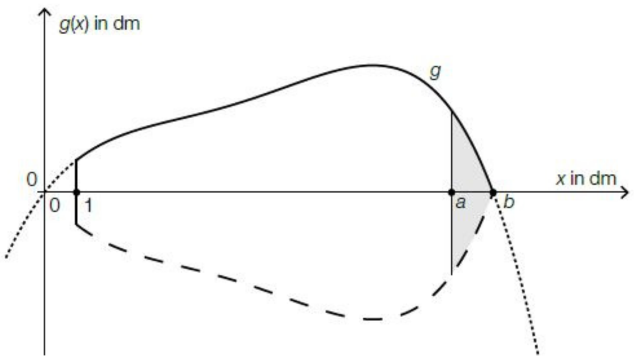
Inhaltsverzeichnis

Abrissbirnen (1) * (B_012)

c) Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$g(x) = -0{,}00157 \cdot x^4 + 0{,}03688 \cdot x^3 - 0{,}29882 \cdot x^2 + 1{,}26325 \cdot x$



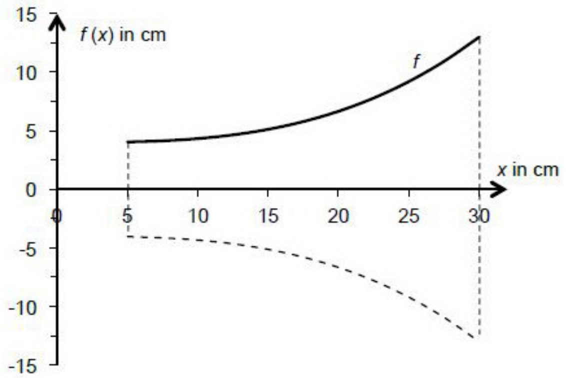
– Berechnen Sie die Nullstelle b.

Das Volumen dieser Abrissbirne soll verkleinert werden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; a]$ um die x-Achse entsteht die Form einer Abrissbirne mit einem um 10 dm³ kleineren Volumen.

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung dargestellte Stelle a.

Der Schall (B_067)

d) Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.
Die nachstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.

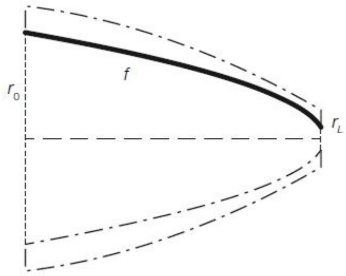


Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird im relevanten Intervall durch die Funktion f beschrieben: $f(x) = \frac{x^3}{3\,000} + 4$.

– Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

Der Venturi Effekt (B_111)

b) Bei einer speziellen Düse ist der Innenradius r_0 am linken Rand der Düse 5 mm. Die Austrittsöffnung (rechts) hat einen Innenradius von $r_L = 0{,}5$ mm. Die Länge der Düse L ist 25 mm. Die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Begrenzungslinie lässt sich durch die Funktion f beschreiben: $f(x) = \sqrt{a - b \cdot x}$, $0 \text{ mm} \leq x \leq 25$ mm.

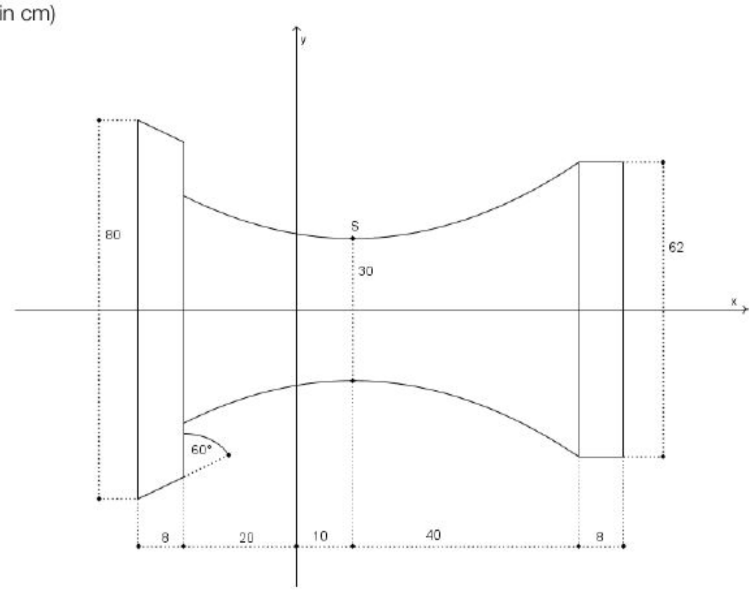


– Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion f.
– Berechnen Sie das Innenvolumen der Wasserdüse.

Drechseln (A_003)

Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers, der durch eine um die x-Achse drehende Parabel mit einem aufgesetzten Drehkegelstumpf und einem Drehzylinder entsteht. Die Formgebung erfolgt durch Drechseln eines Holzzylinders.

(Maße in cm)



c) – Berechnen Sie den Abfall in Prozent, der bei der Herstellung des Drehteils anfällt, wenn der Rohling einen Durchmesser $d = 8{,}5$ dm hat und die Parabel durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

d) Gegeben sind folgende Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$$

Bei Rotation von Flächenstücken um die x-Achse entstehen Rotationskörper, deren Volumina durch folgende Formeln berechnet werden können:

$$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$$

– Stellen Sie für jede der beiden Volumsformeln das rotierende Flächenstück grafisch dar.

Hydraulik (B_287)

b) Für die Modellierung eines speziellen Gehäuses eines Hydraulikzylinders wird die Funktion f verwendet.

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1 \cdot x + 0{,}35} - 0{,}85$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Längeneinheiten

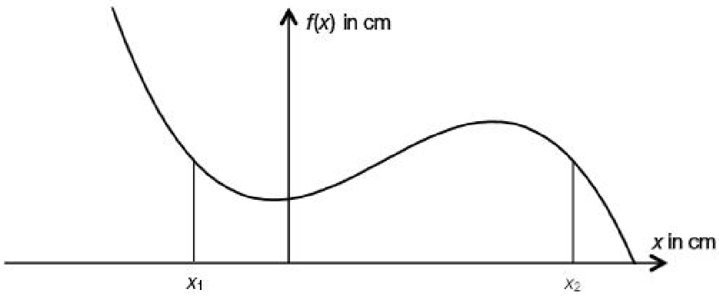
– Zeichnen Sie die Funktion f im Intervall $[-20; 20]$.

Rotiert die Funktion f im Intervall $[0; x_N]$ um die x-Achse, erhält man ein Modell des gewünschten Gehäuses, wobei x_N die Nullstelle der Funktion f ist.

– Berechnen Sie das Volumen des Gehäuses.

Schachfigur (B_057)

Auf einer Fräsmaschine wird eine einfache Schachfigur gefertigt. Wenn die im nachstehenden Diagramm dargestellte Polynomfunktion 3. Grades im Intervall $[x_1; x_2]$ um die x-Achse rotiert, entsteht die Kontur der rotationssymmetrischen Figur.



a) Eine Alternative zu obiger Polynomfunktion ist eine Funktion mit $f(x) = -0{,}5 \sin(x) + 1$ mit $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

– Stellen Sie die Funktion in diesem Intervall grafisch dar.
– Berechnen Sie das Volumen der so entstehenden Schachfigur mithilfe der Integralrechnung.

b) Zur Berechnung des Volumens V eines Rotationskörpers kann die zweite Guldin'sche Regel verwendet werden:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot R$$

A … Flächeninhalt der erzeugenden Fläche
R … Normalabstand des Schwerpunkts dieser Fläche von der Rotationsachse

Für die Rotation von f um die x-Achse gilt: $R = \frac{1}{2A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\mathrm{d}x$.

– Zeigen Sie, wie man die zweite Guldin'sche Regel aus dieser Formel erhält.

Statuen und Skulpturen (1) * (B_378)

c) Das Abschlusselement einer Säule soll aus Marmor hergestellt werden. Dieses kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse beschrieben werden:

$f(x) = 4 - \frac{x}{2} - \sin(x)$ mit $0 \leq x \leq 5$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Dezimetern (dm)

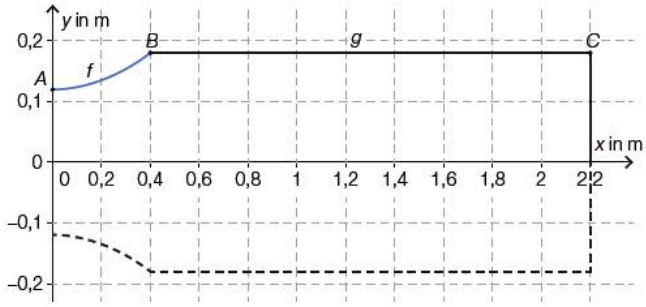
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f.
– Kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung den kleinsten und den größten Radius dieses Abschlusselements.

Die Dichte des verwendeten Marmors beträgt 2,7 kg/dm³.

– Berechnen Sie die Masse des Abschlusselements.

Palisadenzaeune (B_334)

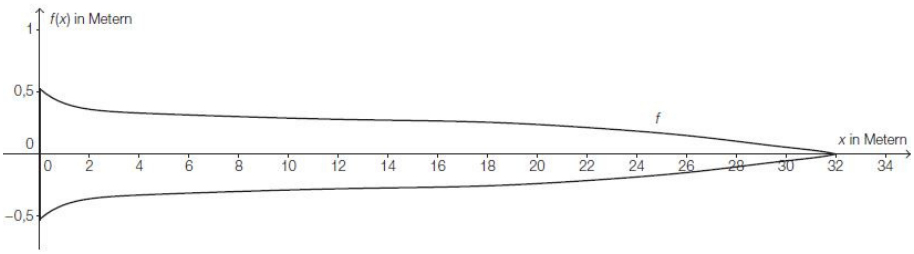
b) Das Volumen eines Zaunpfahls ergibt sich durch die Rotation der Funktionen f und g um die x-Achse. Fichtenholz hat eine Dichte von etwa 0,43 g/cm³.
Die Funktion wird beschrieben durch: $f(x) = 0{,}375 \cdot x^2 + 0{,}12$ mit $0 \leq x \leq 0{,}4$.
Die Funktion g ist zwischen B und C konstant.



– Berechnen Sie die Masse des Zaunpfahls in Kilogramm.
– Erklären Sie, um welchen Faktor sich die Masse des zylindrischen Teils des Zaunpfahls verändert, wenn sein Durchmesser halbiert wird.

Volumen eines Baumes * (B_310)

d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen V des Baumstamms berechnet werden kann.

V = ______________________________

Wassergefaesse * (B_313)

b) Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$y = 0{,}0001421 \cdot x^4$ mit $x \geq 0$

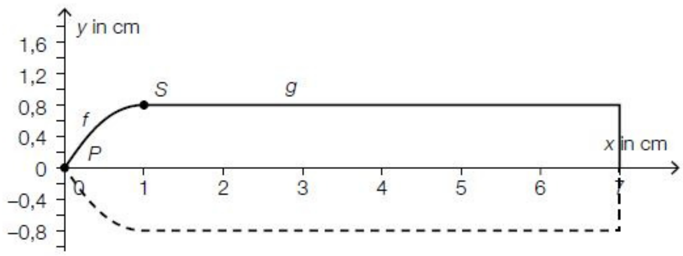
x, y ... Längen in cm

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.
Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

– Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Blut (B_372)

a) Zur Verabreichung von Medikamenten werden spezielle Dosiervorrichtungen verwendet. Die Form des Flüssigkeitsbehälters einer solchen Vorrichtung entsteht durch Rotation der dargestellten Kurve um die x-Achse. Die Kurve setzt sich aus einem Parabel- und einem Geradenstück zusammen. S ist der Scheitel der Parabel.



– Stellen Sie für die dargestellten Funktionen f und g je eine Funktionsgleichung auf.
– Berechnen Sie das Volumen des Flüssigkeitsbehälters in Millilitern.