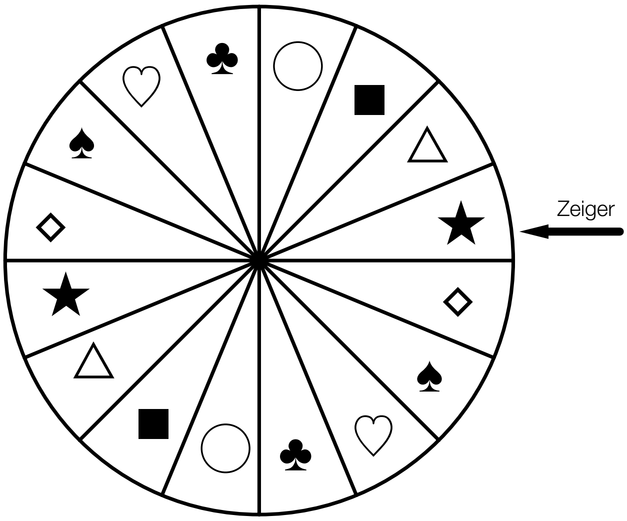
Aufgabe 5

Glücksrad

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Glücksrad mit 16 gleich großen Sektoren. Wenn das Glücksrad zum Stillstand gekommen ist und der Zeiger auf ein Sternsymbol zeigt (siehe nachstehende Abbildung), hat man gewonnen.
Das Glücksrad wird bei einem Glücksspiel genau dreimal gedreht.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten und erklären Sie den von Ihnen verwendeten rechnerischen Ansatz!

- Bei dreimaligem Drehen gewinnt man genau dreimal.
- Bei dreimaligem Drehen gewinnt man genau zweimal.

Leitfrage:

Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Drehen des Glücksrades immer zu gewinnen, wenn anstatt des abgebildeten Glücksrades Glücksräder mit folgenden Veränderungen verwendet werden?

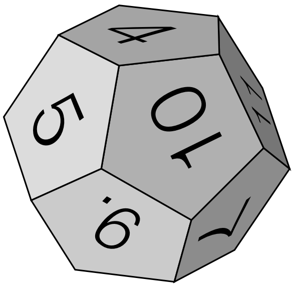
- Glücksrad *A*: 12 zusätzliche Sektoren mit einem zusätzlichen Sternsymbol; alle Sektoren des Glücksrades sind gleich groß.
- Glücksrad *B*: 16 Sektoren; die Größe der Sektoren mit dem Sternsymbol ist unverändert so wie in obiger Abbildung, die restlichen Sektoren sind unterschiedlich groß.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 5

Dodekaeder

Ein Dodekaeder ist ein Körper mit 12 Flächen. Ein regelmäßiger Dodekaeder, dessen Flächen gleich groß sind und der mit den Zahlen von 1 bis 12 beschriftet ist, wird für Zufallsexperimente verwendet. Die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, ist dabei für alle Seitenflächen gleich groß.



Aufgabenstellung:

Jemand wirft diesen Dodekaeder einmal und möchte eine Zahl würfeln, die durch 3 teilbar ist. Geben Sie den Grundraum G und die entsprechende Ereignismenge E dieses Zufallsexperiments an!

G = ____

E = ____

Leitfrage:

Bei einem Spiel wird der Dodekaeder zweimal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt, wenn die Summe der geworfenen Zahlen 6 ergibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 2

Sportaktivitäten

In einem Betrieb gibt es a Personen, die Sport betreiben, und b Personen, die das nicht tun. Die Anzahl der Frauen im Betrieb ist c. Von allen Personen im Betrieb, die Sport betreiben, sind d männlich.

Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch entsprechende Terme mithilfe der gegebenen Variablen!

	Personen, die Sport betreiben	Personen, die keinen Sport betreiben
Männer	d	
Frauen		

Leitfrage:

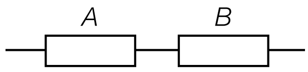
Drei Personen des Betriebes werden zufällig ausgewählt. Stellen Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit auf, dass diese drei Personen keinen Sport betreiben, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 5

Schaltungen

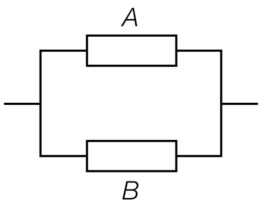
In dieser Aufgabe angegebene Schaltungen bestehen aus Bauteilen vom Typ A und/oder Typ B. Ein Bauteil vom Typ A hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit a und ein Bauteil vom Typ B hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit b, wobei man davon ausgehen kann, dass alle Bauteile unabhängig voneinander funktionieren.

Eine Serienschaltung zweier Bauteile (wie nachstehend abgebildet) funktioniert, wenn <u>beide Bauteile</u> funktionieren.



(Abb. 1)

Eine Parallelschaltung zweier Bauteile (wie nachstehend abgebildet) funktioniert, wenn <u>mindestens einer der beiden Bauteile</u> funktioniert.



(Abb. 2)

Aufgabenstellung:

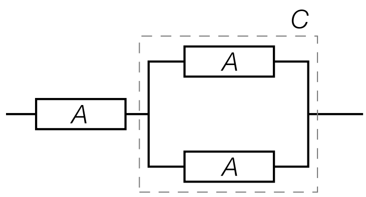
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Serienschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ B (siehe Abb. 1) funktioniert!

Geben Sie weiters einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Parallelschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ B (siehe Abb. 2) funktioniert!

Leitfrage:

Durch eine Parallelschaltung zweier Bauteile vom Typ A entsteht ein Bauteil vom Typ C.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Serienschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ C (siehe Abb. 3) funktioniert, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!



(Abb. 3)

Für den Bauteil vom Typ C gibt Lena folgenden Term an: $a \cdot (1 - a) + (1 - a) \cdot a + a^2$
Geben Sie an, welche Wahrscheinlichkeit durch diesen Term beschrieben wird!

Aufgabe 5

Würfel

Die Seitenflächen eines „fairen“ sechsflächigen Würfels sind mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 beschriftet.
(Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

Bei einem Zufallsversuch wird dieser Würfel einmal geworfen.

Geben Sie den Grundraum A dieses Zufallsversuchs an und bestimmen Sie die Ereignismenge B für den Fall, eine Primzahl zu würfeln, und erklären Sie die beiden Begriffe „Grundraum” und „Ereignis“!

A = ____

B = ____

Geben Sie weiters die Wahrscheinlichkeit an, bei einmaligem Würfeln die Zahl 7 zu erhalten, und erklären Sie, welches besondere Ereignis in diesem Fall vorliegt!

Leitfrage:

Der Würfel wird n-mal geworfen.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P an, bei diesem Zufallsversuch mindestens einmal eine gerade Zahl zu würfeln!

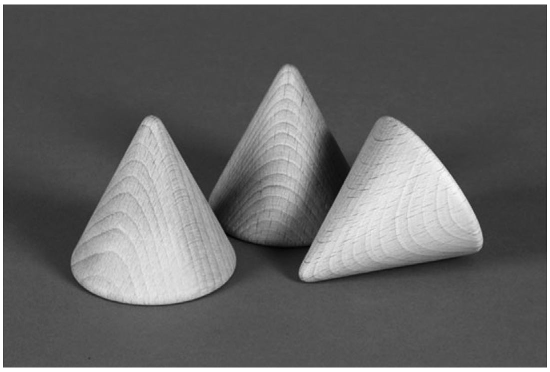
P = ____

Berechnen Sie weiters, wie oft ein Würfel geworfen werden muss, damit diese Wahrscheinlichkeit P mindestens 99 % beträgt!

Aufgabe 5

Kegel

Ein Kegel, der geworfen wird, kann entweder auf der Mantelfläche oder auf der Grundfläche zu liegen kommen.



Bildquelle: http://www.holzbausteine.at/images/Spitzkegel60.jpg [28.04.2016].

Aufgabenstellung:

Das Werfen eines derartigen Kegels wird als Zufallsexperiment betrachtet. Der Kegel wird zuerst 50-mal geworfen. Dabei kommt er in 12 Fällen auf der Grundfläche zu liegen.

Felix gibt folgende Rechnung an:

$$\left(\frac{12}{50}\right)^2 = \frac{144}{2\,500} = 0{,}0576 = 5{,}76\ \%$$

Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Zusammenhang!

Leitfrage:

Selin behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kegel auf der Grundfläche zu liegen kommt, eigentlich gar nicht bekannt ist.

Geben Sie an, welches Argument sie zur Untermauerung ihrer Behauptung heranziehen kann und wie man das Zufallsexperiment verändern muss, um diese Wahrscheinlichkeit möglichst genau zu bestimmen!

Aufgabe 5

Kugeln

In einer Urne befinden sich zehn schwarze und fünf weiße Kugeln.

Aufgabenstellung:

David entnimmt zuerst eine schwarze Kugel aus der Urne. Dann entnimmt er nach dem Zufallsprinzip eine weitere Kugel, ohne die erste Kugel zurückzulegen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_1, dass auch die zweite entnommene Kugel schwarz ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leo entnimmt (wieder aus allen 15 Kugeln) nach dem Zufallsprinzip hintereinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_2, dass die zweite entnommene Kugel schwarz ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Für ein Zufallsexperiment wird zusätzlich zu der in der Einleitung erwähnten Urne eine zweite Urne verwendet, die zehn weiße und fünf schwarze Kugeln enthält.

David muss nach dem Zufallsprinzip eine der beiden Urnen auswählen und dann nach dem Zufallsprinzip aus der ausgewählten Urne zwei Kugeln entnehmen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_3, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind!

Leo führt das gleiche Zufallsexperiment durch, darf aber die Kugeln anders auf die beiden Urnen verteilen, um die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze Kugeln (hintereinander und ohne Zurücklegen) zu entnehmen, zu erhöhen.
Er gibt dazu alle schwarzen Kugeln in die erste Urne und alle weißen Kugeln in die zweite Urne.

Überprüfen Sie rechnerisch, ob Leo dadurch bessere Chancen als David hat, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen!

Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Bei einem Multiple-Choice-Test mit zehn Aufgaben gibt es jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen immer genau eine Antwort richtig ist.

Patrick muss raten und kreuzt bei jeder Aufgabe willkürlich eine der Antwortmöglichkeiten an.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie jeden Summanden des Ausdrucks $1 - (0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45 + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10})$ im gegebenen Kontext und geben Sie dasjenige Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit diesem Ausdruck berechnet wird!

Leitfrage:

Zum Bestehen des Tests muss mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig gelöst werden.

Yvonne löst vier Aufgaben richtig, bei den restlichen Aufgaben muss sie raten und kreuzt jeweils willkürlich eine Antwortmöglichkeit an.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass Yvonne den Test besteht, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 5

Qualitätskontrolle

Ein Produkt wird einer Qualitätskontrolle unterzogen, die aus zwei Prüfverfahren besteht. Das Produkt wird zuerst einem Prüfverfahren unterzogen, bei dem ein Mangel erfahrungsgemäß in n_1 von 100 Fällen ($n_1 \in \mathbb{N}$) erkannt wird. Produkte, die das erste Prüfverfahren bestanden haben, werden einem zweiten Prüfverfahren unterzogen, bei dem ein Mangel erfahrungsgemäß in n_2 von 100 Fällen ($n_2 \in \mathbb{N}$) erkannt wird. Die beiden Prüfverfahren sind voneinander unabhängig.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein mangelhaftes Produkt bei dieser Qualitätskontrolle als solches erkannt wird, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Beim ersten Prüfverfahren werden erfahrungsgemäß 95 % der mangelhaften Produkte erkannt. Berechnen Sie, wie groß n_2 sein muss, damit ein mangelhaftes Produkt bei der Qualitätskontrolle mit 99,9%iger Wahrscheinlichkeit als solches erkannt wird!

Aufgabe 5

Zielscheibe

Bei einem Wettkampf schießen drei Schützen *A*, *B* und *C* von einer Mannschaft auf eine Zielscheibe.

Der Schütze *A* trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, der Schütze *B* mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % und der Schütze *C* mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % in das Zentrum der Zielscheibe.

Aufgabenstellung:

Jeder der drei Schützen schießt genau einmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schütze in das Zentrum der Zielscheibe trifft, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Aufgrund der geringen Treffsicherheit des Schützen *C* beschließt der Trainer der Mannschaft, den Schützen *C* durch den Schützen *D* zu ersetzen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der drei Schützen *A*, *B* und *D* (bei einmaligem Schießen jedes Schützen) in das Zentrum der Zielscheibe trifft, liegt bei 20,4 %.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze *D* in das Zentrum der Zielscheibe trifft!

Aufgabe 5

Würfeln

Die Seitenflächen von zwei „fairen" sechsflächigen Würfeln sind unterschiedlich beschriftet.
(Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Beim ersten Würfel sind zwei Flächen mit der Zahl 0 und vier Flächen mit der Zahl 4 beschriftet, beim zweiten Würfel sind drei Flächen mit der Zahl 1 und drei Flächen mit der Zahl 5 beschriftet.

Aufgabenstellung:

Bei einem Zufallsexperiment werden beide Würfel gleichzeitig geworfen.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden gewürfelten Zahlen „5" ergibt!

Leitfrage:

Spieler *A* darf einen der beiden Würfel auswählen, Spieler *B* muss den anderen Würfel nehmen.
Derjenige Spieler, der die höhere Zahl würfelt, gewinnt.
Geben Sie an, welchen Würfel Spieler *A* wählen sollte, um die größeren Gewinnchancen zu haben, und begründen Sie Ihre Entscheidung durch Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit für jeden Würfel!

Aufgabe 5

Hausübung

Eine Mathematik-Hausübung bestand aus x Aufgaben (mit $x \in \mathbb{N}$ und $x \leq 15$). Die Mathematiklehrerin wählt aus den 15 Schülern ihrer Klasse x Schüler aus, wobei jeder Schüler jeweils eine andere Aufgabe der Hausübung erklären soll. Wenn es auf die Reihenfolge der Auswahl nicht ankommt, ist die Anzahl der Möglichkeiten, diese Auswahl zu treffen, 6435.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der eine mögliche Anzahl x der Hausübungsaufgaben berechnet werden kann!

Leitfrage:

Bei der Hausübung ist Leo bei der Berechnung von Binomialkoeffizienten Folgendes aufgefallen:

$$\begin{array}{ll}
\binom{9}{1} = 9 & \\
 & \cdot 8 \\
 & : 2 \\
\binom{9}{2} = 36 & \\
 & \cdot 7 \\
 & : 3 \\
\binom{9}{3} = 84 & \\
 & \cdot 6 \\
 & : 4 \\
\binom{9}{4} = 126 \text{ usw.} &
\end{array}$$

Leo beschreibt den Zusammenhang allgemein für $\binom{n}{k}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k < n$ folgendermaßen:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot c$$

Geben Sie den Faktor c in Abhängigkeit von k und n an!