Integralmittelwerte

Rookie Level

Datenuebertragung (B_266)

c) Die Downloadgeschwindigkeit (in MBit/s) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) kann im Zeitintervall [0; 60] näherungsweise durch eine Funktion d_L beschrieben werden.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Auf dem Laufband (2) * (B_458)

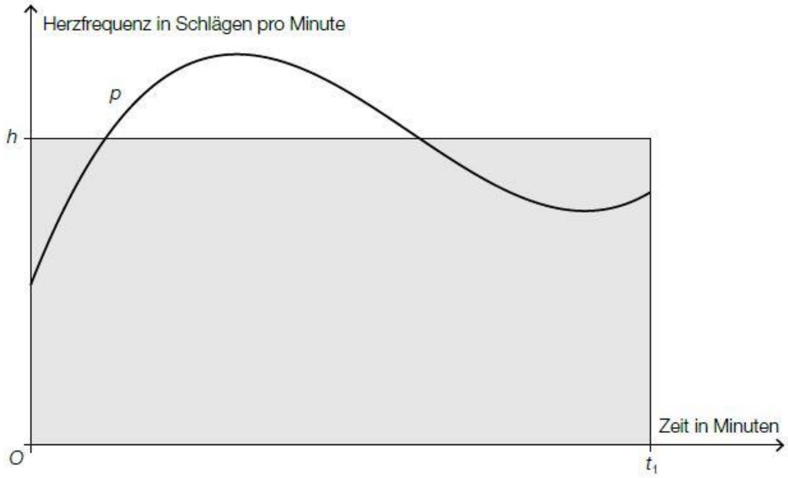
c) Der im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellte Verlauf kann im Zeitintervall [0 min; 25 min] durch die Funktion v beschrieben werden.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die entsprechende Einheit an.
$\frac{1}{25} \cdot \int_0^{25} v(t)\,dt$

Wings for Life World Run * (B_022)

b) Der zeitliche Verlauf der Herzfrequenz einer Läuferin kann näherungsweise durch eine Funktion p beschrieben werden.

Der Graph von p ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Flächeninhalt des grau markierten Rechtecks entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Funktionsgraphen von p im Intervall $[0; t_1]$.



– Interpretieren Sie die Bedeutung von h im gegebenen Sachzusammenhang.
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung von h, wenn die Funktion p bekannt ist.

h = ____

Pro Level

Elektrische Bauteile * (B_432)

c) Der zeitliche Verlauf der Spannung an einem Kondensator kann nach dem Einschalten des Stroms durch die Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = 40 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}24}}\right)$

t … Zeit nach dem Einschalten des Stroms in s
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t in Volt (V)

– Erklären Sie, ausgehend von der Funktionsgleichung für u, warum die Spannung des Kondensators für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 40 V geht.

Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ steigt die Spannung am Kondensator von $u(t_1) = 5$ V auf $u(t_2) = 30$ V.

– Berechnen Sie den linearen Mittelwert der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$.

Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der 1. Ableitung von u vorgelegt:
$\frac{du(t)}{dt} = -40 \cdot e^{-\frac{t}{0{,}24}}$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier missachtet wurde.

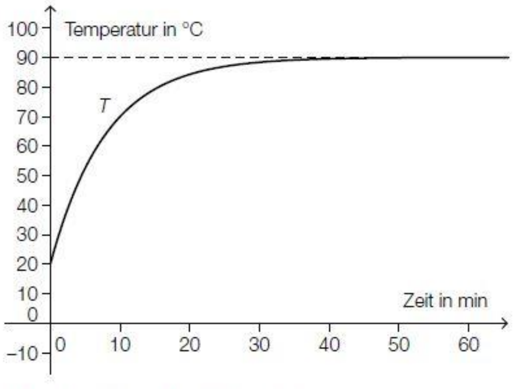
Kalt - warm (1) * (B_394)

a) In der unten stehenden Grafik ist ein Erwärmungsvorgang dargestellt, der durch die Funktion T beschrieben wird:

$T(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{8}}) + 20$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a ... Konstante

Der Graph dieser Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Konstante a.
– Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.
$\frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(t)\,dt = 60\ °C$

Blut (B_372)

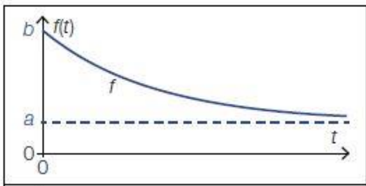
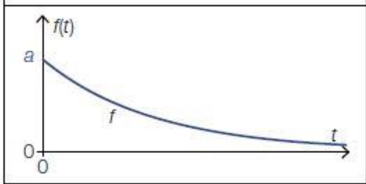
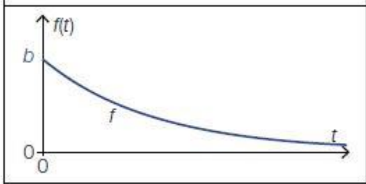
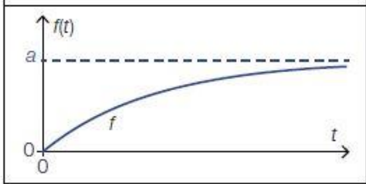
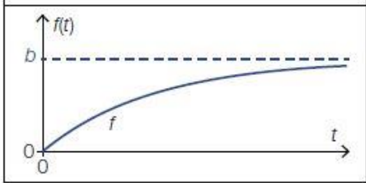
b) Bei der Verabreichung eines Medikaments lässt sich die Menge des Wirkstoffs im Blut näherungsweise durch die Funktion f beschreiben:

$f(t) = a - a \cdot e^{-b \cdot t}$

t … Zeit seit Beginn der Verabreichung des Medikaments in min
$f(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
$a > 0$, $b > 0$ … Konstanten

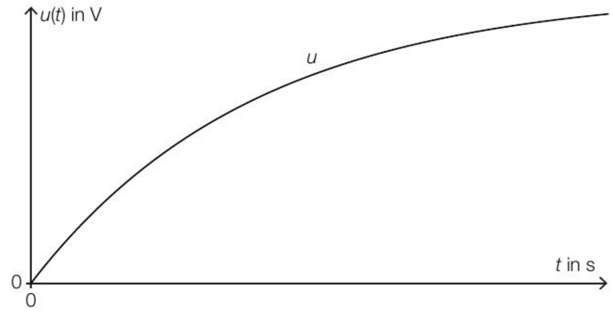
– Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang:
$\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} f(t)\,dt$

– Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, in der der Graph der Funktion f richtig dargestellt ist. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

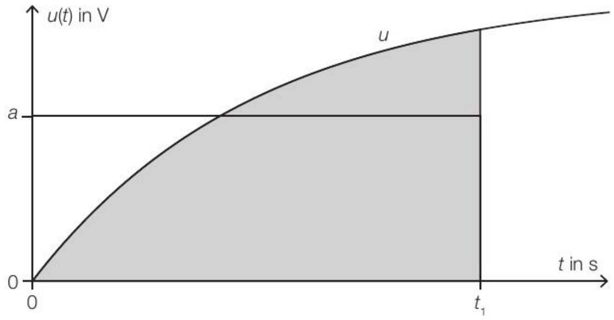
Kondensator * (B_496)

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Aufladevorgang dargestellt.



1) Markieren Sie diejenige Stelle, an der die 1. Ableitung von u im dargestellten Bereich den maximalen Wert annimmt.

Der Inhalt der grau markierten Fläche und der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen t_1 und a sind gleich groß (siehe nachstehende Abbildung).



2) Beschreiben Sie die Bedeutung von a im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Erstellen Sie mithilfe der Funktion u eine Formel zur Berechnung von a.

a = ____

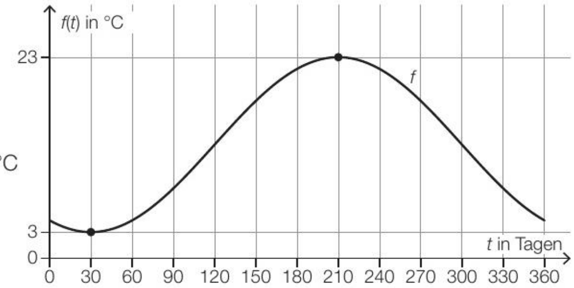
All Star Level

Attersee * (B_524)

a) Der zeitliche Verlauf der Temperatur des Attersees kann modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$$f(t) = a \cdot \sin\left(b \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + c \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 360$$

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a, b, c ... Parameter



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter b.

2) Ordnen Sie den beiden Größen jeweils den zutreffenden Zahlenwert aus A bis D zu.

Amplitude von f	
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	

A	10
B	12
C	13
D	23

Zur Zeit $t = 120$ betrug die tatsächlich gemessene Temperatur 12 °C.

3) Geben Sie den Betrag des absoluten Fehlers an, der entsteht, wenn man statt der tatsächlich gemessenen Temperatur den Funktionswert an der Stelle $t = 120$ verwendet.

Zur Überprüfung der Qualität der Modellfunktion f werden 1 000 Messwerte y_i der Temperatur zu verschiedenen Zeiten t_i erhoben.

Für jeden dieser Messpunkte $(t_i \mid y_i)$ wird die Differenz des Messwerts y_i zum Funktionswert $f(t_i)$ ermittelt. Diese Differenzen werden jeweils quadriert und danach aufsummiert. Die so erhaltene Summe wird mit s bezeichnet.

4) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung von s.

$$s = \sum_{i=1}^{1000} \boxed{}$$

Lösungen

Rookie Level

Datenuebertragung (B_266) Lösung

c) Mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ wird die mittlere Downloadgeschwindigkeit im Zeitintervall [0; 60] berechnet.

Auf dem Laufband (2) * (B_458) Lösung

c1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit für die Trainingseinheit in m/min berechnet.

Wings for Life World Run * (B_022) Lösung

b) Die Seitenlänge h des Rechtecks stellt die mittlere Herzfrequenz im Zeitintervall $[0; t_1]$ dar.

$$h = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} p(t)\,dt$$

Elektrische Bauteile * (B_432) Lösung

c) Da der Ausdruck $e^{-\frac{t}{0{,}24}}$ für steigende Werte von t gegen null geht, nähert sich der Klammerausdruck dem Wert 1. Daher nähert sich der Funktionswert asymptotisch dem Wert 40 V.

Durch Lösen der Gleichung $u(t_1) = 5$ bzw. $u(t_2) = 30$ erhält man die Integrationsgrenze $t_1 = 0{,}0320...$ bzw. $t_2 = 0{,}3327...$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t = 20{,}04...$$

Der lineare Mittelwert der Spannung in diesem Zeitintervall beträgt rund 20,0 V.

Die Kettenregel wurde missachtet.

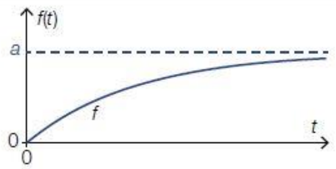
Kalt - warm (1) * (B_394) Lösung

a) $a = 70$

Im Intervall $[0; b]$ beträgt die mittlere Temperatur 60 °C.

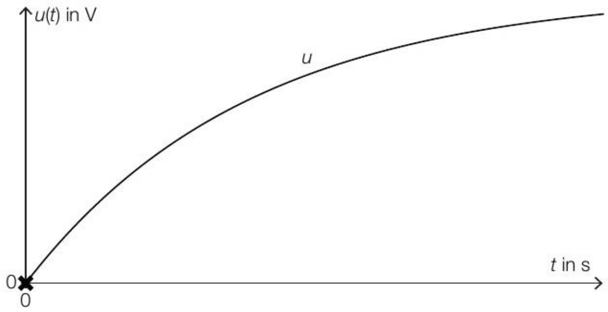
Blut (B_372) Lösung

b) Mit dem Ausdruck wird die durchschnittliche Wirkstoffmenge im Blut in der ersten halben Stunde nach Beginn der Verabreichung berechnet.

[...]	
[...]	
[...]	
	⊠
[...]	

Kondensator * (B_496) Lösung

d1)



d2) a ist die mittlere Kondensatorspannung im Zeitintervall $[0; t_1]$.

d3) $a = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$

All Star Level

Attersee * (B_524) Lösung

a1) $\frac{T}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2 \cdot \pi}{360} = \frac{\pi}{180}$

a2)

Amplitude von *f*	A
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von *f* im Intervall [30; 210]	C

A	10
B	12
C	13
D	23

a3) $|f(120) - 12| = 13 - 12 = 1$

Der Betrag des absoluten Fehlers beträgt 1 °C.

a4) $s = \sum_{i=1}^{1000} (y_i - f(t_i))^2 \quad \textit{oder} \quad \sum_{i=1}^{1000} (f(t_i) - y_i)^2$