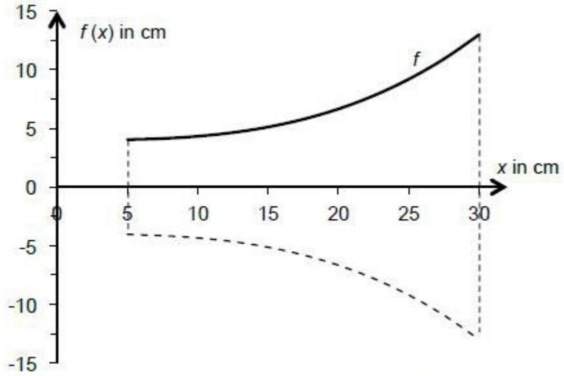
Rotationsvolumen

Rookie Level 2
Der Schall (B_067) 2
Hydraulik (B_287) 2
Volumen eines Baumes * (B_310) 2
Schwimmverein (B_366) 3
Pro Level 4
Abrissbirnen (1) * (B_012) 4
Statuen und Skulpturen (1) * (B_378) 4
Wassergefaesse * (B_313) 4
Blut (B_372) 5
Gastwirtschaft* (B_443) 5
Blumentopf * (B_474) 6
All Star Level 8
Champagner * (B_215) 8
Schachfigur (B_057) 8
Der Venturi Effekt (B_111) 9
Lösungen 10
Rookie Level 10
Pro Level 11
All Star Level 13

Rookie Level

Der Schall (B_067)

d) Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.
Die nachstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.



Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird im relevanten Intervall durch die Funktion f beschrieben: $f(x) = \frac{x^3}{3\,000} + 4$.

– Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

Hydraulik (B_287)

b) Für die Modellierung eines speziellen Gehäuses eines Hydraulikzylinders wird die Funktion f verwendet.

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1 \cdot x + 0{,}35} - 0{,}85$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Längeneinheiten

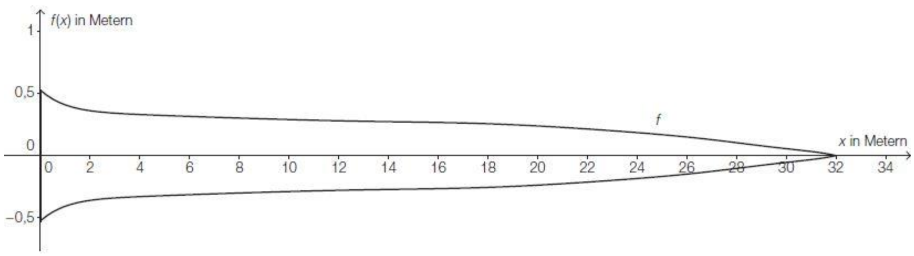
– Zeichnen Sie die Funktion f im Intervall $[-20; 20]$.

Rotiert die Funktion f im Intervall $[0; x_N]$ um die x-Achse, erhält man ein Modell des gewünschten Gehäuses, wobei x_N die Nullstelle der Funktion f ist.

– Berechnen Sie das Volumen des Gehäuses.

Volumen eines Baumes * (B_310)

d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

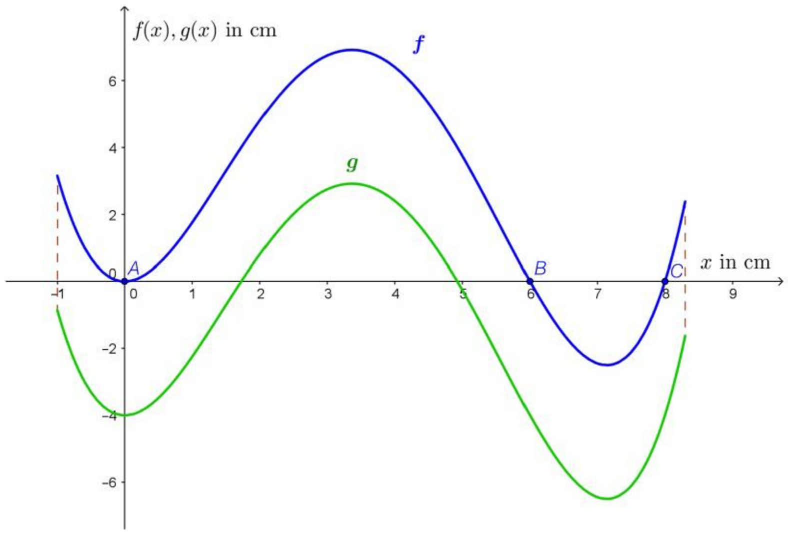


– Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen V des Baumstamms berechnet werden kann.

$V =$ ____________________

Schwimmverein (B_366)

a) Das Logo eines Schwimmvereins kann mithilfe von Polynomfunktionen 4. Grades modelliert werden:



x, $f(x)$, $g(x)$ … Koordinaten in cm

Der Graph der Polynomfunktion f berührt die horizontale Achse im Punkt $A = (0|0)$, hat im Punkt $B = (6|0)$ eine Steigung von $-\frac{18}{5}$ und geht durch den Punkt $C = (8|0)$.

– Stellen Sie unter Verwendung dieser Informationen zu den Punkten A, B und C ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion f berechnet werden können.

Die Gleichung der Polynomfunktion f lautet $f(x) = 0{,}05 \cdot x^4 - 0{,}7 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2$.
Der Graph der Funktion g entsteht durch vertikale Verschiebung des Graphen von f um 4 Einheiten nach unten.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

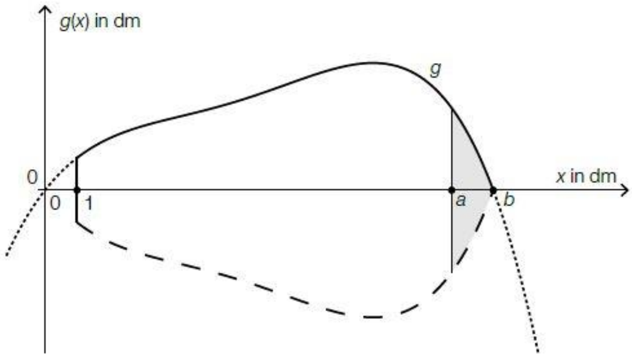
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\pi \cdot \int_2^4 (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Pro Level

Abrissbirnen (1) * (B_012)

c) Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall [1; b] um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$g(x) = -0{,}00157 \cdot x^4 + 0{,}03688 \cdot x^3 - 0{,}29882 \cdot x^2 + 1{,}26325 \cdot x$



– Berechnen Sie die Nullstelle b.

Das Volumen dieser Abrissbirne soll verkleinert werden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall [1; a] um die x-Achse entsteht die Form einer Abrissbirne mit einem um 10 dm³ kleineren Volumen.

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung dargestellte Stelle a.

Statuen und Skulpturen (1) * (B_378)

c) Das Abschlusselement einer Säule soll aus Marmor hergestellt werden. Dieses kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse beschrieben werden:

$f(x) = 4 - \frac{x}{2} - \sin(x)$ mit $0 \leq x \leq 5$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Dezimetern (dm)

– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f.
– Kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung den kleinsten und den größten Radius dieses Abschlusselements.

Die Dichte des verwendeten Marmors beträgt 2,7 kg/dm³.

– Berechnen Sie die Masse des Abschlusselements.

Wassergefaesse * (B_313)

b) Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$y = 0{,}0001421 \cdot x^4$ mit $x \geq 0$

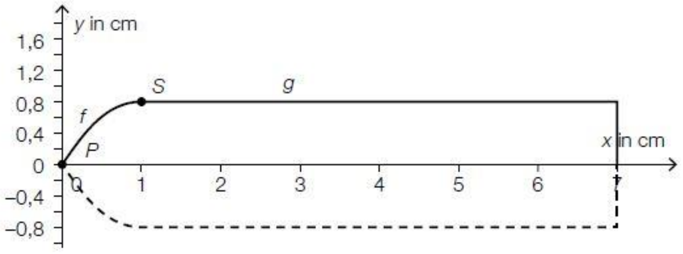
x, y ... Längen in cm

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.
Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

– Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Blut (B_372)

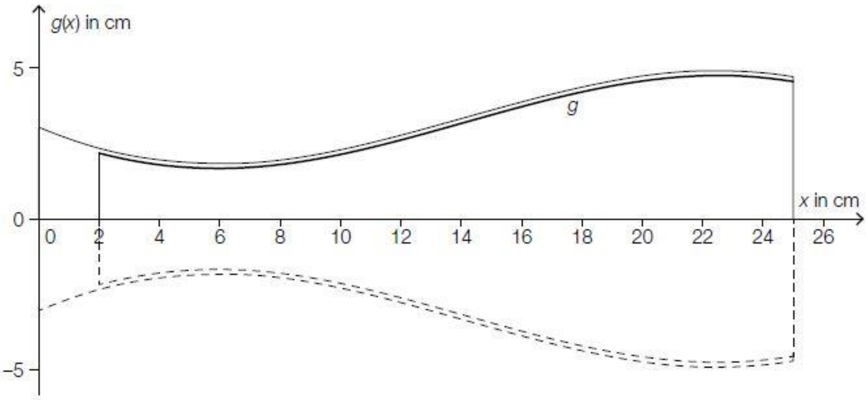
a) Zur Verabreichung von Medikamenten werden spezielle Dosiervorrichtungen verwendet. Die Form des Flüssigkeitsbehälters einer solchen Vorrichtung entsteht durch Rotation der dargestellten Kurve um die x-Achse. Die Kurve setzt sich aus einem Parabel- und einem Geradenstück zusammen. S ist der Scheitel der Parabel.



– Stellen Sie für die dargestellten Funktionen f und g je eine Funktionsgleichung auf.
– Berechnen Sie das Volumen des Flüssigkeitsbehälters in Millilitern.

Gastwirtschaft* (B_443)

b) Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:

$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3$ mit $2 \leq x \leq 25$

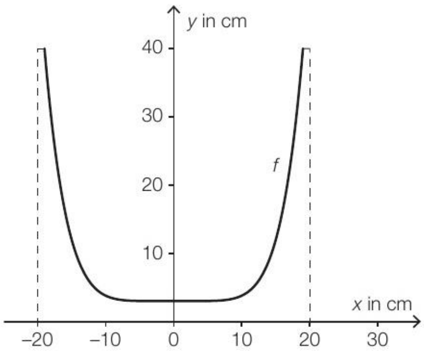
x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

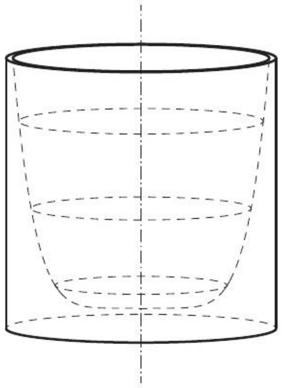
1) Berechnen Sie den kleinsten Innendurchmesser des Weizenbierglases.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.

Blumentopf * (B_474)

a) Ein Unternehmen produziert Blumentöpfe.
Der Außendurchmesser eines solchen Blumentopfs beträgt 40 cm. Auch die Gesamthöhe des Blumentopfs beträgt 40 cm. (Siehe nachstehende Abbildung.)





Für die Funktion f mit $f(x) = y$ gilt:

$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3$ mit $-19 \leq x \leq 19$

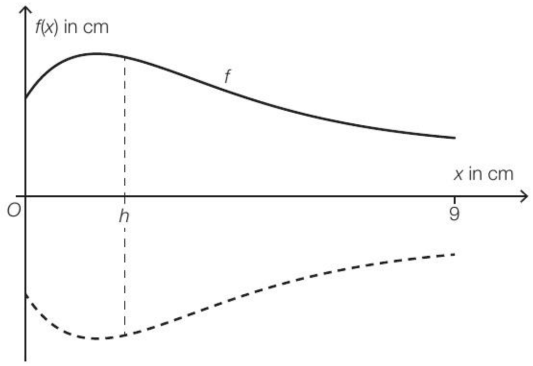
1) Begründen Sie, warum f eine gerade Funktion ist.

Die Innenwand des Blumentopfs entsteht durch Rotation des oben dargestellten Graphen von f um die y-Achse.

2) Berechnen Sie das Innenvolumen des Blumentopfs.

Obstfliegenfalle * (B_486)

a) Die Obstfliegenfalle kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 1 + 2{,}7 \cdot (x + 0{,}5) \cdot e^{-\frac{2 \cdot x + 1}{4}}$ für $0 \leq x \leq 9$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Obstfliegenfalle wird mit 50 cm³ Flüssigkeit befüllt.

In einem Abstand h vom Boden der Obstfliegenfalle soll eine Markierung für diese Flüssigkeitsmenge angebracht werden (siehe obige Abbildung).
Mit der nachstehenden Gleichung soll dieser Abstand h berechnet werden.

$\pi \cdot \int_0^{\square} (f(x))^2 \, dx = \square$

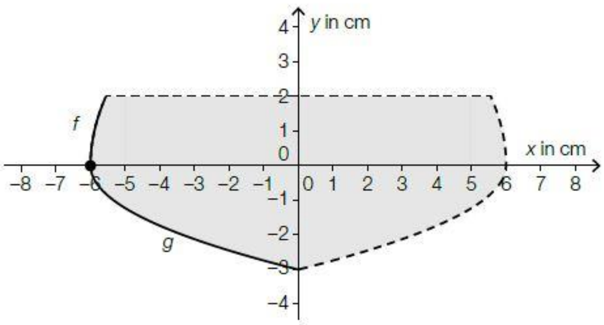
1) Vervollständigen Sie die obige Gleichung durch Eintragen in die dafür vorgesehenen Kästchen.

2) Berechnen Sie h.

All Star Level

Champagner * (B_215)

b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion *f* und des Graphen der Wurzelfunktion *g* um die *y*-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für *f* gilt: $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$
Für *g* gilt: $y = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für *a* ab.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

Schachfigur (B_057)

a) Eine Alternative zu obiger Polynomfunktion ist eine Funktion mit $f(x) = -0{,}5\ \sin(x) + 1$ mit $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

– Stellen Sie die Funktion in diesem Intervall grafisch dar.
– Berechnen Sie das Volumen der so entstehenden Schachfigur mithilfe der Integralrechnung.

b) Zur Berechnung des Volumens *V* eines Rotationskörpers kann die zweite Guldin'sche Regel verwendet werden:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot R$$

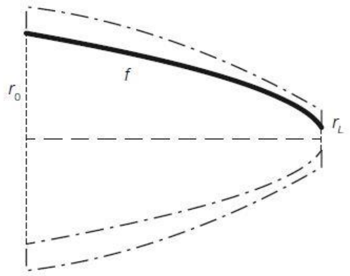
A … Flächeninhalt der erzeugenden Fläche
R … Normalabstand des Schwerpunkts dieser Fläche von der Rotationsachse

Für die Rotation von *f* um die *x*-Achse gilt: $R = \frac{1}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\mathrm{d}x$.

– Zeigen Sie, wie man die zweite Guldin'sche Regel aus dieser Formel erhält.

Der Venturi Effekt (B_111)

b) Bei einer speziellen Düse ist der Innenradius r_0 am linken Rand der Düse 5 mm. Die Austrittsöffnung (rechts) hat einen Innenradius von $r_L = 0{,}5$ mm. Die Länge der Düse L ist 25 mm. Die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Begrenzungslinie lässt sich durch die Funktion f beschreiben: $f(x) = \sqrt{a - b \cdot x}$, $0 \text{ mm} \leq x \leq 25$ mm.



– Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion f.
– Berechnen Sie das Innenvolumen der Wasserdüse.

Lösungen

Rookie Level

Der Schall (B_067) Lösung

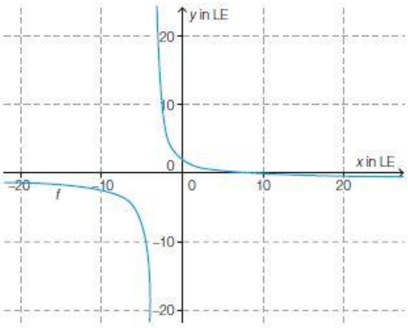
d) $V_x = \pi \cdot \int_5^{30} f^2(x)\,dx$

$V_x = \pi \cdot \int_5^{30} \left(\frac{x^3}{3\,000} + 4\right)^2 dx$

$V_x \approx 4\,042 \text{ cm}^3$

Hydraulik (B_287) Lösung

b)



$x_N \approx 8{,}265$

$V_x = \pi \cdot \int_0^{8{,}265} (f(x))^2\,dx = 17{,}0678\ldots \text{ VE}$

$V_x \approx 17{,}07 \text{ VE}$

Volumen eines Baumes * (B_310) Lösung

d) $V = \pi \cdot \int_0^{32} \left(f(x)\right)^2 dx$

Schwimmverein (B_366) Lösung

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(0) = 0$ bzw. $e = 0$

$f(6) = 0$ bzw. $1\,296 \cdot a + 216 \cdot b + 36 \cdot c + 6 \cdot d + e = 0$

$f(8) = 0$ bzw. $4\,096 \cdot a + 512 \cdot b + 64 \cdot c + 8 \cdot d + e = 0$

$f'(6) = -\frac{18}{5}$ bzw. $864 \cdot a + 108 \cdot b + 12 \cdot c + d = -\frac{18}{5}$

$f'(0) = 0$ bzw. $d = 0$

$g(x) = 0{,}05 \cdot x^4 - 0{,}7 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2 - 4$

Mit dem Ausdruck wird die Differenz der Rotationsvolumina durch die beiden Funktionen f und g bei Rotation um die x-Achse im Intervall [2; 4] berechnet.

Pro Level

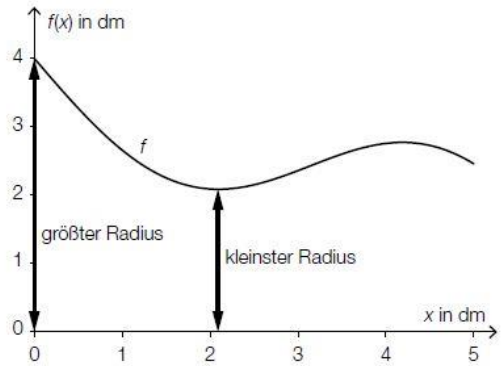
Abrissbirnen * (B_012) Lösung

c) Berechnung der Nullstelle b mittels Technologieeinsatz: $b = 14{,}0...$

$\pi \cdot \int_a^b (g(x))^2\,dx = 10$
Berechnung der Stelle a mittels Technologieeinsatz: $a = 12{,}7...$

Statuen und Skulpturen (1) * (B_378) Lösung

c)



$V = \pi \cdot \int_0^5 \left(4 - \frac{x}{2} - \sin(x)\right)^2 dx = 109{,}78\ldots$
Die Masse (in kg) ist das Produkt aus Dichte (in kg/dm³) und Volumen (in dm³):
$2{,}7 \cdot 109{,}78\ldots = 296{,}41\ldots$
Die Masse beträgt rund 296,4 kg.

Wassergefaesse * (B_313) Lösung

b) Höhe des Gefäßes: $H = 0{,}0001421 \cdot 30^4 = 115{,}101$

$V = \int_0^H \pi \cdot x^2\,dy = \int_0^H \pi \cdot \sqrt[2]{\frac{y}{0{,}0001421}}\,dy = 216960,\ldots$

$V \approx 216\,960\ \text{cm}^3 \approx 217$ Liter

Blut (B_372) Lösung

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

I: $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$
II: $f(1) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 0{,}8$
III: $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a + b = 0$

$a = -0{,}8$
$b = 1{,}6$
$c = 0$

$f(x) = -0{,}8 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x$
$g(x) = 0{,}8$

$V = \pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2\,dx + 0{,}8^2 \cdot \pi \cdot 6$
$V = 13{,}136\ldots$

Das Volumen des Flüssigkeitsbehälters beträgt rund 13,14 ml.

Gastwirtschaft * (B_443) Lösung

b1) $g'(x) = 0$ *oder* $-0{,}00324 \cdot x^2 + 0{,}092 \cdot x - 0{,}4367 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 6{,}025...$
$(x_2 = 22{,}369...)$

Anhand der Grafik ist erkennbar, dass der Tiefpunkt an der Stelle x_1 ist, ein (rechnerischer) Nachweis, dass x_1 eine Minimumstelle ist, ist daher nicht erforderlich.

Innendurchmesser: $d = 2 \cdot g(x_1) = 3{,}60...$

Der kleinste Innendurchmesser des Weizenbierglases beträgt rund 3,6 cm.

b2) $V = \pi \cdot \int_2^{25} (g(x))^2\,dx = 678{,}6...$

Das Füllvolumen des Weizenbierglases beträgt rund 0,68 L.

Blumentopf * (B_474) Lösung

a1) Die Funktion f ist gerade, weil der Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

oder:

Die Funktion f ist gerade, weil $f(x) = f(-x)$.

oder:

Die Funktion f ist gerade, weil f eine Polynomfunktion ist, in der die einzige auftretende Potenz von x einen geradzahligen Exponenten hat.

a2) Ansatz: $\pi \cdot \int_3^{40} x^2\,dy$

$\pi \cdot \int_3^{40} 19^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{y-3}{37}}\,dy = 31\,471{,}6...$

Das Innenvolumen des Blumentopfs beträgt rund 31 472 cm³.

Obstfliegenfalle * (B_486) Lösung

a1) $\pi \cdot \int_0^{\boxed{h}} (f(x))^2\,dx = \boxed{50}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$h = 2{,}04...$

All Star Level

Champagner * (B_215) Lösung

b1) $a = 6$

b2) $V_y = \pi \cdot \left(\int_0^2 \left(\frac{y^2}{9} - 6\right)^2 dy + \int_{-3}^0 \left(\frac{y^2 - 9}{1,5}\right)^2 dy\right) = 396{,}2...$

Das Füllvolumen beträgt rund 396 ml.

b3) $\pi \cdot \int_{-3}^h \left(\frac{y^2 - 9}{1,5}\right)^2 dy = 150$

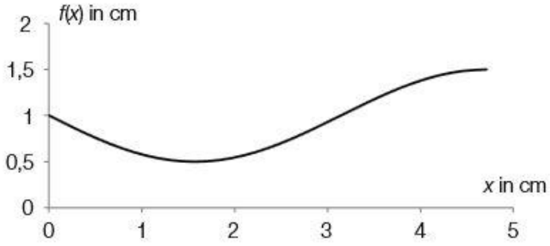
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h = -0{,}275...$
$3 - 0{,}275... = 2{,}724...$

Die Füllhöhe beträgt rund 2,72 cm.

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn nur der Wert für h richtig ermittelt wurde.

Schachfigur (B_057) Lösung

a) $f(x) = -0{,}5 \sin(x) + 1$



Das Volumen wird mithilfe von Technologieeinsatz (z. B. mit Mathcad) berechnet:

$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-0{,}5 \sin(x) + 1)^2 dx = 13{,}513...$

Das Volumen der Schachfigur beträgt ca. 13,5 cm³.

b) $R = \frac{1}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \mid \cdot 2\pi$

$2\pi \cdot R = \frac{2\pi}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \mid \cdot A$

$A \cdot 2\pi \cdot R = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx$

$A \cdot 2\pi \cdot R = V_x$

Der Venturi Effekt (B_111) Lösung

b) $f(0) = 5 \Rightarrow \sqrt{a - b \cdot 0} = 5 \Rightarrow a = 25$

$f(25) = 0{,}5 \Rightarrow \sqrt{25 - b \cdot 25} = 0{,}5 \Rightarrow b = 0{,}99$

Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_0^{25} \left(\sqrt{25 - 0{,}99 \cdot x}\right)^2 dx \approx 992 \text{ mm}^3$