das nicht verlangt, aber auch richtig!) Die Geschwindigkeit beträgt zu Beginn sowie nach 2 Sekunden jeweils 15,7 cm/s. Nach 1 Sekunde beträgt die Steigung -15,7. Das bedeutet, dass sich der Pendelkörper mit einer Geschwindigkeit von 15,7 cm/s in Richtung abnehmender y -Koordinaten bewegt.



Die Ablesung aus der Grafik kann je nach verwendeter Technologie mit Ungenauigkeiten behaftet sein. Das ist zu tolerieren.

- c) Die lineare Näherung ist die Tangente zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$y(t) = 2 \cdot \sin(2t + 0,5) \quad y(0) \approx 0,959$$

$$k(t) = y'(t) = 4 \cdot \cos(2t + 0,5)$$

$$k(0) \approx 3,510$$

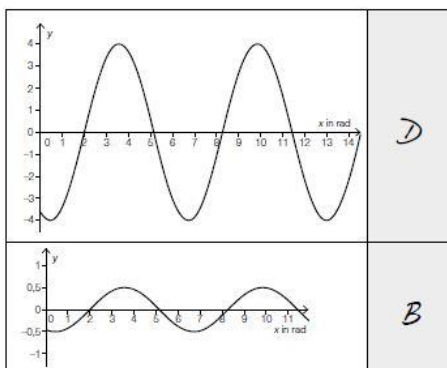
Gleichung der Tangente: $y = 3,510t + 0,959$

Der relative Fehler wird ermittelt, indem man die Differenz zwischen dem genäherten und dem wahren Wert bildet und die Differenz der beiden durch den wahren Wert dividiert.

$$\text{relativer Fehler: } \frac{1,661 - 1,567}{1,567} \approx 0,06 = 6 \%$$

Programmieren (B_031) Lösung

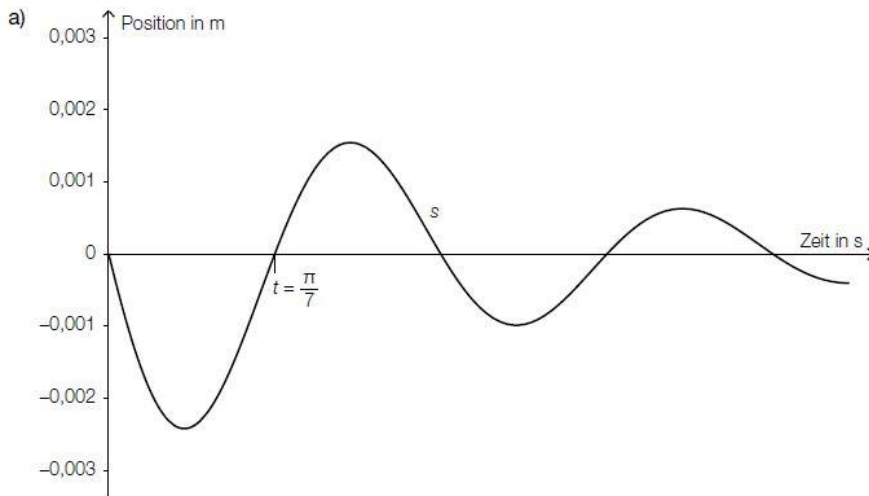
a)



A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

Ein positiver Parameter c verschiebt den Funktionsgraphen der Funktion um c nach oben, ein negativer Parameter c verschiebt die Funktion um $|c|$ nach unten.

Servomotor * (B_213) Lösung



Nach $\frac{\pi}{7}$ Sekunden befindet sich das Bauteil erstmals wieder in der Ausgangslage.

Zeitpunkte mit Geschwindigkeit 0 ergeben sich aus: $s'(t) = 0$.

Lösung mittels Technologieeinsatz (für den ersten Zeitpunkt mit $s'(t) = 0$):

$t = 0,204\dots$

Nach etwa 0,20 Sekunden ist die Geschwindigkeit erstmals null.

Wasserstand in einem Hafenbecken (B_085) Lösung

- a) Umrechnung der Uhrzeit: 8:15 Uhr entspricht 8,25 Stunden.

$$H(8,25) = 4 + 1,5 \cdot \cos(0,507 \cdot 8,25)$$

$$H(8,25) = 3,24$$

Die Wassertiefe beträgt um 8:15 Uhr 3,24 m.

- c) Funktion: $H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$

$a \dots$ gibt die Amplitude der Cosinusfunktion (maximale Höhe des Wasserstandes relativ zu d) an

$b \dots$ gibt die Frequenz an

$d \dots$ verschiebt die Cosinusfunktion entlang der y -Achse und beschreibt die mittlere Wasserstandshöhe

Alle anderen richtigen Interpretationen aus der Physik sind zulässig.

- d) $H_i(t) = a + b \cdot \sin(0,507 \cdot t)$

Einsetzen der angegebenen Werte und vereinfachen liefert folgende Gleichungen:

$$\text{I: } 9,5 = a + b \cdot \sin(0,507 \cdot 3,1)$$

$$\text{II: } 2,5 = a + b \cdot \sin(0,507 \cdot 9,3)$$

$$\text{I: } 9,5 = a + b \cdot 0,999999591687397$$

$$\text{II: } 2,5 = a - b \cdot 0,999996325188573 \rightarrow a \approx 6, b \approx 3,5$$

$$H_i(t) = 6 + 3,5 \cdot \sin(0,507 \cdot t)$$

$$H_i(18) = 6 + 3,5 \cdot \sin(0,507 \cdot 18)$$

$$H_i(18) = 7,03$$

Ja, ein Schiff mit einem Tiefgang von 5,5 m kann noch in diesem Hafen anlegen, da der Wasserstand um 18:00 Uhr 7,03 m beträgt.

Sightseeing in London (B_361) Lösung

- a) Der Radius des Rades entspricht der Amplitude a der Sinusfunktion: $a = \frac{121}{2} = 60,5$
 b ist die Kreisfrequenz: $b = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$

c ist der Nullphasenwinkel. Die Funktion h soll bei $t = 0$ ein Minimum haben. Als Werte für c kommen daher alle Minimumstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ infrage: $c = -\frac{\pi}{2}$ oder $c = \frac{3\pi}{2}$ oder ...

d bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen. Mit $d = 0$ wäre $h(0) = -60,5$, da jedoch $h(0) = 14$ sein muss, ist $d = 14 + 60,5 = 74,5$.

$$a = 60,5; \quad b = \frac{\pi}{20}; \quad c = -\frac{\pi}{2}; \quad d = 74,5$$

Die Amplitude a (Radius des Kreises), die Kreisfrequenz b (Drehgeschwindigkeit) und der Abstand d bleiben gleich.

Befindet sich der Aufhängepunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im höchsten Punkt, ändert sich nur der Nullphasenwinkel, wodurch eine Verschiebung des Graphen in horizontaler Richtung bewirkt wird.

Blutdruck * (B_448) Lösung

b1) Im Kästchen ist die Zahl 6 einzutragen.

b2) $a = -7,5$

b3) $f_1(t) = f(t) + 10$

oder:

$$f_1(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 145$$

Pro Level

Der Schall (B_067) Lösung

$$\begin{aligned} \text{c) } y(t) &= 2A \cdot \sin(2\pi \cdot 440t) \\ y(t) &= \sin(30\,000\pi \cdot t) \end{aligned}$$

Schwingungen mit anderer Amplitude sind ebenfalls korrekt.

Im Moebelhaus * (B_427) Lösung

$$\text{b) } g(x) = \sin(x) + 1,96 \text{ oder } g(x) = f(x) + 1,46$$

$$2,46 = a \cdot \sin(0) + b \Rightarrow b = 2,46$$

$$3,96 - 2,46 = 1,5 \Rightarrow a = 1,5$$

Riesenraeder * (B_311) Lösung

$$\text{a) Durchmesser: } d = 121 \text{ m}$$

Aus der Periodendauer $T = 30 \text{ min}$ ergibt sich:

$$\omega = \frac{2\pi}{30} \text{ min}^{-1} \approx 0,21 \text{ min}^{-1}$$

Verschiebung nach oben: $c = 74,5 \text{ m}$

$$\text{b) } 60 = 30,48 \cdot \sin(0,02464 \cdot t) + 34,27$$

$$t_1 = 40,78 \dots \text{ s} \approx 41 \text{ s}$$

$$t_2 = 86,71 \dots \text{ s} \approx 87 \text{ s}$$

$$t_2 - t_1 \approx 46 \text{ s}$$

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

$$\text{c) Mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: } T = 120 \text{ s.}$$

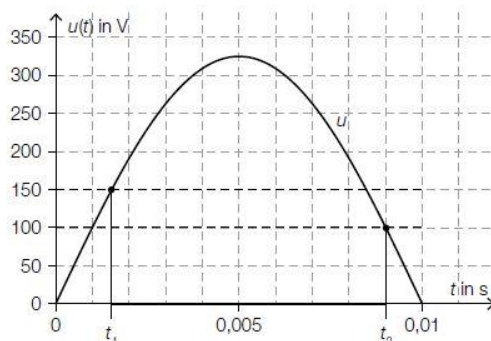
Umfang des Kreises: $u = 30\pi \text{ m}$

$$v = \frac{30\pi}{120} \text{ m/s} \approx 0,785 \text{ m/s} \approx 2,827 \text{ km/h}$$

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30° . φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher -30° bzw. 330° , im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Sinusfunktionen * (B_437) Lösung

a1)



$$\text{a2) } u(t_1) = 150 \Rightarrow t_1 = 0,00152 \dots$$

$$u(t_2) = 100 \Rightarrow t_2 = 0,00900 \dots$$

$$\frac{t_2 - t_1}{0,01} = 0,7477 \dots$$

Im Zeitintervall $[0; 0,01]$ leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$$

$$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{N} \Rightarrow t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

c1) $A = 10$

$$d = -3$$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,04} = 50 \cdot \pi$$

c3) $t_0 = -0,02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$$\varphi = 0,02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$$

(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

All Star Level

Energieverbrauch * (B_214) Lösung

a1) Nach etwa 1330 Tagen wird der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen.
Toleranzbereich: [1300; 1350]

a2) $E'(t) = 0$ mit $400 \leq t \leq 700$

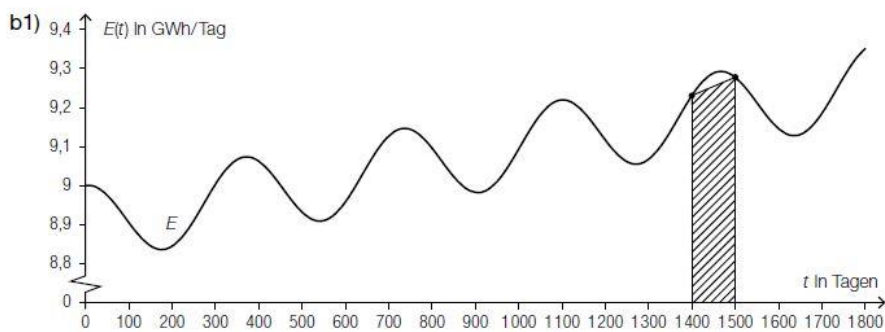
oder:

$$0,0002 + \frac{\pi}{1825} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ mit } 400 \leq t \leq 700$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 540,7\dots$$

Dass es sich bei der berechneten Stelle um eine Minimumstelle handelt, ist aus der Grafik ersichtlich.



c1) $f(t) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365}\right)$

Auch $\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + 2 \cdot k \cdot \pi\right)$ mit einem beliebigen $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.