

# Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

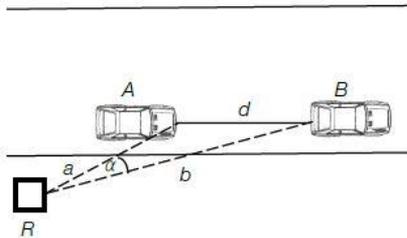
Rookie Level.....	2
Abstand_halten (B_102).....	2
Dachfenster_1 (B_065) .....	2
Erlebnisgarten (1) (B_241) .....	2
Kinderspielplatz_1 (B_247 ) .....	3
Strassenbau (2) * (B_408).....	3
Geplante Betriebsneuerungen (B_186).....	3
Tauchgang * (B_416) .....	4
Bruecken zwischen Gebaeuden (2) * (B_466) .....	4
Vergnuegungspark (4) (B_293) .....	5
Roboschiff (B_357).....	5
Pro Level .....	6
Skispringen (2) * (B_380) .....	6
Prismen und Linsen * (B_411).....	6
Hoehe der Wolkenuntergrenze * (B_110) .....	7
Qualitaetstest bei Objektiven (1) * (B_326) .....	7
Segeln * (B_321) .....	8
Bahnsteige (2)* (B_451) .....	8
Plexiglasprismen (B_358).....	8
Hochstuhl für Kinder * (B_476).....	9
Weihnachtsmarkt * (B_479).....	9
Fitnessgymnastik * (B_494).....	10
All Star Level .....	11
Ausbreitung von Licht * (B_428).....	11
Bergwandern (B_230) .....	11
Infrartheizung (B_030).....	11
Fernsehturm (B_250) .....	12
Wagenheber * (B_299).....	13
Lösungen.....	14
Rookie Level .....	14
Pro Level.....	17
All Star Level.....	20

## Rookie Level

### Abstand halten (B\_102)

Der empfohlene Sicherheitsabstand, den Autofahrer/innen einhalten sollten, wird oft nach der „Halbe-Tacho-Regel“ bestimmt. Dabei wird die Hälfte der gefahrenen Geschwindigkeit in km/h als Richtwert für den Sicherheitsabstand in m angegeben. Zum Beispiel: Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h sollte der Abstand mindestens 50 m betragen.

- a) Für die Aufklärung der Ursache eines Verkehrsunfalls wird zur Überprüfung des Sicherheitsabstandes das Foto einer Radarüberwachung (siehe untenstehende Skizze) herangezogen. Die Geschwindigkeit des Autos A wurde mit 108 km/h gemessen. Der Abstand  $a$  zwischen dem Radargerät und dem Auto A betrug 14 m. Die Strecke  $b$  vom Radargerät zum Auto B betrug 55 m. Der Winkel  $\alpha$  ist  $11^\circ$ .

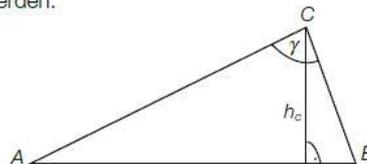


- Überprüfen Sie durch Berechnung von  $d$ , ob der Sicherheitsabstand im Sinne der Halbe-Tacho-Regel eingehalten wurde.

### Dachfenster\_1 (B\_065)

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

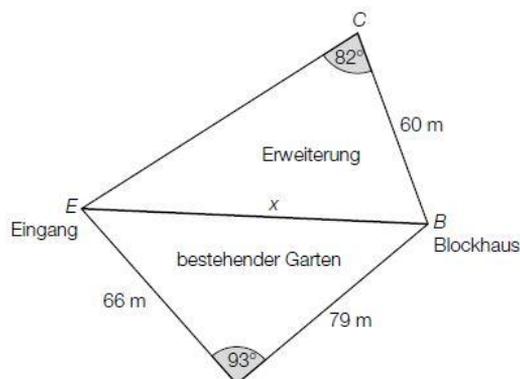
$$\begin{aligned} \gamma &= 81^\circ \\ \overline{AB} &= 1,60 \text{ m} \\ \overline{BC} &= 0,70 \text{ m} \end{aligned}$$



- a) – Berechnen Sie die Fläche des skizzierten Dreiecks, das die Fensteröffnung darstellt.

### Erlebnisgarten (1) (B\_241)

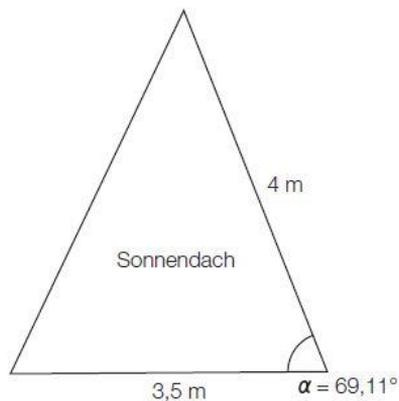
- a) Vom Eingang E zum Blockhaus B soll ein geradliniger Barfußweg angelegt werden (siehe nachstehende Abbildung).



- Berechnen Sie die Länge  $x$  des Weges in Metern.

## Kinderspielplatz\_1 (B\_247)

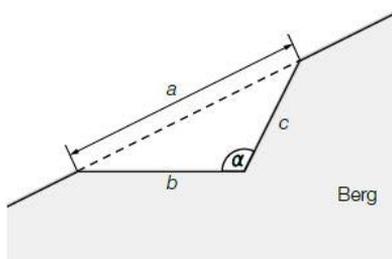
- d) Um den Kindern im Sommer einen Schatten bieten zu können, wird ein dreieckiges Sonnendach angebracht. Für die Produktion des Sonnendachs rechnet man mit 10 % Verschnitt. 1 m<sup>2</sup> des verwendeten Stoffes kostet € 11,95.



- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnendaches.
- Berechnen Sie die Kosten des Stoffes für das Sonnendach.

## Strassenbau (2) \* (B\_408)

- c) Ein Straßenabschnitt soll an einem Berghang entlangführen. Der Querschnitt der geplanten Trasse ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

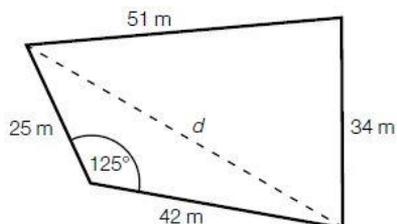


Die Seite  $b$  ist 15 m und die Seite  $c$  ist 11,8 m lang. Der Winkel beträgt  $\alpha = 116,6^\circ$ .

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des von  $a$ ,  $b$  und  $c$  eingeschlossenen Dreiecks.
- Berechnen Sie die Länge der Seite  $a$ .

## Geplante Betriebsneuerungen (B\_186)

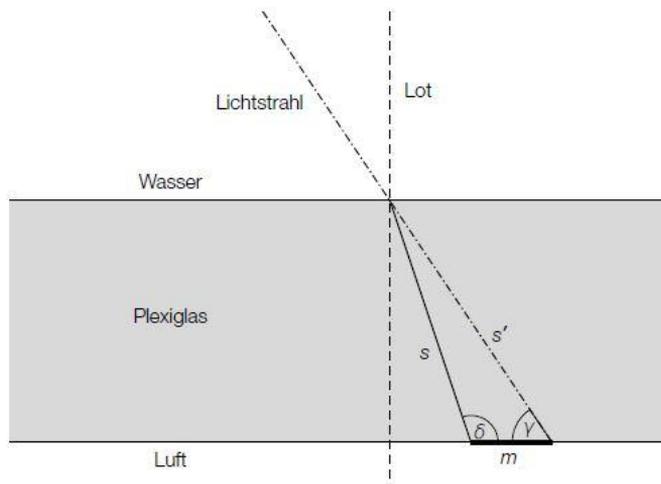
- b) Zur Vergrößerung seiner Weideflächen muss der Landwirt ein sumpfiges Landstück trockenlegen. Er möchte den Flächeninhalt des Grundstücks berechnen. Dazu misst er die Länge der Seiten und einen Winkel und fertigt die folgende Skizze an:



- Berechnen Sie die Länge der Diagonalen  $d$ .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstücks.

## Tauchgang \* (B\_416)

- b) Die nachstehende nicht maßstabgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines anderen Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



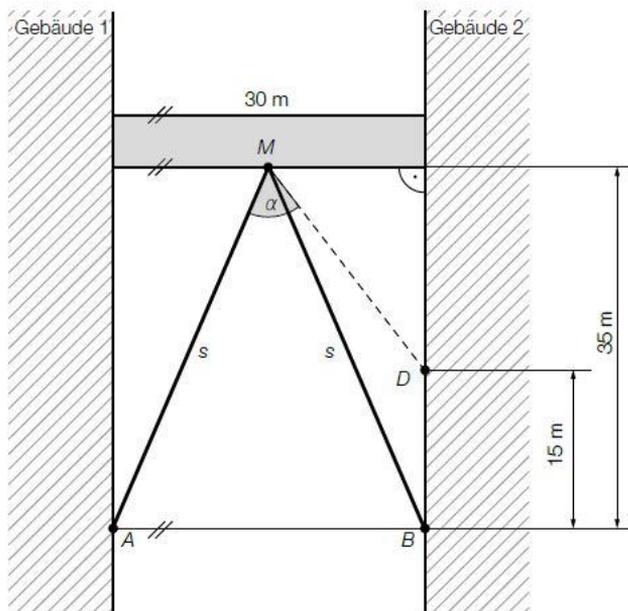
$s$  ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt  
 $s'$  ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde

Dabei gilt:  $s = 4,52$  mm und  $s' = 4,77$  mm. Außerdem kennt man den Winkel  $\gamma = 57^\circ$ .

- 1) Berechnen Sie den stumpfen Winkel  $\delta$ .
- 2) Berechnen Sie die Länge der Strecke  $m$ .

## Bruecken zwischen Gebaeuden (2) \* (B\_466)

- a) Eine 30 m lange Brücke wird im Punkt  $M$  auf zwei Stützen der Länge  $s$  gelagert (siehe nachstehende Abbildung).



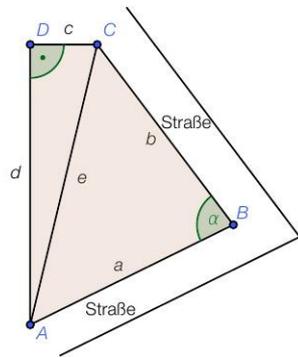
- 1) Berechnen Sie die Länge  $s$  einer Stütze.

Die Stütze  $MB$  soll durch eine neue Stütze  $MD$  ersetzt werden.

- 2) Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$ .

## Vergnügungspark (4) (B\_293)

- a) Das zur Verfügung stehende viereckige Gelände wird an zwei Seiten durch die geradlinig verlaufenden Straßenstücke  $a = 486$  m und  $b = 480$  m begrenzt. Die beiden anderen Begrenzungslinien ( $c = 143$  m und  $d$ ) schließen einen rechten Winkel ein. Die Eckpunkte  $A$  und  $C$  des Geländes sind  $621$  m voneinander entfernt.

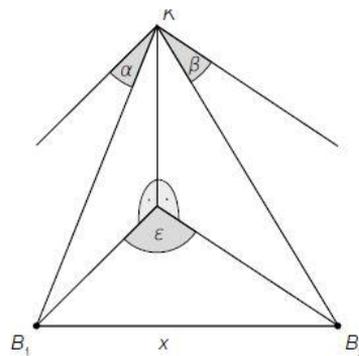


- Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$ , den die beiden Straßenstücke miteinander einschließen.
- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts  $A$  des gesamten Geländes unter Verwendung der gegebenen Größen.

$A =$  \_\_\_\_\_

## Roboschiff (B\_357)

- c) Für Abstandsmessungen ist auf der Spitze des Segelmasts in der Höhe  $h$  über dem Wasserspiegel ein Messgerät  $K$  montiert. Dieses erkennt eine Markierungsboje  $B_1$  unter dem Tiefenwinkel  $\alpha$ . Nach Schwenken des Messgeräts um einen Horizontalwinkel  $\epsilon$  erkennt es eine weitere Markierungsboje  $B_2$  unter dem Tiefenwinkel  $\beta$ .



- Dokumentieren Sie in Worten, wie man den Abstand  $x$  der beiden Bojen berechnen kann.

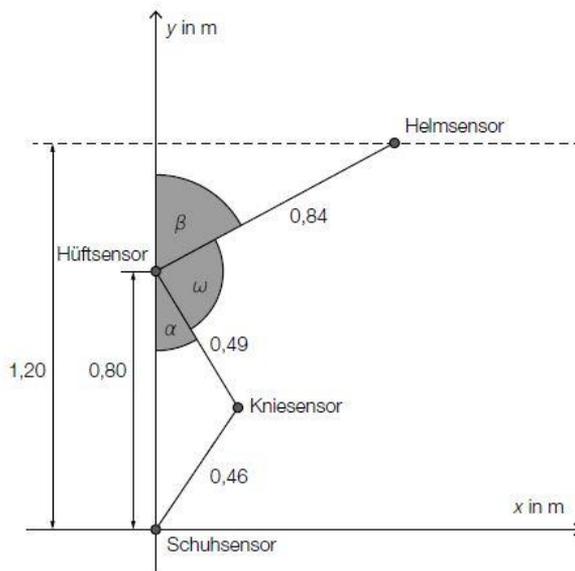
# Pro Level

## Skispringen (2) \* (B\_380)

a) Für die Analyse eines Bewegungsablaufs beim Skispringen wurden 4 Sensoren an der Ausrüstung eines Skispringers befestigt.

1. Sensor: Schuh
2. Sensor: Knie
3. Sensor: Hüfte
4. Sensor: Helm

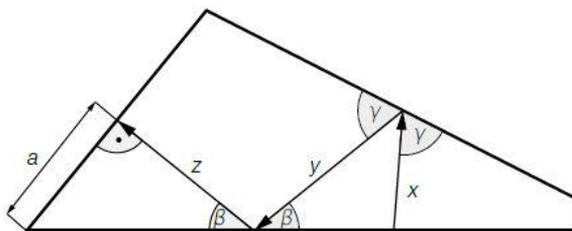
In der nachstehenden Abbildung sind die Positionen der Sensoren für eine Position im Bewegungsablauf des Skispringers in einem Koordinatensystem dargestellt (Angaben in Metern).



– Berechnen Sie den Winkel  $\omega$ .

## Prismen und Linsen \* (B\_411)

b) Ein Strahlengang durch ein Glasprisma einer Filmkamera kann folgendermaßen dargestellt werden:



*Hinweis:* Die Skizze ist nicht maßstabgetreu!

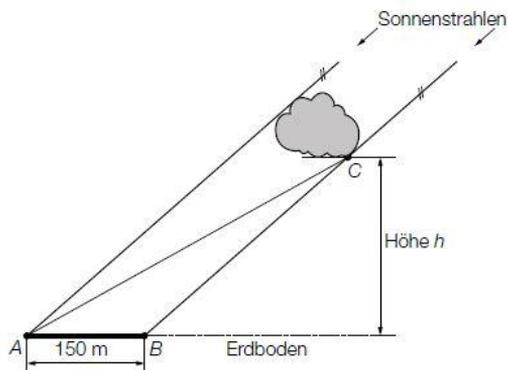
- $a = 0,50 \text{ cm}$   
 $x = 0,55 \text{ cm}$   
 $\beta = 40^\circ$   
 $\gamma = 68^\circ$

– Berechnen Sie die Länge  $x + y + z$  des Strahlengangs.

## Höhe der Wolkenuntergrenze \* (B\_110)

- c) Eine Wolke wirft einen 150 m langen Schatten auf den Erdboden. Von A aus sieht man die Wolke unter dem Sehwinkel  $\alpha = 4^\circ$ . Der Einfallswinkel der parallelen Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt  $\beta = 30^\circ$ .

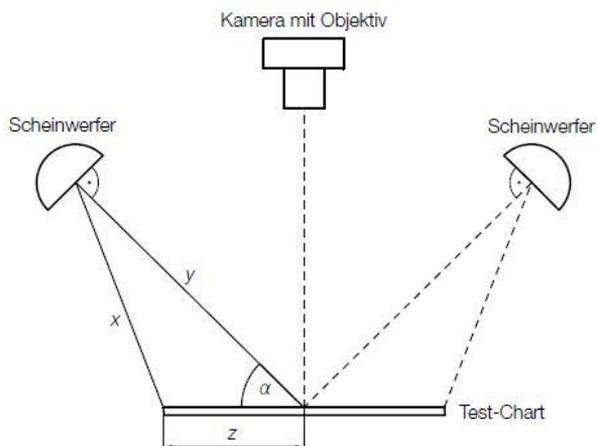
Die folgende Abbildung stellt diese Situation vereinfacht und nicht maßstabgetreu dar:



- Tragen Sie die gegebenen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  in die obige Abbildung ein.
- Berechnen Sie die Entfernung  $\overline{BC}$ .
- Berechnen Sie die Höhe  $h$ .

## Qualitätstest bei Objektiven (1) \* (B\_326)

- a) Eine Fotografin möchte ihr neues Objektiv testen. Dazu verwendet sie folgenden Aufbau:



- 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von  $x$  aus  $y$ ,  $z$  und  $\alpha$ .

$$x = \underline{\hspace{10em}}$$

Bei einem bestimmten Test gilt:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$x = 121 \text{ cm}$$

$$z = 70 \text{ cm}$$

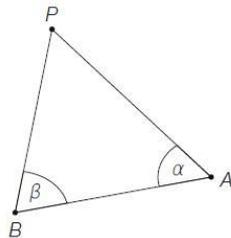
- 2) Berechnen Sie die Entfernung  $y$ .

## Segeln \* (B\_321)

Die Entfernungen werden beim Segeln in nautischen Meilen (NM) angegeben. Die davon abgeleitete Geschwindigkeitseinheit nautische Meilen pro Stunde wird *Knoten* genannt.

- a) Ein Segelboot fährt, nachdem es vom Punkt  $P$  gestartet ist und den Punkt  $A$  passiert hat, zum Punkt  $B$ . Von dort fährt es zum Punkt  $P$  zurück (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

Die folgenden Abmessungen sind bekannt:  $\alpha = 63^\circ$ ,  $\overline{PA} = 3,3$  NM und  $\overline{AB} = 2,7$  NM.

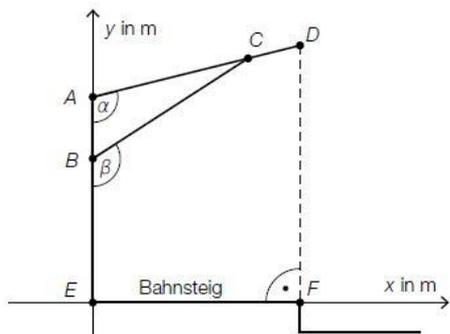


- Berechnen Sie die Entfernung  $\overline{BP}$ .
- Berechnen Sie die Dauer dieser Umrundung, wenn das Segelboot mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6,8 Knoten fährt.
- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Entfernung  $\overline{BP}$  auf, wenn anstatt der Entfernung  $\overline{AB}$  der Winkel  $\beta$  bekannt wäre.

$\overline{BP} =$  \_\_\_\_\_

## Bahnsteige (2)\* (B\_451)

- b) In der nachstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.



- 1) Erstellen Sie mithilfe von  $\overline{AE}$ ,  $\overline{AD}$  und  $\alpha$  eine Formel zur Berechnung von  $\overline{DF}$ .

$\overline{DF} =$  \_\_\_\_\_

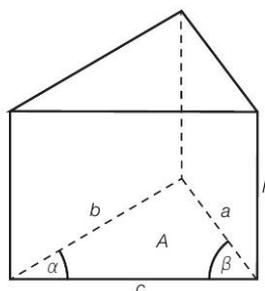
Es gilt:  $A = (0|4)$ ,  $B = (0|2,8)$ ,  $\alpha = 104^\circ$  und  $\beta = 123^\circ$

- 2) Berechnen Sie die Länge  $\overline{BC}$ .

## Plexiglasprismen (B\_358)

- a) Von den Prismen sind von der Grundfläche die Maße  $c = 9$  cm,  $a = 5$  cm,  $\alpha = 25^\circ$  bekannt (siehe nebenstehende Skizze).

- Begründen Sie, warum mit diesen 3 Angaben das Dreieck nicht eindeutig bestimmt ist.
- Berechnen Sie die Flächeninhalt  $A$  der Grundfläche unter der Annahme, dass der Winkel  $\beta < 90^\circ$  ist.

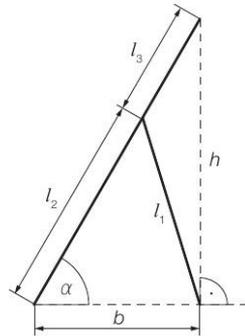


## Hochstuhl für Kinder \* (B\_476)

a) Das nebenstehende Bild zeigt einen Hochstuhl für Kleinkinder.



In der nachstehenden Abbildung sind Teile des Hochstuhls schematisch dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von  $l_1$ ,  $l_2$  und  $b$  eine Formel zur Berechnung von  $\alpha$ .

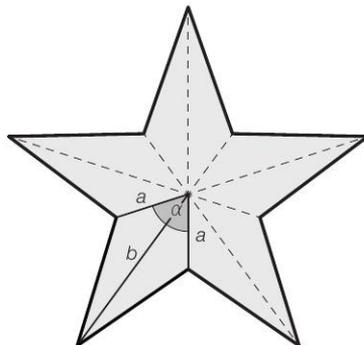
$$\alpha = \underline{\hspace{10cm}}$$

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$ , für die gilt:

$$\frac{\sin(\beta)}{h} = \frac{\sin(\gamma)}{l_3}$$

## Weihnachtsmarkt \* (B\_479)

b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Ausstechform für Lebkuchensterne dargestellt. Es handelt sich dabei um einen regelmäßigen 5-zackigen Stern.



Zur Berechnung der Länge einer Strecke  $x$  wird folgender Ausdruck aufgestellt:

$$x = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\alpha)}$$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke  $x$  ein.

Für eine bestimmte Ausstechform gilt:

$$a = 2 \text{ cm}$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$\alpha = 72^\circ$$

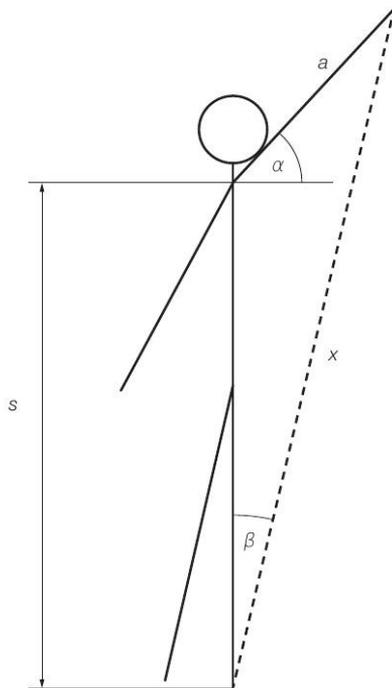
2) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines mit dieser Ausstechform ausgestochenen Lebkuchensterns.

## Fitnessgymnastik \* (B\_494)

b) In einem Kurs werden dehnbare Fitnessbänder benutzt. Bei einer Übung wird ein Ende des Fitnessbands mit einem Fuß fixiert. Das andere Ende wird mit dem gestreckten Arm nach oben gezogen. (Siehe unten stehende vereinfachte Abbildung.)

1) Zeichnen Sie in dieser Abbildung denjenigen Winkel  $\varphi$  ein, für den gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{x \cdot \sin(\beta)}{a}$$



$a$  ... Armlänge  
 $s$  ... Schulterhöhe  
 $x$  ... Länge des gedehnten Fitnessbands

2) Erstellen Sie mithilfe von  $a$ ,  $s$  und  $\alpha$  eine Formel zur Berechnung von  $x$ .

$$x = \underline{\hspace{10cm}}$$

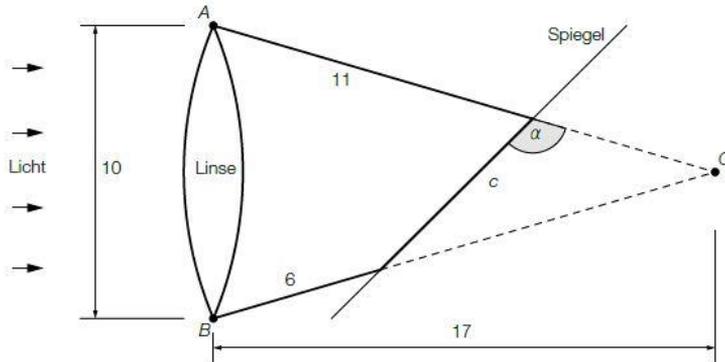
Für eine bestimmte Person gilt:  $a = 0,7$  m,  $s = 1,5$  m,  $\alpha = 48^\circ$

3) Berechnen Sie  $x$  für diese Person.

## All Star Level

### Ausbreitung von Licht \* (B\_428)

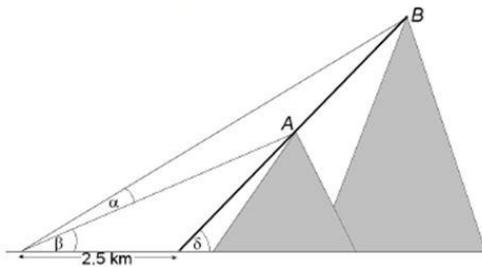
- b) Bei einem Experiment wird das von einer Sammellinse gebündelte Licht auf einen schräg gestellten Spiegel gerichtet (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze, alle Abmessungen in cm). Es gilt:  $\overline{AC} = \overline{BC}$ .



- Berechnen Sie die Länge  $c$ .
- Berechnen Sie den stumpfen Winkel  $\alpha$ .

### Bergwandern (B\_230)

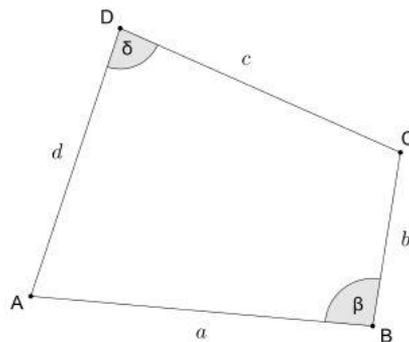
- b) - Berechnen Sie anhand der Skizze von Aufgabe a die Entfernung der Bergspitzen A und B, wenn die Winkel  $\alpha = 2,8^\circ$ ,  $\beta = 18,7^\circ$  und  $\delta = 24,2^\circ$  gemessen werden. (Die Zeichnung ist nicht maßstabgetreu.)



### Infrartheizung (B\_030)

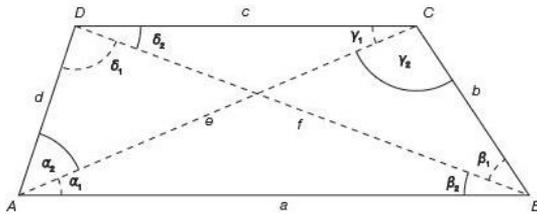
- d) Die Fläche an der Vorderseite der Infrartheizung hat die Form eines Vierecks mit den Seitenlängen  $a = 71,4$  cm,  $b = 36,9$  cm und  $d = 59,1$  cm. Die Winkel sind  $\beta = 94^\circ$  und  $\delta = 84,3^\circ$ .

- Berechnen Sie mithilfe der nebenstehenden Skizze den Flächeninhalt des Vierecks.
- Berechnen Sie mithilfe der Skizze den Umfang des Vierecks.



## Fernsehturm (B\_250)

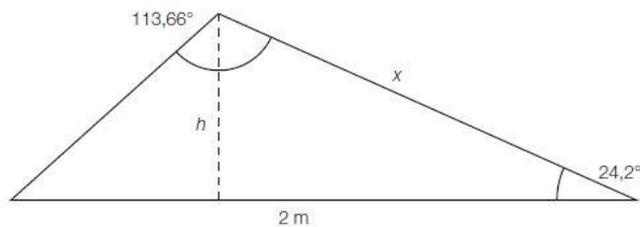
- b) Der Platz, auf dem der Turm steht, hat die Form eines Trapezes. Die nachstehende Grafik zeigt den Platz im Maßstab 1 : 600 und die Seitenlängen sind in cm gezeichnet.



- Bestimmen Sie mithilfe der Darstellung die Länge der Seite  $a$  in Metern (m).
- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge der Diagonale  $f$  bei gegebener Seitenlänge  $d$  und  $a$  und den Winkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ .
- Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

$\frac{\sin(\delta_1)}{e} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{\sin(\gamma_2)}{a} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\beta_1)}{c}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{\sin(\gamma_1)}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{c}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	<input type="checkbox"/>

- c) Für Konzerte wird der Platz vor dem Turm in Sektoren aufgeteilt. Die nachstehende Skizze veranschaulicht die Fläche eines bestimmten Sektors, wobei die Seitenlängen in Metern (m) angegeben sind.



- Berechnen Sie die Seitenlänge  $x$  aus den gegebenen Größen.
- Begründen Sie mathematisch, warum die Berechnung der Länge  $x$  mit  $x = \sin(24,2^\circ) \cdot h$  falsch ist.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

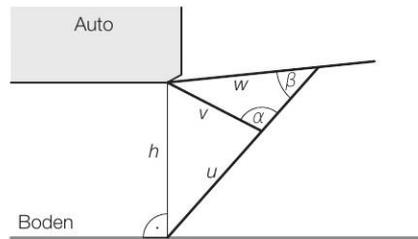
## Wagenheber \* (B\_299)

- a) Eine mögliche Bauart eines Wagenhebers ist im nebenstehenden Bild dargestellt.



Bildquelle: Bukk – own work, public domain,  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:STORZ\\_Wagenheber.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:STORZ_Wagenheber.jpg) [04.08.2020] (adaptiert).

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische – nicht maßstabgetreue – Darstellung dieses Wagenhebers.



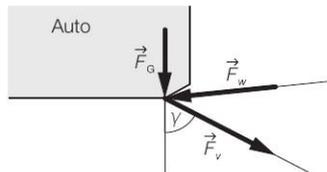
- 1) Erstellen Sie mithilfe von  $u$ ,  $v$  und  $\alpha$  eine Formel zur Berechnung der Höhe  $h$ .

$$h = \underline{\hspace{10cm}}$$

Es gilt:  $v = 20 \text{ cm}$ ,  $w = 30 \text{ cm}$ ,  $\beta = 41^\circ$

- 2) Berechnen Sie den stumpfen Winkel  $\alpha$ .

Die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  kann in die Kräfte  $\vec{F}_w$  und  $F_v$  zerlegt werden (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



Es gilt (alle Angaben in Kilonewton):

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F}_w = \begin{pmatrix} -1,18 \\ -0,12 \end{pmatrix}$$

- 3) Ermitteln Sie die Kraft  $\vec{F}_v$ .  
 4) Berechnen Sie den Winkel  $\gamma$ .

# Lösungen

## Rookie Level

### Abstand halten! (B\_102) Lösung

- a) Einsetzen in den Cosinussatz:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$

$$d \approx 41 \text{ m}$$

Der Sicherheitsabstand müsste im Sinne der Halbe-Tacho-Regel 54 m betragen und wurde daher nicht eingehalten.

### Dachfenster (1) (B\_065) Lösung

a)  $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right) \quad \alpha = 25,601\dots \approx 25,6^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \quad \beta = 73,398\dots \approx 73,4^\circ$$

$$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} \quad A = 0,536\dots \approx 0,54 \text{ m}^2$$

Die Fläche des Dachfensters beträgt ca. 0,54 m<sup>2</sup>.

*Auch andere Rechenwege sind möglich.*

### Erlebnisgarten (1) (B\_241) Lösung

- a) Cosinussatz:

$$x^2 = 66^2 + 79^2 - 2 \cdot 66 \cdot 79 \cdot \cos(93^\circ)$$

$$x = 105,559\dots$$

Der Barfußweg ist rund 106 m lang.

### Kinderspielplatz (1) (B\_247) Lösung

d) Flächeninhalt des Sonnendaches in m<sup>2</sup>:  $A = \frac{4 \cdot 3,5 \cdot \sin(69,11)}{2} = 0,6539\dots \approx 6,54$

Der Flächeninhalt des Sonnendaches beträgt rund 6,54 m<sup>2</sup>.

$$\text{Kosten des Stoffes: } A \cdot 1,1 \cdot 11,95 = 85,966\dots \approx 85,97$$

Die Kosten des Stoffes für das Sonnendach betragen rund 85,97 Euro.

### Strassenbau (2) \* (B\_408) Lösung

c)  $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \approx 79,132\dots$

Der Flächeninhalt beträgt rund 79,13 m<sup>2</sup>.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)}$$

$$a = 22,86\dots$$

Die Seite a ist rund 22,9 m lang.

## Geplante Betriebsneuerungen (B\_186) Lösung

$$b) d = \sqrt{25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos(125^\circ)} = 59,9\dots$$

$$d \approx 60 \text{ m}$$

Mit der trigonometrischen Flächenformel berechnet man den Flächeninhalt A:

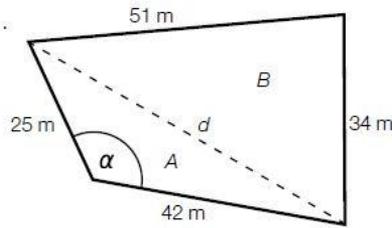
$$A = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 42 \cdot \sin(125^\circ) = 430,05\dots$$

Den Flächeninhalt B berechnet man z. B. mit der Heron'schen Flächenformel:

$$s = \frac{d + 51 + 34}{2}$$

$$B = \sqrt{s \cdot (s - d) \cdot (s - 51) \cdot (s - 34)} = 866,03\dots$$

$$\text{Gesamtflächeninhalt} = A + B \approx 1296,09 \text{ m}^2$$



## Tauchgang \* (B\_416) Lösung

b1) Sinussatz:

$$\frac{s}{\sin(\gamma)} = \frac{s'}{\sin(\delta)}$$

$$(\delta_1 = 62,25\dots^\circ)$$

$$\delta_2 = 117,74\dots^\circ$$

Wird der spitze Winkel nicht erwähnt und nur der stumpfe als Lösung angegeben, so ist dies ebenfalls richtig.

$$b2) \text{ Winkel, den } s \text{ und } s' \text{ einschließen: } 180^\circ - \delta_2 - \gamma = 5,258\dots^\circ \approx 5,26^\circ$$

$$\text{Cosinussatz: } m^2 = s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5,26^\circ)$$

$$m = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5,26^\circ)} = 0,493\dots$$

$$m \approx 0,49 \text{ mm}$$

## Bruecken zwischen Gebaeuden (2) \* (B\_466) Lösung

$$a1) s = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1450} = 38,078\dots$$

Die Länge einer Stütze beträgt rund 38,08 m.

$$a2) \text{ Ansatz: } \overline{AD}^2 = s^2 + \overline{MD}^2 - 2 \cdot s \cdot \overline{MD} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\overline{AD} = \sqrt{15^2 + 30^2} = \sqrt{1125}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$1125 = 1450 + 625 - 2 \cdot \sqrt{1450} \cdot 25 \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = 60,06\dots^\circ$$

Der Winkel beträgt rund 60,1°.

## Vergnügungspark (4) (B\_293) Lösung

$$a) \alpha = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot b}\right) \approx 80^\circ$$

$$A_1 = \frac{c \cdot d}{2}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2} \Rightarrow A = \frac{c \cdot d}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

## Roboschiff (B\_357) Lösung

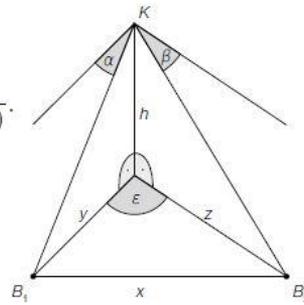
c) Zuerst berechnet man die Seite  $y$  mit  $y = \frac{h}{\tan(\alpha)}$ .

Danach berechnet man auf dieselbe Weise  $z$  mit  $z = \frac{h}{\tan(\beta)}$ .

Für  $x$  wird der Cosinussatz verwendet:

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\varepsilon)$$

$$x = \sqrt{\frac{h^2}{(\tan(\alpha))^2} + \frac{h^2}{(\tan(\beta))^2} - 2 \cdot \frac{h^2}{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \cdot \cos(\varepsilon)}$$



## Pro Level

### Skispringen (2) \* (B\_380) Lösung

$$\begin{aligned} \text{a) } 0,46^2 &= 0,49^2 + 0,8^2 - 2 \cdot 0,49 \cdot 0,8 \cdot \cos(\alpha) \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{0,46^2 - 0,49^2 - 0,8^2}{-2 \cdot 0,49 \cdot 0,8}\right) \\ \alpha &= 31,49\dots^\circ \\ \cos(\beta) &= \frac{0,4}{0,84} \\ \beta &= 61,56\dots^\circ \\ \omega &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ \omega &= 86,94\dots^\circ \approx 86,9^\circ \end{aligned}$$

### Prismen und Linsen \* (B\_411) Lösung

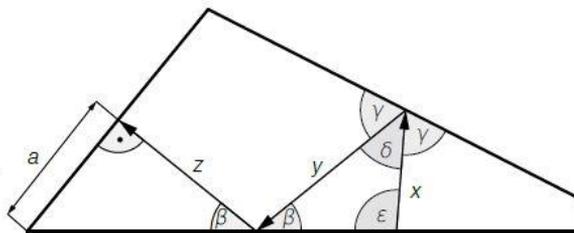
$$\text{b) } z = \frac{0,5}{\tan(40^\circ)} = 0,595\dots$$

$$\delta = 180^\circ - 2 \cdot \gamma = 44^\circ$$

$$\varepsilon = 180^\circ - \beta - \delta = 96^\circ$$

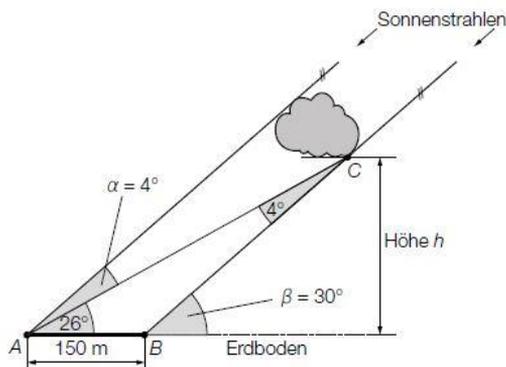
$$y = \frac{0,55 \cdot \sin(96^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 0,850\dots$$

$$x + y + z = 1,996\dots$$



### Hoehe der Wolkenuntergrenze \* (B\_110) Lösung

c)



$$\frac{\overline{BC}}{\sin(26^\circ)} = \frac{150}{\sin(4^\circ)}$$

$$\overline{BC} = \frac{150}{\sin(4^\circ)} \cdot \sin(26^\circ) = 942,6\dots$$

Die Entfernung  $\overline{BC}$  beträgt rund 943 m.

$$\sin(\beta) = \frac{h}{\overline{BC}}$$

$$h = \overline{BC} \cdot \sin(\beta) = 471,3\dots$$

Die Höhe  $h$  beträgt rund 471 m.

### Qualitaetstest bei Objektiven (1) \* (B\_326) Lösung

$$\text{a1) } x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\alpha)}$$

a2)  $\gamma$  ... Winkel gegenüber von  $z$   
 $\beta$  ... Winkel gegenüber von  $y$

$$\frac{121}{\sin(45^\circ)} = \frac{70}{\sin(\gamma)} \Rightarrow \gamma = 24,1\dots^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ - 24,1\dots^\circ = 110,8\dots^\circ$$

$$\frac{y}{\sin(110,8\dots^\circ)} = \frac{121}{\sin(45^\circ)} \Rightarrow y = 159,9\dots$$

Die Entfernung  $y$  beträgt rund 160 cm.

### Segeln \* (B\_321) Lösung

a)  $\overline{BP} = \sqrt{3,3^2 + 2,7^2 - 2 \cdot 3,3 \cdot 2,7 \cdot \cos(63^\circ)} = 3,176... \approx 3,18$   
 Die Entfernung zwischen dem Punkt B und dem Punkt P beträgt rund 3,18 NM.

$$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 9,176...$$

$$t = \frac{9,176...}{6,8} = 1,349... \approx 1,35$$

Die Umrundung dauert etwa 1,35 Stunden.

Sinussatz:  $\frac{\overline{PA}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

### Bahnsteige (2) \* (B\_451) Lösung

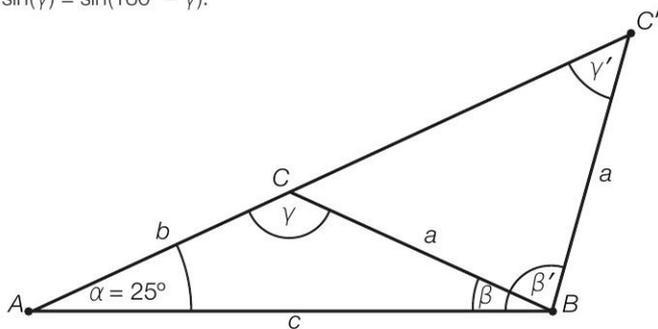
b1)  $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - 90^\circ)$

b2)  $\overline{AB} = 1,2 \text{ m}$

$$\frac{1,2}{\sin(19^\circ)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(104^\circ)} \Rightarrow \overline{BC} = 3,576... \text{ m} \approx 3,58 \text{ m}$$

### Plexiglasprismen (B\_358) Lösung

- a) Das Dreieck ist nicht eindeutig bestimmt, da die dem Winkel  $\alpha$  gegenüberliegende Seite  $a$  kürzer als die Seite  $c$  ist. Bei Berechnung des Winkels  $\gamma$  mithilfe des Sinussatzes ergeben sich 2 mögliche Lösungen für diesen Winkel, da für  $0 \leq \gamma \leq 90^\circ$  gilt:  
 $\sin(\gamma) = \sin(180^\circ - \gamma)$ .



Den Winkel  $\gamma$  erhält man mithilfe des Sinussatzes:  $\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a}$

$$\gamma' = 49,527...^\circ \text{ und } \gamma = 130,472...^\circ$$

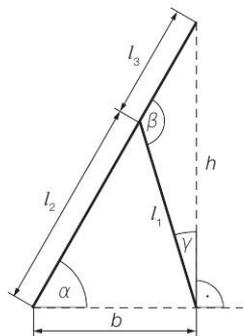
$$\beta = 180^\circ - \gamma - 25^\circ = 24,527...^\circ$$

$$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = 9,340... \approx 9,34 \text{ cm}^2$$

### Hochstuhl für Kinder \* (B\_476) Lösung

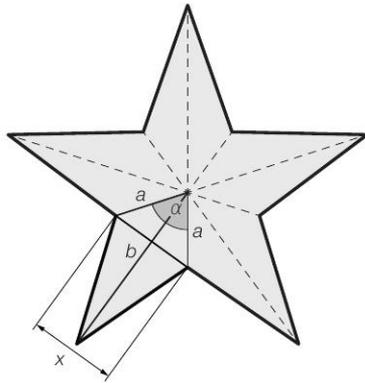
a1)  $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + l_2^2 - l_1^2}{2 \cdot b \cdot l_2}\right)$

a2)



### Weihnachtsmarkt \* (B\_479) Lösung

b1)

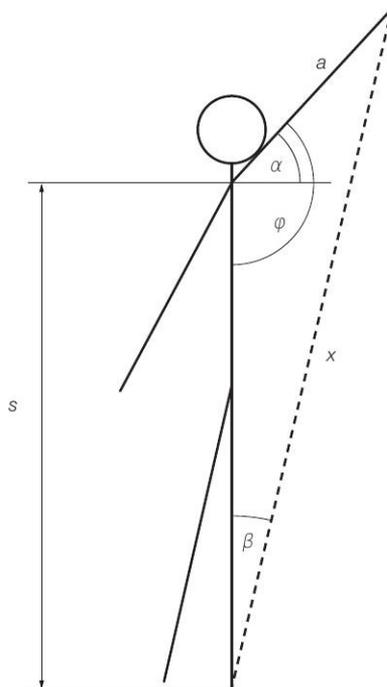


$$\text{b2) } 10 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 10 \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \sin(36^\circ) = 29,38\dots$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 29,4 cm<sup>2</sup>.

### Fitnessgymnastik \* (B\_494) Lösung

b1)



$$\text{b2) } x = \sqrt{a^2 + s^2 - 2 \cdot a \cdot s \cdot \cos(90^\circ + \alpha)} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a^2 + s^2 + 2 \cdot a \cdot s \cdot \sin(\alpha)}$$

Auch eine Verwendung des richtig eingezeichneten Winkels  $\varphi$  in der Formel ist als richtig zu werten.

$$\text{b3) } x = \sqrt{0,7^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 0,7 \cdot 1,5 \cdot \cos(90^\circ + 48^\circ)} = 2,07\dots$$

Die Länge des gedehnten Fitnessbands beträgt rund 2,1 m.

## All Star Level

### Ausbreitung von Licht \* (B\_428) Lösung

- b) Berechnung der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks und des Winkels zwischen

den Schenkeln:  $s = \sqrt{17^2 + 5^2} = 17,72\dots$

$$\gamma = 2 \cdot \arctan\left(\frac{5}{17}\right) = 32,77\dots^\circ$$

Mit dem Cosinussatz ergibt sich die Länge  $c$ :

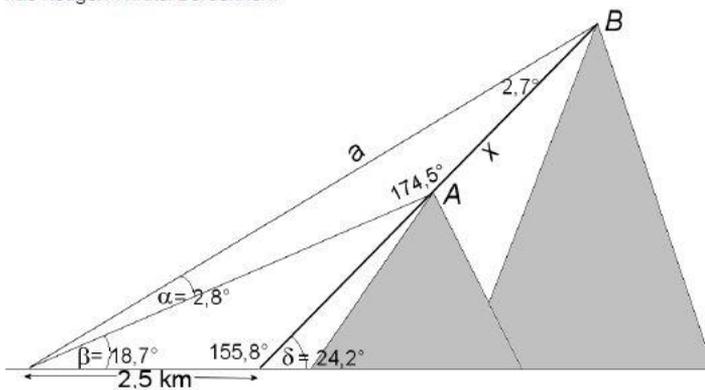
$$\sqrt{(s-11)^2 + (s-6)^2 - 2 \cdot (s-11) \cdot (s-6) \cdot \cos(\gamma)} = 7,07\dots$$

$$c \approx 7,1 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{s-6}{\sin(\alpha)} \Rightarrow (\alpha_1 \approx 63,7\dots^\circ), \alpha_2 = 116,2\dots^\circ$$

### Bergwandern (B\_230) Lösung

- b) Alle nötigen Winkel berechnen.



$$\text{Sinussatz: } \frac{2,5}{\sin 2,7} = \frac{a}{\sin 155,8}$$

$$a = 21,755 \text{ km}$$

$$\text{Sinussatz: } \frac{x}{\sin 2,6} = \frac{21,755}{\sin 174,5}$$

$$x = 11,1 \text{ km}$$

Die beiden Berggipfel A und B sind ca. 11 km voneinander entfernt.  
(Es sind auch andere Lösungswege möglich und erlaubt.)

### Infrarotheizung (B\_030) Lösung

d)  $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}$   
 $e = 82,626... \text{ cm}$

$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\delta) \cdot d}{e}\right)$   
 $\gamma_1 = 45,375...^\circ$

$\alpha_1 = 180^\circ - (\gamma_1 + \delta)$   
 $\alpha_1 = 50,324...^\circ$

$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\beta)}{2}$   
 $A_1 = 1\,314,121... \text{ cm}^2$

$A_2 = \frac{d \cdot e \cdot \sin(\alpha_1)}{2}$   
 $A_2 = 1\,879,232... \text{ cm}^2$

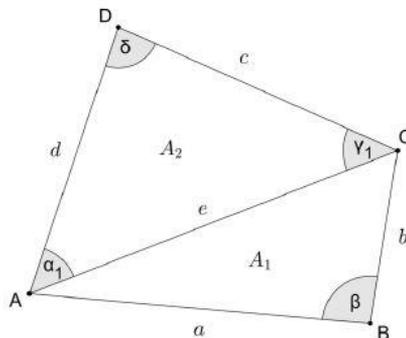
$A = A_1 + A_2$   
 $A \approx 3\,193,35 \text{ cm}^2$

Die Oberfläche der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca.  $3\,193,35 \text{ cm}^2$ .

$c = \frac{d \cdot \sin(\alpha_1)}{\sin(\gamma_1)}$   
 $c = 63,911... \text{ cm}$

$U = a + b + c + d$   
 $U \approx 231,3 \text{ cm}$

Der Umfang der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca.  $231,3 \text{ cm}$ .



### Fernsehturm (B\_250) Lösung

- b)  $a = 9 \text{ cm}$  entspricht  $54 \text{ m}$  Messtoleranz:  $\pm 0,4 \text{ cm}$

Abhängig von den Druckeinstellungen kann die Länge der Seite  $a$  auf dem Ausdruck geringfügig abweichen.

Die Länge der Diagonale  $f$  kann mit dem Cosinussatz berechnet werden:

$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	<input checked="" type="checkbox"/>

c)  $x = \frac{2}{\sin(113,66^\circ)} \cdot \sin(180^\circ - 113,66^\circ - 24,2^\circ) = 1,465...$

Die Seitenlänge  $x$  beträgt rund  $1,47 \text{ m}$ .

Der Sinus von dem Winkel  $24,2^\circ$  entspricht dem Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse. Wenn man  $x = \sin(24,2^\circ) \cdot h$  umformt auf  $\sin(24,2^\circ) = \frac{x}{h}$ , erkennt man, dass die Seiten im Verhältnis vertauscht sind.

$A = \frac{2 \cdot 1,47 \cdot \sin(24,2^\circ)}{2} = 0,600...$

Der Flächeninhalt beträgt rund  $0,60 \text{ m}^2$ .

## Wagenheber \* (B\_299) Lösung

$$\text{a1) } h = \sqrt{u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} \quad \text{oder} \quad h = \sqrt{u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(\alpha)}$$

$$\text{a2) } \frac{w}{\sin(\alpha)} = \frac{v}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{w \cdot \sin(\beta)}{v} = \frac{30 \cdot \sin(41^\circ)}{20}$$
$$(\alpha_1 = 79,7\dots^\circ) \quad \alpha_2 = 100,2\dots^\circ$$

Für die Punktevergabe ist nur die Angabe des stumpfen Winkels erforderlich.

$$\text{a3) } \vec{F}_v = \vec{F}_G - \vec{F}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,18 \\ -0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,18 \\ -0,63 \end{pmatrix}$$

$$\text{a4) } \gamma = \arctan\left(\frac{1,18}{0,63}\right) = 61,9\dots^\circ$$