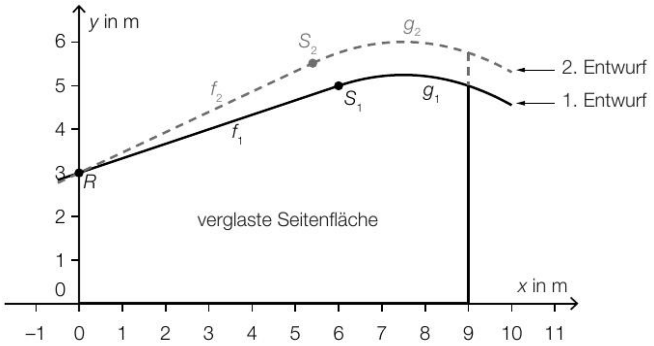
Bogenlänge

Rookie Level

Ausstellungshalle * (B_116)

In der nachstehenden Abbildung sind 2 verschiedene Entwürfe für eine Ausstellungshalle in der Seitenansicht dargestellt.



a) Im 1. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_1 und g_1 beschrieben:

$f_1(x) = 3 + \frac{x}{3}$ mit $-0{,}5 \leq x \leq 6$

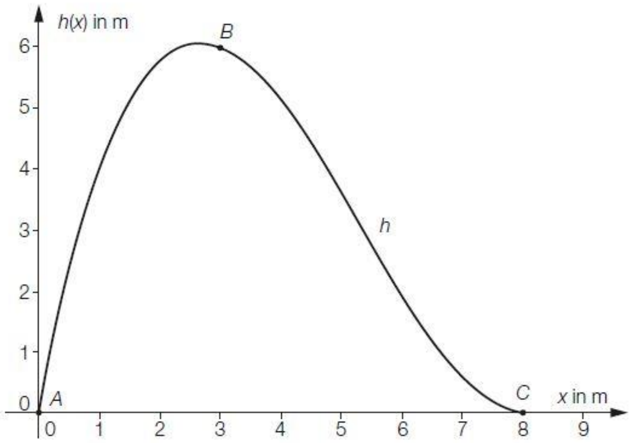
$g_1(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x - 1$ mit $6 \leq x \leq 10$

1) Berechnen Sie die Länge der Dachlinie im Intervall [–0,5; 10].

Pro Level

Drohnen (B_362)

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Flugbahn einer Drohne.



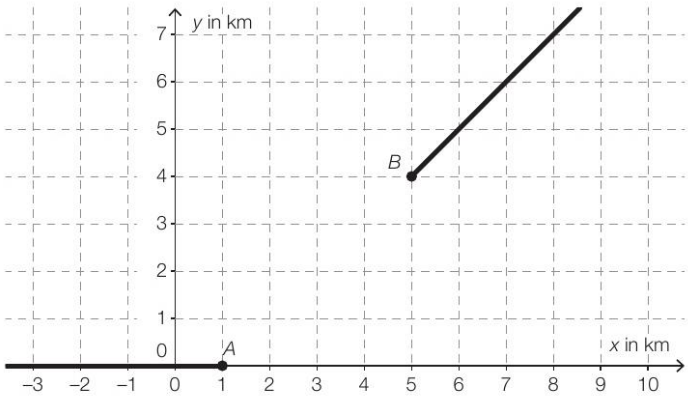
x ... horizontale Entfernung vom Startpunkt A in m
$h(x)$ ... Höhe der Drohne in der Entfernung x in m

Die Flugbahn der Drohne lässt sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion h dritten Grades beschreiben. Die Flugbahn verläuft durch den Punkt B und erreicht ein Minimum im Punkt C.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, das zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion benötigt wird.
– Ermitteln Sie eine Gleichung der Polynomfunktion.
– Berechnen Sie die Länge der Flugbahn zwischen A und C.

Strassenbahn (2) * (B_298)

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei" bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

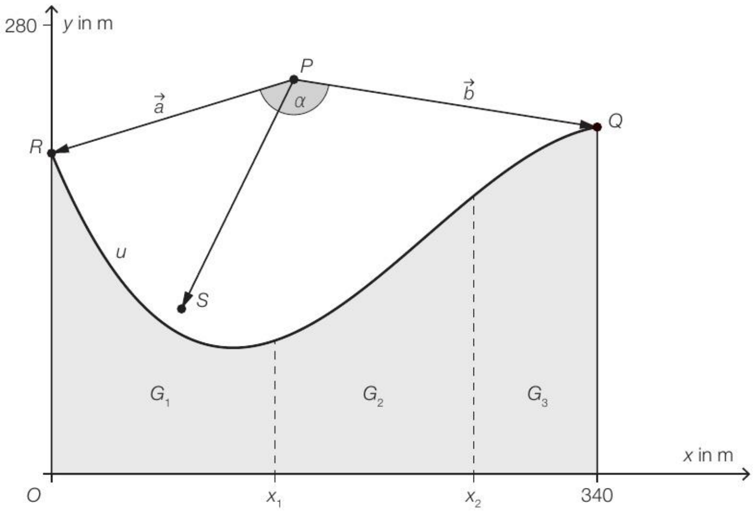
1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Mithilfe dieses Gleichungssystems erhält man: $g(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{11}{16} \cdot x^2 - \frac{19}{16} \cdot x + \frac{9}{16}$

2) Berechnen Sie die Länge dieser Gleisverbindung zwischen den Punkten A und B.

Grundstueck am See * (B_301)

Drei Geschwister erwerben ein Grundstück am See. Sie unterteilen das Grundstück in die 3 Grundstücke G_1, G_2 und G_3 (siehe nachstehende Abbildung).



Die Uferbegrenzungslinie wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion u beschrieben.

b) Das gesamte Grundstück besteht aus den 3 flächengleichen Grundstücken G_1, G_2 und G_3 (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion u gilt:

$u(x) = -2 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 200$ mit $0 \leq x \leq 340$

x, $u(x)$ ... Koordinaten in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gesamten Grundstücks.

Die Stelle x_1 markiert die Grenze zwischen den Grundstücken G_1 und G_2.

2) Berechnen Sie die Stelle x_1.

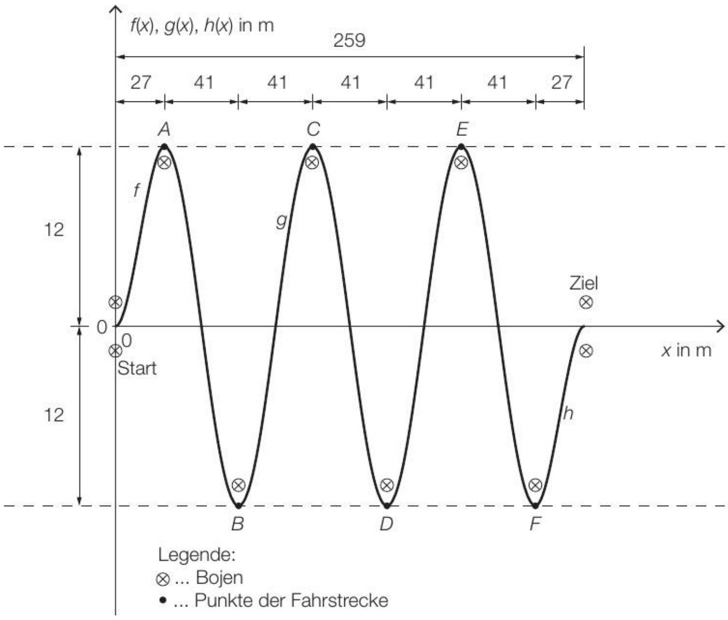
3) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung des Umfangs des Grundstücks G_2 an. *[1 aus 5]*

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$u(x_2) - u(x_1) + x_1 + x_2 + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) - u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐

All Star Level

Wasserski-Wettbewerb (1) * (B_470)

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

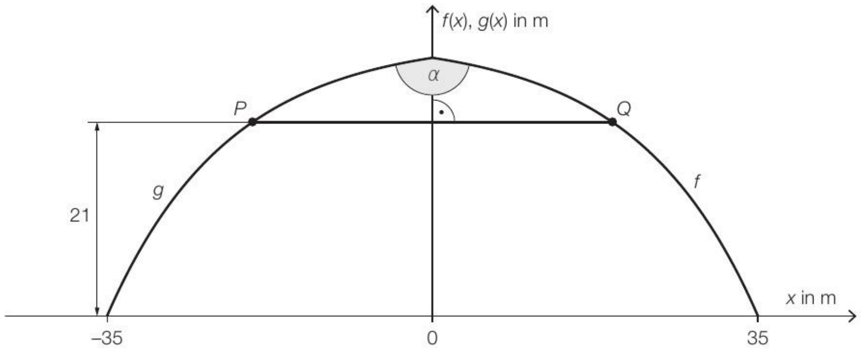
a) Für die gesamte Fahrt benötigt die Wasserskifahrerin 30 s.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{\int_0^{27} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{27}^{232} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx + \int_{232}^{259} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx}{30}$$

Bitterfelder Bogen * (B_477)

b) Der Verlauf des Bogens kann näherungsweise durch die Graphen der Funktionen f und g dargestellt werden. Die Graphen der beiden Funktionen sind zueinander symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Es gilt:
$f(x) = 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right)$ mit $0 \leq x \leq 35$

In einer Höhe von 21 m befindet sich die Aussichtsplattform.

1) Berechnen Sie die Länge $\overline{PQ}$.
2) Berechnen Sie den Schnittwinkel α der Graphen der Funktionen f und g.
3) Interpretieren Sie das Ergebnis des nachstehenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang.

$$2 \cdot \int_0^{35} \sqrt{1 + \left(-\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 94{,}57\ldots$$

Lösungen

Rookie Level

Ausstellungshalle * (B_116) Lösung

a1) $\int_{-0,5}^{6} \sqrt{1 + ((f_1'(x))^2}\, dx + \int_{6}^{10} \sqrt{1 + ((g_1'(x))^2}\, dx = 11,0...$

Die Länge der Dachlinie beträgt rund 11 m.

Pro Level

Drohnen (B_362) Lösung

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$B = (3|6) \quad C = (8|0)$

I: $h(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

II: $h(3) = 6 \Rightarrow 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 6$

III: $h(8) = 0 \Rightarrow 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 0$

IV: $h'(8) = 0 \Rightarrow 192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{25}, \quad b = -\frac{32}{25}, \quad c = \frac{128}{25}, \quad d = 0$

$h(x) = \frac{2}{25} \cdot x^3 - \frac{32}{25} \cdot x^2 + \frac{128}{25} \cdot x$

Berechnung der Weglänge s:

$h'(x) = \frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}$

$$s = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}\right)^2}\, dx$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$s = 15{,}245\ldots$ m

Strassenbahn (2) * (B_298) Lösung

b1) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g(1) = 0$

$g(5) = 4$

$g'(1) = 0$

$g'(5) = 1$

oder:

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$

$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 4$

$3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0$

$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 1$

b2) $\int_1^5 \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx = 5{,}778\ldots$

Die Länge dieser Gleisverbindung beträgt rund 5,78 km.

Grundstueck am See * (B_301) Lösung

b1) $\int_0^{340} u(x)\,\mathrm{d}x = 45\,881{,}8...$

Das Grundstück hat einen Flächeninhalt von rund 45 882 m².

b2) $\frac{45\,881{,}8...}{3} = \int_0^{x_1} u(x)\,\mathrm{d}x$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1)_1 = 139{,}1...$

$((x_1)_2 = 646{,}4...)$

b3)

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,\mathrm{d}x$	☒

All Star Level

Wasserski-Wettbewerb (1) * (B_470) Lösung

a1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit der Wasserskifahrerin in m/s berechnet.

Bitterfelder Bogen * (B_477) Lösung

b1) $f(x) = 21 \quad oder \quad 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right) = 21 \quad \Rightarrow \quad x = 19{,}34...$

$\overline{PQ} = 2 \cdot 19{,}34... = 38{,}69...$

Die Länge $\overline{PQ}$ beträgt rund 38,7 m.

b2) $f'(x) = -\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}$

$f'(0) = -0{,}156...$

Steigungswinkel: $\arctan(-0{,}156...) = -8{,}88...°$

$\alpha = 180° - 2 \cdot 8{,}8...° = 162{,}23...°$

b3) Es wird die Länge des Bogens berechnet.