

Logarithmus

Rookie Level	2
Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152).....	2
Joghurt (A_138)	2
Sternbild Grosser Wagen (1) * (B_014).....	2
Strauchwachstum (A_094).....	2
pH-Wert (A_272)	3
Sonnenaufgang* (A_284).....	3
Pro Level.....	4
Durchhaengende Kette (A_214)	4
Erdbeben (A_027)	4
Fahrzeugtests (1) (B_045)	4
Richtfunk (B_375).....	5
Helligkeit (A_125).....	5
Das perfekte Ei (A_073).....	5
All Star Level.....	6
Lichtwellenleiter * (B_379)	6
Ausstellungshalle * (B_116)	6
Gebaeudetechnik * (B_260)	6
Lösungen.....	7
Rookie Level.....	7
Pro Level.....	9
All Star Level.....	11

Rookie Level

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152)

d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

$$(1) N = 8 \cdot 1,02^t$$

$$(2) \ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1,02)$$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig.

Joghurt (A_138)

a) Für die Herstellung von Joghurt werden Milchsäurebakterien verwendet. Das Wachstum der Milchsäurebakterien kann durch die folgende Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = 20 \cdot 1,02337^t$$

t ... Zeit in Minuten (min)

$N(t)$... Bakterienmasse in Mikrogramm (μg) nach t Minuten

– Lesen Sie das prozentuelle Wachstum pro Minute ab.

– Berechnen Sie die Masse der Bakterien nach 1 Stunde in Gramm in der Gleitkomma-Darstellung.

– Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Rechenschritt falsch ist.

$$\frac{a}{20} = 1,02337^t$$

$$\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1,02337)$$

Sternbild Grosser Wagen (1) * (B_014)

c) In der Astronomie wird als Maß für die Entfernung r eines Sterns von der Erde der sogenannte *Entfernungsmodul* $5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10}\right)$ verwendet.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der nicht dem Entfernungsmodul entspricht.

[1 aus 5]

$-5 \cdot \lg\left(\frac{10}{r}\right)$	<input type="checkbox"/>
$-5 + \lg(r^5)$	<input type="checkbox"/>
$\lg\left(\left(\frac{r}{10}\right)^5\right)$	<input type="checkbox"/>
$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	<input type="checkbox"/>
$5 \cdot (\lg(r) - 1)$	<input type="checkbox"/>

Strauchwachstum (A_094)

Die Höhe eines Strauches wird in den ersten Tagen nach dem Auspflanzen durch die Funktion h_1 beschrieben:

$$h_1(t) = 0,08 \cdot e^{0,03t} \text{ für } 0 \leq t < 55$$

t ... Zeit in Tagen (d)

$h_1(t)$... Höhe des Strauches in Metern (m) zur Zeit t

b) Die Funktionsgleichung der Funktion h_1 wurde fehlerhaft logarithmiert:

$$\lg(0,08) + 0,03 \cdot \lg(e) + t \cdot \lg(e) = \lg(h_1(t))$$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung richtig.

pH-Wert (A_272)

- a) Die Funktionsgleichung der Konzentration der H_3O^+ -Ionen in Abhängigkeit vom pH-Wert lautet: $y = 10^{-x}$

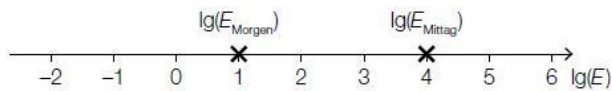
x ... pH-Wert

y ... Konzentration der H_3O^+ -Ionen

- Logarithmieren Sie die Gleichung mit dem Logarithmus zur Basis 10 und ersetzen Sie die logarithmierte linke Seite $\log_{10}(y)$ durch Y .
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Y für den pH-Wertebereich 0 bis 14.

Sonnenaufgang* (A_284)

- b) An einem Wintertag wurde die Beleuchtungsstärke E in Lux am Morgen und zu Mittag gemessen. Die dekadischen Logarithmen (Logarithmen zur Basis 10) der beiden Messergebnisse sind nachstehend dargestellt:



Marco behauptet, die Beleuchtungsstärke E sei an diesem Tag zu Mittag 4-mal so hoch wie am Morgen gewesen.

- 1) Zeigen Sie, dass Marcos Behauptung falsch ist.

Pro Level

Durchhaengende Kette (A_214)

- c) Für eine Abstandsberechnung wurden ausgehend von der Gleichung $e^x + e^{-x} = 2,5$ folgende Umformungsschritte durchgeführt:

$$(1) \quad e^x + \frac{1}{e^x} = 2,5$$

$$(2) \quad e^{2 \cdot x} + 1 = 2,5 \cdot e^x$$

$$(3) \quad \ln(e^{2 \cdot x}) + \ln(1) = \ln(2,5 \cdot e^x)$$

$$(4) \quad 2 \cdot x + 0 = \ln(2,5) + x$$

$$(5) \quad x = \ln(2,5)$$

In der Umformung von Zeile 2 auf Zeile 3 wurde ein Fehler gemacht.

– Erklären Sie, worin der Fehler besteht.

Erdbeben (A_027)

Die Stärke von Erdbeben wird meist auf der Richterskala angegeben. Dabei wird der Ausschlag gemessen, den ein Erdbeben auf einem Seismographen (Messgerät) verursacht, und so die Magnitude M ermittelt.

- c) Für einen d Kilometer vom Epizentrum des Bebens entfernten Seismographen gilt:

$$M = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$$

M ... Magnitude

$A(d)$... Ausschlag des Bebens in Mikrometern (μm)

$A_0(d)$... Ausschlag (in μm) eines Bebens der Magnitude $M = 0$

- Geben Sie an, wie sich die Magnituden zweier Beben unterscheiden, wenn der Ausschlag des zweiten Bebens 10-mal so groß ist wie derjenige des ersten Bebens.
Erklären Sie Ihr Ergebnis mithilfe der logarithmischen Rechengesetze.

Fahrzeugtests (1) (B_045)

- c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit R mithilfe einer Funktion R folgender Form beschrieben werden kann:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$R(t)$... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind

t ... Benützungsdauer

T, b ... materialabhängige Parameter

Der Parameter T wird *charakteristische Lebensdauer* genannt.

- Weisen Sie nach, dass nach der charakteristischen Lebensdauer der Prozentsatz der intakten Bremsbeläge – unabhängig vom Wert des Parameters b – ca. 36,8 % beträgt.
– Ermitteln Sie die fehlerhafte Zeile in folgender Umformung der Formel $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$ nach der Benützungsdauer t .
– Formen Sie die fehlerhafte Zeile so um, dass diese mathematisch richtig ist.

$$1. \quad R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$$2. \quad \ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$$

$$3. \quad \frac{\ln(R)}{b} = -\frac{t}{T}$$

$$4. \quad t = -T \cdot \frac{\ln(R)}{b}$$

Richtfunk (B_375)

c) Der Antennengewinn-Faktor G ist ein Maß für die Verstärkung einer Antenne.

$$G = \frac{4 \cdot \pi}{\lambda^2} \cdot A \cdot \eta$$

η ... dimensionsloser Parameter

A ... Antennenfläche in m^2

λ ... Wellenlänge in m

G ... Antennengewinn-Faktor

– Geben Sie an, um welchen Faktor sich G verändert, wenn λ verdoppelt wird.

Für den Antennengewinn g in Dezibel (dB) gilt:

$$G = 10^{\frac{g}{10}}$$

– Zeigen Sie mithilfe der Logarithmusrechenregeln, dass eine Verdoppelung von G eine Erhöhung von g um rund 3 dB hervorruft.

Helligkeit (A_125)

a) Die nachstehende Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen der Leuchtdichte und der menschlichen Empfindungsstärke:

$$E(L) = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

L ... Leuchtdichte in cd/m^2

$E(L)$... Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L

L_0 ... minimale wahrnehmbare Leuchtdichte in cd/m^2

$c > 0$... Konstante

– Weisen Sie nach, dass die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 unabhängig von c ist.

Die Formel $E = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$ wird nach L_0 umgeformt.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der ein richtiges Ergebnis dieser Umformung ist.

[1 aus 5]

$L_0 = \frac{L \cdot 10^E}{10^c}$	<input type="checkbox"/>
$L_0 = \frac{L \cdot c}{10^E}$	<input type="checkbox"/>
$L_0 = \frac{10^L}{c \cdot 10^E}$	<input type="checkbox"/>
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	<input type="checkbox"/>
$L_0 = \frac{c \cdot 10^L}{10^E}$	<input type="checkbox"/>

Das perfekte Ei (A_073)

b) Der Ausdruck $\ln\left(\frac{2 \cdot (T_S - T_A)}{T_S - T_E}\right)$ kann in einen der folgenden Ausdrücke umgeformt werden.

– Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck an. [1 aus 5]

$\ln\left(\frac{2 \cdot T_A}{T_E}\right)$	<input type="checkbox"/>
$2 \cdot \ln\left(\frac{T_S - T_A}{T_S - T_E}\right)$	<input type="checkbox"/>
$\ln(2) + \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_A)} - \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_E)}$	<input type="checkbox"/>
$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_E)$	<input type="checkbox"/>
$\ln(2) + \ln(T_S) - \ln(T_A) - \ln(T_S) + \ln(T_E)$	<input type="checkbox"/>

All Star Level

Lichtwellenleiter* (B_379)

- c) Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen.

Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D , die in Dezibel angegeben wird:

$$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right) \text{ in Dezibel (dB)}$$

I_0 ... Anfangsintensität

I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

– Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht.

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ angegeben.

– Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

Ausstellungshalle* (B_116)

- d) Der Schallpegel in der Ausstellungshalle soll durch zusätzliche Absorptionsflächen vermindert werden. Dabei gilt:

$$L(A) = 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right)$$

A ... Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche in m^2

$L(A)$... Schallpegelminderung bei einer zusätzlichen Absorptionsfläche A in Dezibel (dB)

- 1) Berechnen Sie den Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche, die für eine Schallpegelminderung um 10 dB benötigt wird.

Gebäudetechnik* (B_260)

- b) Um das Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} einer Wand aus Ziegelmauer und Fenster in Dezibel (dB) zu berechnen, wird in der Gebäudetechnik die nachstehende Formel verwendet.

$$R_{\text{Ges}} = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{R_F}{10}} + f_Z \cdot 10^{-\frac{R_Z}{10}}\right)$$

f_F ... relativer Flächenanteil des Fensters an der gesamten Wandfläche

f_Z ... relativer Flächenanteil der Ziegelmauer an der gesamten Wandfläche

R_F, R_Z ... Schalldämmmaß des Fensters bzw. der Ziegelmauer in dB

R_{Ges} ... Gesamtschalldämmmaß der Wand in dB

Ein Bauunternehmen plant, aus einer 50 m^2 großen Wand eine Fensterfläche herauszubrechen. Dabei hat das Fenster ein Schalldämmmaß von $R_F = 43 \text{ dB}$, die Ziegelmauer ein Schalldämmmaß von $R_Z = 65 \text{ dB}$.

Es wird ein Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} von mindestens 55 dB für diese Wand gefordert.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F , den die Fensterfläche in dieser Wand maximal erreichen darf.
- 2) Berechnen Sie diese Fensterfläche in m^2 .

Lösungen

Rookie Level

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152) Lösung

d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1,02)$

Joghurt (A_138) Lösung

a) Die Masse der Bakterien wächst um 2,337 % pro Minute.

$$N(60) = 20 \cdot 1,02337^{60} = 79,9... \approx 80$$

$$80 \mu\text{g} = 0,000080 \text{ g} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ g}$$

Nach 1 h sind rund $8 \cdot 10^{-5}$ g vorhanden.

Bei $\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1,02337)$ wurden die logarithmischen Rechenregeln falsch angewendet.

Die linke Seite der Gleichung muss lauten: $\log\left(\frac{a}{20}\right)$ bzw. $\log(a) - \log(20)$

Sternbild Grosser Wagen (1) * (B_014) Lösung

c)

$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	<input checked="" type="checkbox"/>

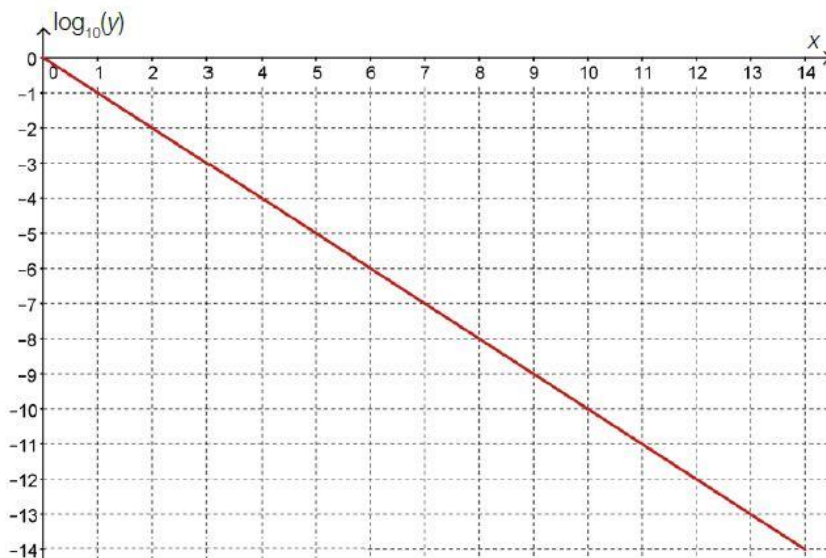
Strauchwachstum (A_094) Lösung

b) richtige Gleichung:

$$\lg(h_1(t)) = \lg(0,08) + 0,03 \cdot t \cdot \lg(e)$$

pH-Wert (A_272) Lösung

a) $Y = -x$



Sonnenaufgang* (A_284) Lösung

- b1) Mit den konkreten Zahlen folgt: $E_{\text{Morgen}} = 10 \text{ Lux}$, $E_{\text{Mittag}} = 10000 \text{ Lux}$
Daher war die Beleuchtungsstärke zu Mittag nicht 4-mal so hoch wie am Morgen.

Auch ein allgemeiner Nachweis ist als richtig zu werten.

Pro Level

Durchhaengende Kette (A_214) Lösung

- c) Es wurde nicht die Summe logarithmiert, sondern die Summanden.
Richtig müsste es heißen: $\ln(e^{2 \cdot x} + 1) = \ln(2,5 \cdot e^x)$.

Erdbeben (A_027) Lösung

c) Ausschlag des ersten Bebens ... $A(d) \Rightarrow M_1 = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$

Ausschlag des zweiten Bebens ... $10 \cdot A(d) \Rightarrow M_2 = \lg\left(\frac{10 \cdot A(d)}{A_0(d)}\right)$

$$M_2 = \lg\left(\frac{10 \cdot A(d)}{A_0(d)}\right) = \lg\left(10 \cdot \frac{A(d)}{A_0(d)}\right) = \lg(10) + \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right) = 1 + M_1$$

Ist der Ausschlag 10-mal so stark, dann ist die Magnitude um 1 größer.

Fahrzeugtests (1) (B_045) Lösung

c) $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$$R(T) = e^{-1}$$

$$R(T) = e^{-1} = 0,3678... \approx 36,8 \%$$

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \Rightarrow \ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$$

Der Ausdruck $b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$ ist falsch (2. Zeile).

(Begründung: Die Potenz wurde falsch interpretiert bzw. das Logarithmusgesetz falsch angewendet.)

korrekte Umformung:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$$\ln(R) = \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$$

$$\ln(R) = -\left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$-\ln(R) = \left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$\sqrt[b]{-\ln(R)} = \frac{t}{T}$$

$$t = T \cdot \sqrt[b]{-\ln(R)}$$

Richtfunk (B_375) Lösung

- c) Wenn die Wellenlänge λ verdoppelt wird, beträgt G nur noch ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

$$G = 10^{\frac{g}{10}}$$

$$\lg(G) = \frac{g}{10}$$

$$10 \cdot \lg(G) = g$$

Für eine Verdoppelung von G gilt:

$$g_{\text{neu}} = 10 \cdot \lg(2 \cdot G) = \underbrace{10 \cdot \lg(2)}_{= 3,010...} + \underbrace{10 \cdot \lg(G)}_{= g} \approx 3 + g$$

Helligkeit (A_125) Lösung

a) $E(L_0) = c \cdot \lg\left(\frac{L_0}{L_0}\right) = c \cdot \lg(1) = c \cdot 0 = 0$

Die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 hat den Wert 0 und ist daher unabhängig von c .

[...]	
[...]	
[...]	
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	<input checked="" type="checkbox"/>
[...]	

Das perfekte Ei (A_073) Lösung

b)

$\ln(2) + \ln(T_s - T_\lambda) - \ln(T_s - T_E)$	<input checked="" type="checkbox"/>

All Star Level

Lichtwellenleiter * (B_379) Lösung

$$c) D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{0,955 \cdot I_0}\right) = 0,19\dots$$

Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.

$$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

$$I = I_0 \cdot 10^{-2}$$

Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.

$$D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$D_1 = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$$

Durch Herausheben von -1 erhält man:

$$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I))$$

$$D_1 = -10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

$$\Rightarrow D_1 = -D$$

Ausstellungshalle * (B_116) Lösung

$$d1) L(A) = 10 \quad \text{oder} \quad 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right) = 10$$

$$A = 90$$

Es wird eine zusätzliche Absorptionsfläche von 90 m² benötigt.

Gebäudetechnik * (B_260) Lösung

$$b1) 55 = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{43}{10}} + (1 - f_F) \cdot 10^{-\frac{66}{10}}\right)$$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$f_F = 0,0571\dots$$

$$\text{maximale Fensterfläche: } 0,0571\dots \cdot 50 = 2,857\dots$$

Die maximale Fensterfläche, die das geforderte minimale Gesamtschalldämmmaß erfüllt, beträgt rund 2,86 m².