Logarithmus

Rookie Level

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152)

d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

(1) $N = 8 \cdot 1{,}02^t$
(2) $\ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1{,}02)$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig.

Joghurt (A_138)

a) Für die Herstellung von Joghurt werden Milchsäurebakterien verwendet. Das Wachstum der Milchsäurebakterien kann durch die folgende Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 20 \cdot 1{,}02337^t$

t ... Zeit in Minuten (min)
$N(t)$ ... Bakterienmasse in Mikrogramm (μg) nach t Minuten

– Lesen Sie das prozentuelle Wachstum pro Minute ab.
– Berechnen Sie die Masse der Bakterien nach 1 Stunde in Gramm in der Gleitkommadarstellung.
– Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Rechenschritt falsch ist.

$\frac{a}{20} = 1{,}02337^t$

$\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}02337)$

Sternbild Grosser Wagen (1) * (B_014)

c) In der Astronomie wird als Maß für die Entfernung r eines Sterns von der Erde der sogenannte *Entfernungsmodul* $5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10}\right)$ verwendet.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der <u>nicht</u> dem Entfernungsmodul entspricht. *[1 aus 5]*

$-5 \cdot \lg\left(\frac{10}{r}\right)$	☐
$-5 + \lg(r^5)$	☐
$\lg\left(\left(\frac{r}{10}\right)^5\right)$	☐
$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☐
$5 \cdot (\lg(r) - 1)$	☐

Strauchwachstum (A_094)

Die Höhe eines Strauches wird in den ersten Tagen nach dem Auspflanzen durch die Funktion h_1 beschrieben:

$h_1(t) = 0{,}08 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ für $0 \leq t < 55$

t … Zeit in Tagen (d)
$h_1(t)$ … Höhe des Strauches in Metern (m) zur Zeit t

b) Die Funktionsgleichung der Funktion h_1 wurde fehlerhaft logarithmiert:

$\lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot \lg(e) + t \cdot \lg(e) = \lg(h_1(t))$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung richtig.

pH-Wert (A_272)

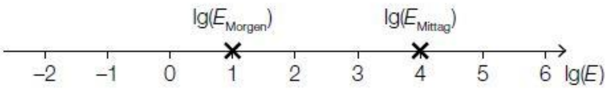
a) Die Funktionsgleichung der Konzentration der H_3O^+-Ionen in Abhängigkeit vom pH-Wert lautet: $y = 10^{-x}$

x … pH-Wert
y … Konzentration der H_3O^+-Ionen

– Logarithmieren Sie die Gleichung mit dem Logarithmus zur Basis 10 und ersetzen Sie die logarithmierte linke Seite $\log_{10}(y)$ durch Y.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Y für den pH-Wertebereich 0 bis 14.

Sonnenaufgang* (A_284)

b) An einem Wintertag wurde die Beleuchtungsstärke E in Lux am Morgen und zu Mittag gemessen. Die dekadischen Logarithmen (Logarithmen zur Basis 10) der beiden Messergebnisse sind nachstehend dargestellt:



Marco behauptet, die Beleuchtungsstärke E sei an diesem Tag zu Mittag 4-mal so hoch wie am Morgen gewesen.

1) Zeigen Sie, dass Marcos Behauptung falsch ist.

Pro Level

Durchhaengende Kette (A_214)

c) Für eine Abstandsberechnung wurden ausgehend von der Gleichung $e^x + e^{-x} = 2{,}5$ folgende Umformungsschritte durchgeführt:

(1) $e^x + \frac{1}{e^x} = 2{,}5$

(2) $e^{2 \cdot x} + 1 = 2{,}5 \cdot e^x$

(3) $\ln(e^{2 \cdot x}) + \ln(1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$

(4) $2 \cdot x + 0 = \ln(2{,}5) + x$

(5) $x = \ln(2{,}5)$

In der Umformung von Zeile 2 auf Zeile 3 wurde ein Fehler gemacht.

– Erklären Sie, worin der Fehler besteht.

Erdbeben (A_027)

Die Stärke von Erdbeben wird meist auf der Richterskala angegeben. Dabei wird der Ausschlag gemessen, den ein Erdbeben auf einem Seismographen (Messgerät) verursacht, und so die Magnitude M ermittelt.

c) Für einen d Kilometer vom Epizentrum des Bebens entfernten Seismographen gilt:

$$M = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$$

M ... Magnitude
$A(d)$ ... Ausschlag des Bebens in Mikrometern (µm)
$A_0(d)$ ... Ausschlag (in µm) eines Bebens der Magnitude $M = 0$

– Geben Sie an, wie sich die Magnituden zweier Beben unterscheiden, wenn der Ausschlag des zweiten Bebens 10-mal so groß ist wie derjenige des ersten Bebens. Erklären Sie Ihr Ergebnis mithilfe der logarithmischen Rechengesetze.

Fahrzeugtests (1) (B_045)

c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit R mithilfe einer Funktion R folgender Form beschrieben werden kann:

$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$R(t)$ ... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind
t ... Benützungsdauer
T, b ... materialabhängige Parameter

Der Parameter T wird *charakteristische Lebensdauer* genannt.

– Weisen Sie nach, dass nach der charakteristischen Lebensdauer der Prozentsatz der intakten Bremsbeläge – unabhängig vom Wert des Parameters b – ca. 36,8 % beträgt.
– Ermitteln Sie die fehlerhafte Zeile in folgender Umformung der Formel $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$ nach der Benützungsdauer t.
– Formen Sie die fehlerhafte Zeile so um, dass diese mathematisch richtig ist.

1. $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$
2. $\ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$
3. $\frac{\ln(R)}{b} = -\frac{t}{T}$
4. $t = -T \cdot \frac{\ln(R)}{b}$

Richtfunk (B_375)

c) Der Antennengewinn-Faktor G ist ein Maß für die Verstärkung einer Antenne.

$G = \frac{4 \cdot \pi}{\lambda^2} \cdot A \cdot \eta$

η ... dimensionsloser Parameter
A … Antennenfläche in m²
λ … Wellenlänge in m
G … Antennengewinn-Faktor

– Geben Sie an, um welchen Faktor sich G verändert, wenn λ verdoppelt wird.

Für den Antennengewinn g in Dezibel (dB) gilt:
$G = 10^{\frac{g}{10}}$

– Zeigen Sie mithilfe der Logarithmusrechenregeln, dass eine Verdoppelung von G eine Erhöhung von g um rund 3 dB hervorruft.

Helligkeit (A_125)

a) Die nachstehende Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen der Leuchtdichte und der menschlichen Empfindungsstärke:

$E(L) = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$

L … Leuchtdichte in cd/m²
$E(L)$ … Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L
L_0 … minimale wahrnehmbare Leuchtdichte in cd/m²
$c > 0$ … Konstante

– Weisen Sie nach, dass die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 unabhängig von c ist.

Die Formel $E = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$ wird nach L_0 umgeformt.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der ein richtiges Ergebnis dieser Umformung ist. *[1 aus 5]*

$L_0 = \frac{L \cdot 10^E}{10^c}$	☐
$L_0 = \frac{L \cdot c}{10^E}$	☐
$L_0 = \frac{10^L}{c \cdot 10^E}$	☐
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	☐
$L_0 = \frac{c \cdot 10^L}{10^E}$	☐

Das perfekte Ei (A_073)

b) Der Ausdruck $\ln\left(\frac{2 \cdot (T_S - T_A)}{T_S - T_{Ei}}\right)$ kann in einen der folgenden Ausdrücke umgeformt werden.

– Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck an. *[1 aus 5]*

$\ln\left(\frac{2 \cdot T_A}{T_{Ei}}\right)$	☐
$2 \cdot \ln\left(\frac{T_S - T_A}{T_S - T_{Ei}}\right)$	☐
$\ln(2) + \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_A)} - \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_{Ei})}$	☐
$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_{Ei})$	☐
$\ln(2) + \ln(T_S) - \ln(T_A) - \ln(T_S) + \ln(T_{Ei})$	☐

All Star Level

Lichtwellenleiter * (B_379)

c) Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen.
Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D, die in Dezibel angegeben wird:

$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$ in Dezibel (dB)

I_0 ... Anfangsintensität
I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

– Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht.

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ angegeben.

– Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

Ausstellungshalle * (B_116)

d) Der Schallpegel in der Ausstellungshalle soll durch zusätzliche Absorptionsflächen vermindert werden. Dabei gilt:

$L(A) = 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right)$
A … Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche in m^2
$L(A)$ … Schallpegelminderung bei einer zusätzlichen Absorptionsfläche A in Dezibel (dB)

1) Berechnen Sie den Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche, die für eine Schallpegelminderung um 10 dB benötigt wird.

Gebaeudetechnik * (B_260)

b) Um das Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} einer Wand aus Ziegelmauer und Fenster in Dezibel (dB) zu berechnen, wird in der Gebäudetechnik die nachstehende Formel verwendet.

$R_{Ges} = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{R_F}{10}} + f_Z \cdot 10^{-\frac{R_Z}{10}}\right)$

f_F … relativer Flächenanteil des Fensters an der gesamten Wandfläche
f_Z … relativer Flächenanteil der Ziegelmauer an der gesamten Wandfläche
R_F, R_Z … Schalldämmmaß des Fensters bzw. der Ziegelmauer in dB
R_{Ges} … Gesamtschalldämmmaß der Wand in dB

Ein Bauunternehmen plant, aus einer 50 m^2 großen Wand eine Fensterfläche herauszubrechen. Dabei hat das Fenster ein Schalldämmmaß von $R_F = 43$ dB, die Ziegelmauer ein Schalldämmmaß von $R_Z = 65$ dB.

Es wird ein Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} von mindestens 55 dB für diese Wand gefordert.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F, den die Fensterfläche in dieser Wand maximal erreichen darf.

2) Berechnen Sie diese Fensterfläche in m^2.

Lösungen

Rookie Level

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152) Lösung

d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1{,}02)$

Joghurt (A_138) Lösung

a) Die Masse der Bakterien wächst um 2,337 % pro Minute.

$N(60) = 20 \cdot 1{,}02337^{60} = 79{,}9... \approx 80$
80 µg = 0,000080 g = $8 \cdot 10^{-5}$ g

Nach 1 h sind rund $8 \cdot 10^{-5}$ g vorhanden.

Bei $\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}02337)$ wurden die logarithmischen Rechenregeln falsch angewendet.
Die linke Seite der Gleichung muss lauten: $\log\left(\frac{a}{20}\right)$ bzw. $\log(a) - \log(20)$

Sternbild Grosser Wagen (1) * (B_014) Lösung

c)

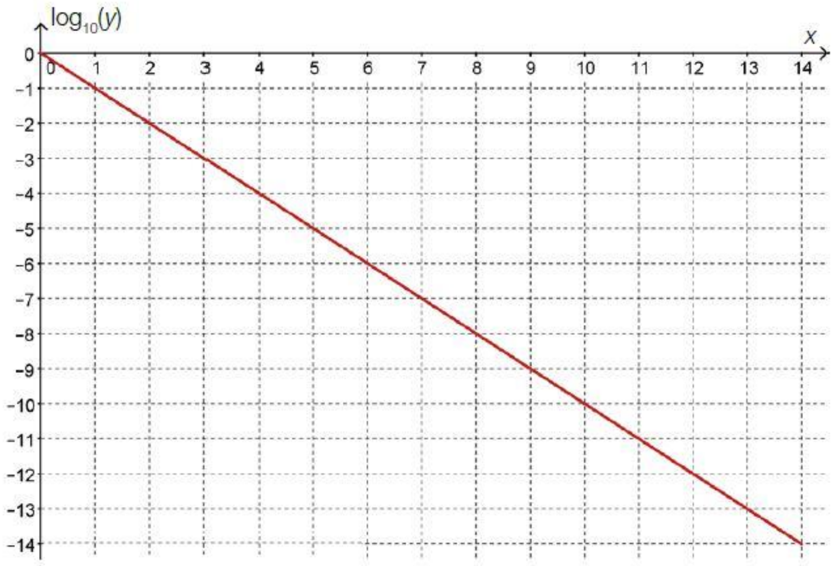
$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☒

Strauchwachstum (A_094) Lösung

b) richtige Gleichung:
$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot t \cdot \lg(e)$

pH-Wert (A_272) Lösung

a) $Y = -x$



Sonnenaufgang* (A_284) Lösung

b1) Mit den konkreten Zahlen folgt: $E_{Morgen} = 10$ Lux, $E_{Mittag} = 10000$ Lux
Daher war die Beleuchtungsstärke zu Mittag nicht 4-mal so hoch wie am Morgen.

Auch ein allgemeiner Nachweis ist als richtig zu werten.

Pro Level

Durchhaengende Kette (A_214) Lösung

c) Es wurde nicht die Summe logarithmiert, sondern die Summanden.
Richtig müsste es heißen: $\ln(e^{2\cdot x} + 1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$.

Erdbeben (A_027) Lösung

c) Ausschlag des ersten Bebens ... $A(d) \quad \Rightarrow \quad M_1 = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$

Ausschlag des zweiten Bebens ... $10 \cdot A(d) \quad \Rightarrow \quad M_2 = \lg\left(\frac{10 \cdot A(d)}{A_0(d)}\right)$

$$M_2 = \lg\left(\frac{10 \cdot A(d)}{A_0(d)}\right) = \lg\left(10 \cdot \frac{A(d)}{A_0(d)}\right) = \lg(10) + \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right) = 1 + M_1$$

Ist der Ausschlag 10-mal so stark, dann ist die Magnitude um 1 größer.

Fahrzeugtests (1) (B_045) Lösung

c) $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$R(T) = e^{-\left(\frac{T}{T}\right)^b}$

$R(T) = e^{-1} = 0{,}3678... \approx 36{,}8\ \%$

$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad \Rightarrow \quad \ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$

Der Ausdruck $b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$ ist falsch (2. Zeile).
(Begründung: Die Potenz wurde falsch interpretiert bzw. das Logarithmusgesetz falsch angewendet.)

korrekte Umformung:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$$\ln(R) = \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$$

$$\ln(R) = -\left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$-\ln(R) = \left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$\sqrt[b]{-\ln(R)} = \frac{t}{T}$$

$$t = T \cdot \sqrt[b]{-\ln(R)}$$

Richtfunk (B_375) Lösung

c) Wenn die Wellenlänge λ verdoppelt wird, beträgt G nur noch ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

$G = 10^{\frac{g}{10}}$

$\lg(G) = \frac{g}{10}$

$10 \cdot \lg(G) = g$

Für eine Verdoppelung von G gilt:

$$g_{\text{neu}} = 10 \cdot \lg(2 \cdot G) = \underbrace{10 \cdot \lg(2)}_{=3{,}010\ldots} + \underbrace{10 \cdot \lg(G)}_{=g} \approx 3 + g$$

Helligkeit (A_125) Lösung

a) $E(L_0) = c \cdot \lg\left(\frac{L_0}{L_0}\right) = c \cdot \lg(1) = c \cdot 0 = 0$

Die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 hat den Wert 0 und ist daher unabhängig von c.

[...]	
[...]	
[...]	
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	☒
[...]	

Das perfekte Ei (A_073) Lösung

b)

$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_{Ei})$	☒

All Star Level

Lichtwellenleiter * (B_379) Lösung

c) $D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{0{,}955 \cdot I_0}\right) = 0{,}19\ldots$

Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.

$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$

$I = I_0 \cdot 10^{-2}$

Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.

$D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$D_1 = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$

Durch Herausheben von –1 erhält man:

$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I))$

$D_1 = -10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$

$\Rightarrow\ D_1 = -D$

Ausstellungshalle * (B_116) Lösung

d1) $L(A) = 10$ *oder* $10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right) = 10$

$A = 90$

Es wird eine zusätzliche Absorptionsfläche von 90 m^2 genötigt.

Gebaeudetechnik * (B_260) Lösung

b1) $55 = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{43}{10}} + (1 - f_F) \cdot 10^{-\frac{65}{10}}\right)$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$f_F = 0{,}0571\ldots$

maximale Fensterfläche: $0{,}0571\ldots \cdot 50 = 2{,}857\ldots$

Die maximale Fensterfläche, die das geforderte minimale Gesamtschalldämmmaß erfüllt, beträgt rund 2,86 m^2.