Aufgabe 5

Schießstand

Ein Sportschütze schießt innerhalb einer Minute 20-mal auf eine Scheibe. Dabei trifft er bei den ersten 17 Schüssen 4-mal den innersten Ring der Zielscheibe.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie aufgrund dieser Daten einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Annahme, dass sich die Voraussetzungen nicht ändern, der Sportschütze beim 18. Schuss wieder den innersten Ring der Zielscheibe trifft! Erklären Sie den von Ihnen gewählten Lösungsansatz!

Leitfrage:

Nehmen Sie an, dass der von Ihnen berechnete Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, den innersten Ring der Zielscheibe zu treffen, auch für die nächste Serie von 20 Schüssen gilt.

Lösen Sie die folgende Aufgabe unter Verwendung der Binominalverteilung und begründen Sie, warum die Verwendung dieser Verteilung in diesem Fall gerechtfertigt ist!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportschütze in der nächsten Serie insgesamt nicht öfter als 2-mal den innersten Ring der Zielscheibe trifft!

Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Auf vier Seitenflächen eines „fairen" sechsseitigen Würfels ist die Zahl 1 abgebildet, auf zwei Seitenflächen die Zahl 2. Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.

Bei einem Zufallsversuch wird der Würfel zweimal geworfen. Als Ergebnis jedes einzelnen Wurfes gilt diejenige Zahl, die auf der nach oben zeigenden Seitenfläche abgebildet ist.
Die Zufallsvariable X beschreibt das Produkt der bei den beiden Würfen eintretenden Ergebnisse, also das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche Werte die Zufallsvariable X annehmen kann, und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Der beschriebene, aus jeweils zwei Würfen bestehende Zufallsversuch wird fünfmal ausgeführt. Die Zufallsvariable Y beschreibt, wie oft dabei das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen den Wert 1 ergibt.
Erläutern Sie, warum Y als binomialverteilte Zufallsvariable angenommen werden kann, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 2)$!

Aufgabe 5

Blutgruppe B

Die relative Häufigkeit der Blutgruppe B in der österreichischen Bevölkerung wird mit p bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Zehn Österreicher/innen werden zufällig ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable H gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in dieser Zufallsstichprobe ($n = 10$) an.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, dass von diesen zehn Personen höchstens eine Person Blutgruppe B hat, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in einer Zufallsstichprobe der Größe $n = 500$ an.

Erklären Sie, was mit den nachstehenden Termen jeweils berechnet wird, und geben Sie an, welcher der beiden Terme den größeren Wert liefert!

- $P\left(500 \cdot p - 2 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1-p)} \leq X \leq 500 \cdot p + 2 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1-p)}\right)$
- $P(X \leq 500 \cdot p)$

Aufgabe 5

Diskrete Zufallsvariable

Für eine diskrete Zufallsvariable X liegt eine Tabelle vor, die alle möglichen Werte k dieser Zufallsvariable und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten angibt. Der Parameter n ist eine natürliche Zahl mit $n \neq 0$.

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,2	$\frac{2}{n}$	$\frac{6}{n}$	0,1	0,3

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Parameter n und den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

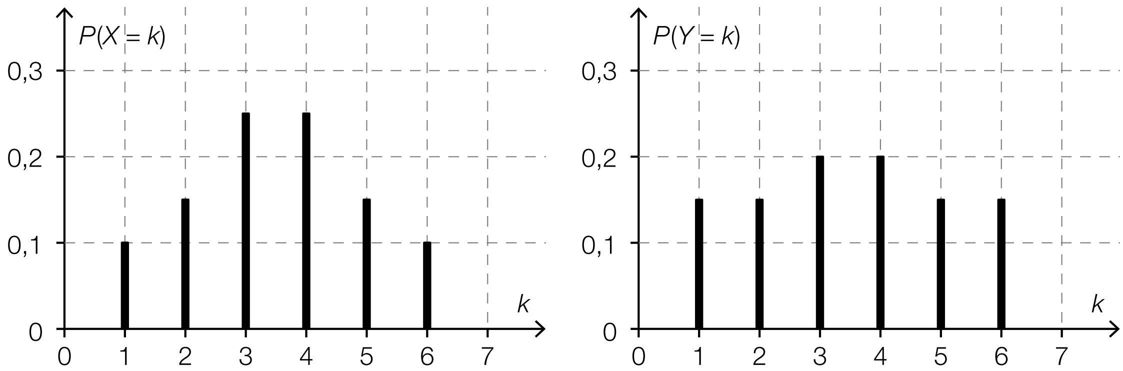
Die Standardabweichung σ hat bei der oben angegebenen Zufallsvariable den Wert $\sigma = 5{,}2$.

Verändern Sie die in der Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für mindestens zwei Werte von k so, dass die Standardabweichung kleiner wird und dabei immer noch eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt! Die Werte der Zufallsvariablen (in der ersten Zeile der Tabelle) sollen aber unverändert bleiben.
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 4

Verteilungen

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Verteilungen zweier Zufallsvariablen *X* und *Y*.



Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen *X* und *Y* werden mit $E(X)$ bzw. $E(Y)$ bezeichnet.
Die Standardabweichungen der Zufallsvariablen *X* und *Y* werden mit $\sigma(X)$ bzw. $\sigma(Y)$ bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie anhand der obigen Abbildungen an, ob $E(Y)$ kleiner, größer oder gleich $E(X)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie weiters anhand der obigen Abbildungen an, ob $\sigma(Y)$ kleiner, größer oder gleich $\sigma(X)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 5

Erwartungswert

Die nachstehende Tabelle zeigt alle möglichen Auszahlungsbeträge und die entsprechenden Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Glücksspiel, wobei eine Gewinnwahrscheinlichkeit nicht angegeben ist.

Auszahlungsbetrag in €	0	5	10	100
Gewinnwahrscheinlichkeit	0,68	0,2	0,1	p

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p für den Gewinn von € 100 an und ermitteln Sie den Erwartungswert des Auszahlungsbetrags!

Leitfrage:

Um am Glücksspiel teilnehmen zu dürfen, ist ein Einsatz von € 5 zu leisten.
Geben Sie an, ob das Glücksspiel im Mittel den Anbieter oder die Spieler „bevorzugt“, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Ändern Sie einen Auszahlungsbetrag so ab, dass (unter Beibehaltung der Gewinnwahrscheinlichkeiten und des Einsatzes) das Glücksspiel weder den Anbieter noch die Spieler „bevorzugt“, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 5

Therapieverfahren

Ein medizinisches Therapieverfahren ist im Durchschnitt in vier von fünf Fällen erfolgreich.
Zehn Patienten werden mit diesem Verfahren unabhängig voneinander behandelt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie unter Verwendung der Binomialverteilung einen Term zur Berechnung derjenigen Wahrscheinlichkeit an, dass bei mindestens acht Patienten die Therapie erfolgreich ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Mit den nachstehenden Termen können Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen im gegebenen Kontext berechnet werden:

- $0{,}2^{10}$
- $\binom{10}{2} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2$
- $1 - [0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}]$

Formulieren Sie für jeden dieser Terme ein entsprechendes Ereignis!

Aufgabe 5

Kugelschreiber

In einer Schachtel befinden sich acht verschiedene Kugelschreiber.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{8}{3}$ und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Eine Maschine produziert Kugelschreiber. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig der Produktion entnommener Kugelschreiber defekt ist, liegt bei 1 %.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in einer Stichprobe von 100 Kugelschreibern mindestens zwei defekte Kugelschreiber vorhanden sind!

Bei einer Qualitätskontrolle werden fünf Stichproben mit jeweils 100 neu produzierten Kugelschreibern gezogen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in mindestens einer dieser fünf Stichproben mindestens zwei defekte Kugelschreiber vorhanden sind!

Aufgabe 5

Lotterie

Bei 100 Losen gibt es 30 Gewinnlose („Treffer“), darunter sind 25 Lose zu je € 10 Gewinn und fünf Lose zu je € 100 Gewinn.

Aufgabenstellung:

Aus diesen 100 Losen werden drei Lose zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit diesen drei Losen kein Treffer erzielt wird, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Jemand bekommt aus diesen 100 Losen ein zufällig ausgewähltes Los geschenkt.
Geben Sie den Erwartungswert für den Gewinn an!

Eine andere Person bekommt aus diesen 100 Losen zwei zufällig ausgewählte Lose geschenkt.
Geben Sie einen Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass diese Person € 110 Gewinn erzielt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 5

Rabattwürfeln

Ein Geschäft veranstaltet ein Gewinnspiel. Ziel dieses Gewinnspiels ist es, mit einem „fairen“ Würfel eine möglichst hohe Zahl zu würfeln. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)
Würfelt man eine Zahl von 1 bis 5, so entspricht diese gewürfelte Zahl dem Rabatt in Prozent. Würfelt man beim ersten Mal einen Sechser, darf man ein zweites Mal würfeln, und die Summe der beiden gewürfelten Zahlen ergibt den Rabatt in Prozent.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Kunde 10 % Rabatt erhält!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X beschreibt den Rabatt in Prozent, den ein Kunde erhalten kann.

Geben Sie alle möglichen Werte samt den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten an, die die Zufallsvariable X annehmen kann!

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariable X und deuten Sie den ermittelten Wert im gegebenen Kontext!

Aufgabe 5

Augensumme

Zwei „faire“ Spielwürfel, deren Seitenflächen mit den Augenzahlen 1 bis 6 beschriftet sind, werden geworfen. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die Augensumme.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Augensummen auftreten können und welche Augensumme mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auftritt!

Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit!

Leitfrage:

Ziel eines Spiels ist es, mit beiden Würfeln dieselbe Augenzahl zu würfeln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ziel bei 100 Würfen mehr als zehnmal erreicht wird!

Aufgabe 5

Medikament

Laut Angaben eines Pharmaunternehmens treten bei einem bestimmten Medikament bei 2 % der Personen, die dieses Medikament einnehmen, leichte Nebenwirkungen auf.

Das Medikament wird von 50 Personen eingenommen.

Im Folgenden soll vereinfacht angenommen werden, dass die Anzahl der Personen, bei denen leichte Nebenwirkungen auftreten, binomialverteilt ist.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie, bei wie vielen Personen leichte Nebenwirkungen zu erwarten sind!

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen leichte Nebenwirkungen auftreten!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die Mindestanzahl n ($n \in \mathbb{N}$) derjenigen Personen, die das Medikament einnehmen müssen, damit leichte Nebenwirkungen bei mindestens einer Person mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % auftreten! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!