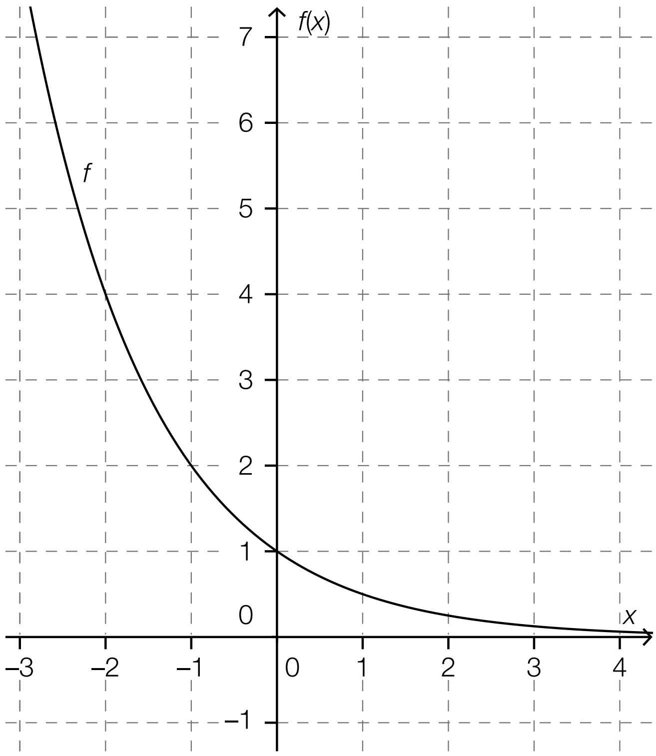
Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Parameter a und begründen Sie, warum Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ jedenfalls den Punkt $P = (0|1)$ enthalten!

a = ____

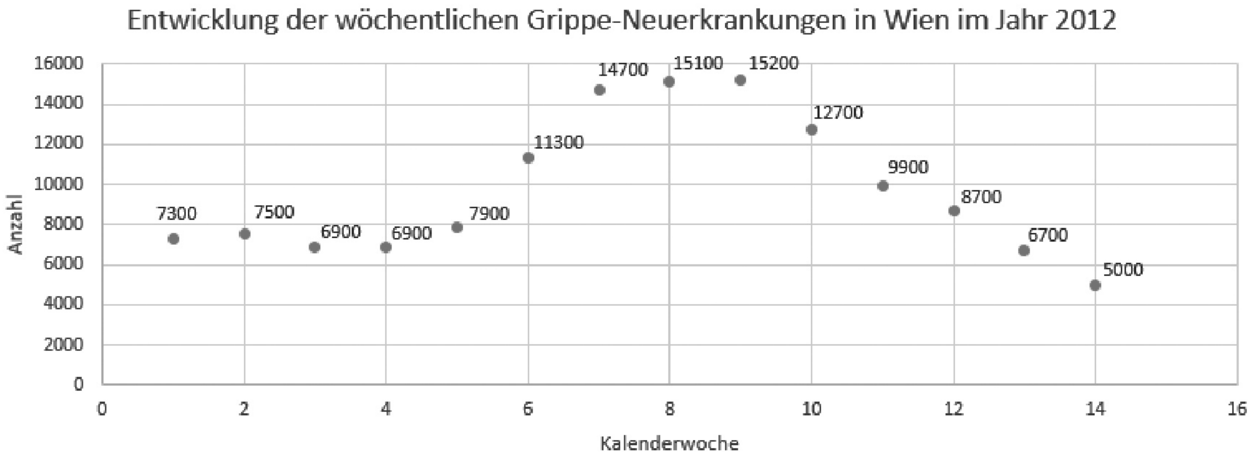
Leitfrage:

Erklären Sie, wie der Parameter a zu ändern ist, damit die Funktion streng monoton steigend ist!
Geben Sie an, wie sich eine Spiegelung des Graphen der Funktion f an der senkrechten Achse auf den Funktionsterm auswirkt!

Aufgabe 2

Grippe

Die nachstehende Grafik beschreibt die Entwicklung der gemeldeten wöchentlichen Grippe-Neuerkrankungen in Wien im Jahr 2012 von der Kalenderwoche 1 bis zur Kalenderwoche 14.



(Datenquelle: https://www.wien.gv.at/gesundheit/einrichtungen/grippemeldedienst/archiv.html#saison1112 [13.05.2016])

Aufgabenstellung:

Anhand der Daten von Kalenderwoche 4 und Kalenderwoche 5 kann mithilfe eines exponentiellen Modells die Anzahl der Grippe-Neuerkrankungen für die Kalenderwoche 6 prognostiziert werden. Berechnen Sie, um wie viel dieser prognostizierte Wert vom in der Grafik angeführten tatsächlichen Wert abweicht!

Leitfrage:

Berechnen Sie, in welcher Kalenderwoche durch das soeben erstellte exponentielle Modell der in der Grafik angegebene Maximalwert erreicht worden wäre!
Erklären Sie, warum eine Modellierung mit einer Exponentialfunktion nur zeitlich begrenzt sinnvoll sein kann!

Aufgabe 3

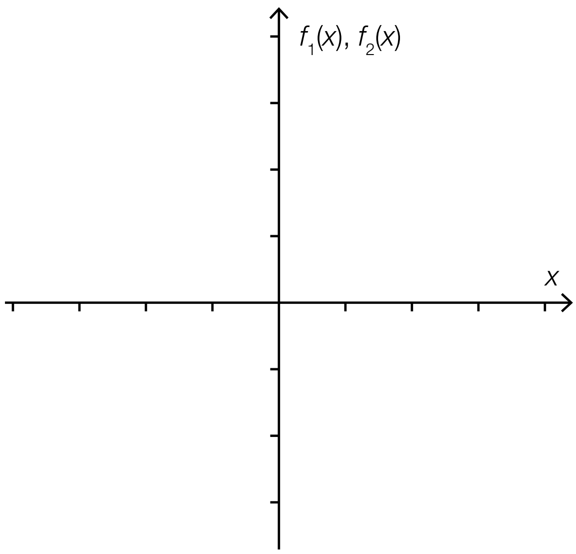
Funktionsgraphen

Für die Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen $f_1(x) = a \cdot c^x$ und $f_2(x) = b \cdot d^x$ gilt:

Die Parameter a, b, c, d sind positive reelle Zahlen mit: $a < b$ und $c > 1$ und $0 < d < 1$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Graphen von f_1 und f_2 und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!



Leitfrage:

Die Funktion f_1 beschreibt die Entwicklung einer Größe in Abhängigkeit von der Zeit.

Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Verdoppelungszeit x_τ der Funktion f_1 her!

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist!

a) Eine Halbierung des Parameters a bewirkt immer eine Halbierung der Verdoppelungszeit.
b) Eine Verdoppelung des Parameters c bewirkt immer eine Halbierung der Verdoppelungszeit.

Aufgabe 3

Wirkstoffkonzentration

Die Konzentration $c(t)$ eines Wirkstoffes im Blut t Stunden nach der Einnahme eines Arzneimittels kann durch die Gleichung $c(t) = c(0) \cdot 0{,}85^t$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Gleichung $c(t_1) = 0{,}7 \cdot c(0)$ im gegebenen Zusammenhang und berechnen Sie t_1!

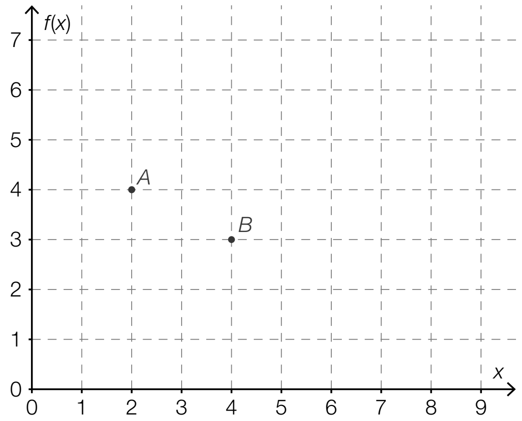
Leitfrage:

Skizzieren Sie einen zur Aufgabenstellung passenden Graphen und erläutern Sie für die berechnete Zeit t_1, wie sich die absoluten und relativen (prozentuellen) Änderungen der Wirkstoffkonzentration in den Intervallen $[0; t_1]$, $[t_1; 2t_1]$ und $[2t_1; 3t_1]$ jeweils entwickeln!

Aufgabe 3

Punkte einer Exponentialfunktion

Die in der nachstehenden Abbildung dargestellten Punkte A und B haben ganzzahlige Koordinaten. Der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ verläuft durch die Punkte A und B.



Aufgabenstellung:

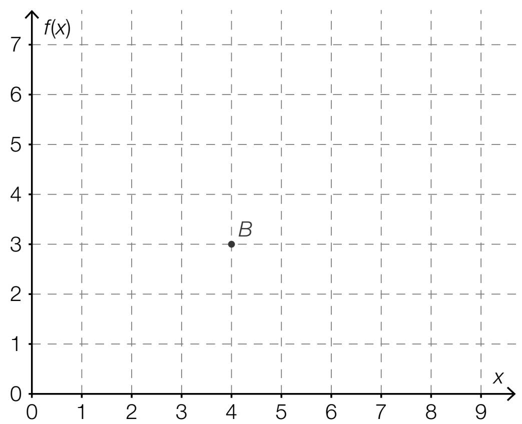
Geben Sie an, ob die nachstehenden Aussagen über diese durch A und B verlaufende Exponentialfunktion f zutreffen, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidungen!

- $f(0) \leq 5$
- $b < 1$
- Der Änderungsfaktor $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ist konstant.

Leitfrage:

Die gegebene Funktion f beschreibt einen Zerfallsprozess mit x in Stunden.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung und die Halbwertszeit der Funktion f!

Ergänzen Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen Punkt A_1 so, dass A_1 und B auf dem Graphen einer Exponentialfunktion liegen, deren Halbwertszeit zwei Stunden beträgt!



Aufgabe 2

Abkühlung

Ein Gefäß mit heißem Wasser wird bei einer Umgebungstemperatur von 0 °C zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ins Freie gestellt. Die Temperatur $T(t)$ (in °C) des Wassers ist abhängig von der Zeit t (in Minuten) und kann durch eine Funktion T mit $T(t) = 90 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Halbwertszeit für diesen Abkühlungsprozess und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate $T'(t)$ der Temperatur des Wassers direkt proportional zur momentanen Temperatur des Wassers zum Zeitpunkt t ist, und geben Sie den Proportionalitätsfaktor k an!

$k =$ ____

Geben Sie an, welche Bedeutung der Betrag von T' für den Abkühlungsprozess hat!

Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Von einer Exponentialfunktion f ist die nachstehende Wertetabelle gegeben:

x	0	1	3	5
$f(x)$		12	3	

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die beiden fehlenden Funktionswerte und geben Sie die Funktionsgleichung von f in der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ an!

Leitfrage:

Zusätzlich zu der in der Aufgabenstellung angegebenen Form $f(x) = a \cdot b^x$ ist auch die Schreibweise $f(x) = c \cdot e^{d \cdot x}$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $d \in \mathbb{R}, d \neq 0$) gebräuchlich.

Geben Sie an, wie die Parameter a, b, c, d der beiden (Darstellungs-)Formen zusammenhängen! Erklären Sie die Wirkung der Parameterwerte c und d auf die Monotonie der Funktion!

Aufgabe 3

Wachstum einer Pflanze

In einem Gewächshaus wird das Wachstum einer Pflanze unter kontrollierten Bedingungen über einen Zeitraum von 20 Wochen beobachtet. Zu Beginn der Beobachtung weist die Pflanze eine Höhe von 10 cm auf. Innerhalb der ersten 5 Wochen wird festgestellt, dass die Höhe der Pflanze pro Woche um 15 % zunimmt. Nach Ablauf der ersten 5 Wochen ändern sich die Bedingungen im Gewächshaus.

Aufgabenstellung:

Die Pflanzenhöhe innerhalb der ersten 5 Wochen kann durch die Funktion f modelliert werden. Dabei gibt $f(t)$ die Höhe der Pflanze in cm t Wochen nach Beobachtungsbeginn an.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an und berechnen Sie die Höhe der Pflanze 5 Wochen nach Beobachtungsbeginn!

Leitfrage:

In der nachstehenden Tabelle ist die Höhe der Pflanze zu einigen weiteren Zeitpunkten angegeben.

Anzahl der vergangenen Wochen (seit Beobachtungsbeginn)	Höhe der Pflanze (in cm, gerundet auf mm)
7	22,7
11	25,2
20	29,8

Gerhard behauptet, dass gemäß den vorliegenden Daten das Wachstum der Pflanze nach Ablauf der ersten 5 Wochen nicht mehr exponentiell erfolgt.

Geben Sie an, ob diese Aussage richtig oder falsch ist, und begründen Sie mithilfe einer passenden Berechnung Ihre Entscheidung!

Aufgabe 2

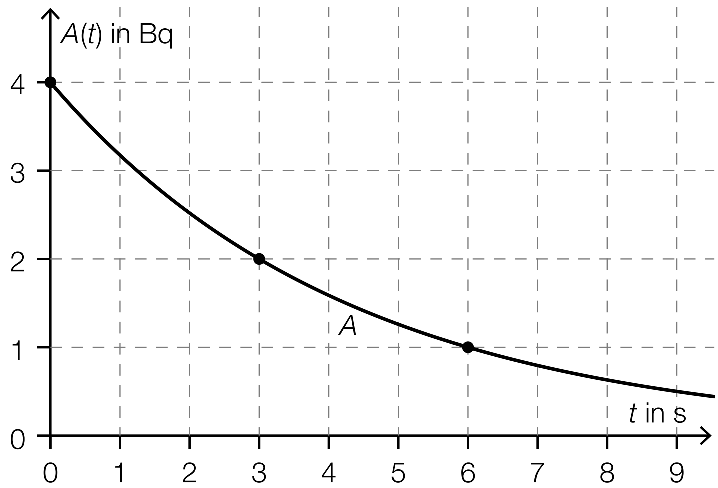
Aktivität eines radioaktiven Stoffes

Unter der Aktivität eines radioaktiven Stoffes versteht man die Anzahl der Kernzerfälle pro Sekunde. Sie wird in Becquerel (Bq) angegeben.

Aufgabenstellung:

Die Aktivität A kann in der Form $A(t) = A_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden. A_0 gibt den Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion A für das radioaktive Isotop Scandium-53 dargestellt. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Ermitteln Sie den Wert des Parameters c für das radioaktive Isotop Scandium-53 und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf die Abnahme der Aktivität von Scandium-53!

Leitfrage:

Die Aktivität A kann auch in der Form $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ angegeben werden.

Ermitteln Sie den Wert der Zerfallskonstanten λ für das radioaktive Isotop Scandium-53 und geben Sie eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen c und λ beschreibt!

Aufgabe 2

Schwimmbad

Ein Schwimmbecken fasst 36 000 Liter Wasser. Zum Füllen des leeren Beckens wird Wasser über einen Schlauch zugeleitet. Die zum vollständigen Befüllen notwendige Zeit t (in Sekunden) hängt von der Durchflussrate x (in Litern/Sekunde) ab.

Aufgabenstellung:

Die Funktion t beschreibt die Abhängigkeit der Füllzeit von der Durchflussrate x.
Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser Funktion an und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen!

$t(x) =$ ____

Leitfrage:

Geben Sie jeweils an, welche Bedingung der Parameter a bzw. der Parameter λ einer Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ erfüllen muss, damit f für alle $x \in \mathbb{R}^+$ das gleiche Monotonie- und Krümmungsverhalten wie die Funktion t zeigt!

Geben Sie weiters an, wodurch sich die Verläufe der Graphen der Funktionen t und f wesentlich unterscheiden!

Aufgabe 2

Jod-131

Das Isotop Jod-131 ist radioaktiv.
Die nach t Tagen noch vorhandene Menge $N(t)$ von Jod-131 nimmt näherungsweise exponentiell ab. Dabei bezeichnet N_0 die Menge an Jod-131 zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Nach vier Tagen sind 30 % der Ausgangsmenge von Jod-131 zerfallen.
Berechnen Sie, welcher Prozentsatz des vorhandenen Jod-131 pro Tag zerfällt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie allgemein (ohne Verwendung konkreter Zahlenwerte) die relative Änderung einer Exponentialfunktion der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ in den Zeitintervallen $[0; t_1]$ und $[t_0; t_0 + t_1]$ (mit $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^+$)!

Interpretieren Sie die Ergebnisse (im Hinblick auf eine charakteristische Eigenschaft von Exponentialfunktionen)!