Aufgabe 2

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ festgelegt.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $A = (0|8|0)$ und $B = (-2|28|6)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

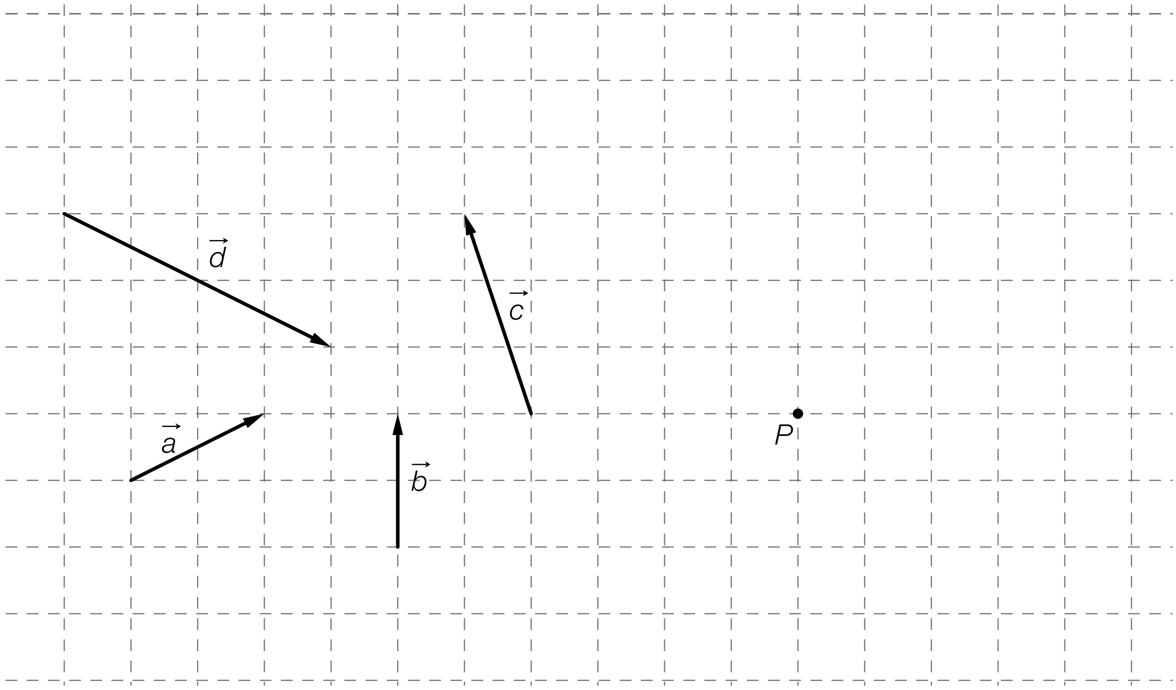
Leitfrage:

Erläutern Sie, welche weiteren Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden a und b in $\mathbb{R}^3$ mit den Parameterdarstellungen a: $X = P + r \cdot \vec{a}$ und b: $X = Q + s \cdot \vec{b}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) auftreten können! Geben Sie für jeden dieser Fälle an, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit diese Lagebeziehung auftritt!

Aufgabe 1

Vektoren

Gegeben sind Pfeildarstellungen der vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ und ein Punkt P.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie in der gegebenen Abbildung ausgehend vom Punkt P grafisch Pfeildarstellungen der Vektoren $\vec{a} - \vec{c}$ und $2 \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$!

Leitfrage:

Begründen Sie anhand der gegebenen Pfeildarstellungen, warum es möglich ist, durch die Vektoraddition $r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{d}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) den Vektor $\vec{c}$ zu erhalten, und bestimmen Sie rechnerisch die Werte der Parameter r und s!

Aufgabe 1

Parallelogramm

Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte *A*, *B* und *C* eines Parallelogramms *ABCD*.

$A = (-2|0)$

$B = (2|b)$ mit $b \in \mathbb{R}$

$C = (6|4)$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *D* dieses Parallelogramms in Abhängigkeit von *b*!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

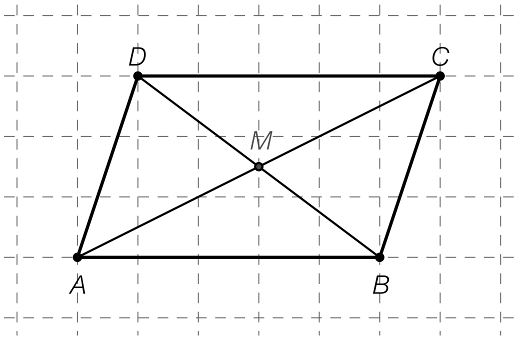
Leitfrage:

Es gibt genau einen Wert für *b*, sodass das Viereck *ABCD* ein entartetes Parallelogramm ergibt (das bedeutet, dass die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* auf einer Geraden liegen). Ermitteln Sie diesen Wert für *b* und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 1

Vektoren

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Parallelogramm *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *M*.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch ist/sind!
Begründen Sie Ihre Antwort jeweils anhand der Abbildung!

I. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

II. $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = C$

III. $\overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

Leitfrage:

In physikalischen Kontexten können Geschwindigkeiten mithilfe von Vektoren dargestellt werden. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ beschreibt die geradlinige Bewegung eines Objekts. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2$ beschreibt die geradlinige Bewegung eines zweiten Objekts.

Deuten Sie die nachstehend angeführten Zusammenhänge sowohl geometrisch als auch im Hinblick auf die Bewegung der Objekte!

I. $2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0$

II. Die Länge des Vektors $\vec{v}_1$ ist halb so groß wie die des Vektors $\vec{v}_2$.

Aufgabe 1

Steigung

Die Steigung von Straßen wird in Prozent angegeben. Eine Steigung von p % bedeutet beispielsweise, dass auf einer waagrechten Strecke von 100 Metern die Höhe um p Meter zunimmt.

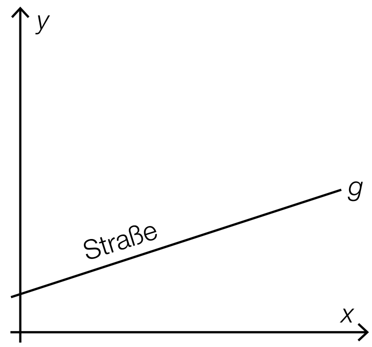
Jeder Steigung p (in %) entspricht ein bestimmter Steigungswinkel α.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen α und p beschreibt!

Leitfrage:

Der geradlinige Verlauf einer ansteigenden Straße kann durch eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ veranschaulicht werden.



Ermitteln Sie den Steigungswinkel α und die Steigung p (in %) der Straße!

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

Die Gerade g verläuft durch den Punkt $P = (3|1|5)$ und ist parallel zur y-Achse.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Parameterdarstellung für g an!

Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, die Koordinaten y_Q und z_Q eines Punktes $Q = (1|y_Q|z_Q)$ so zu bestimmen, dass der Punkt Q auf der Geraden g liegt!

Leitfrage:

Geben Sie einen Überblick über mögliche Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$!

Die Gerade h wird durch die Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} x_h \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y_h \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, x_h, y_h \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Ist es möglich, Zahlenwerte für x_h und y_h so zu bestimmen, dass die beiden Geraden g und h zueinander normal sind und einander im Punkt P schneiden?
Wenn nein, begründen Sie mithilfe von Rechnungen, warum dies nicht möglich ist!
Wenn ja, geben Sie die entsprechenden Werte von x_h und y_h an!

Aufgabe 1

Berechnungen mit Vektoren

Gegeben sind Zahlen und Vektoren. Es gilt:
$a \in \mathbb{R}$; $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$; $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke (wohl-)definiert sind:

$a - \vec{x} \cdot \vec{y}$
$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v}$
$\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{v})$

Erklären Sie zu jedem (wohl-)definierten Ausdruck, welche Art von Ergebnis vorliegt!

Leitfrage:

Die beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ y_2 \end{pmatrix}$ beschreiben die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 37{,}5$ Flächeneinheiten. Geben Sie zwei Gleichungen in Abhängigkeit von x_1 und y_2 an, die es ermöglichen, die fehlenden Koordinaten von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zu berechnen, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 1

Normalvektor

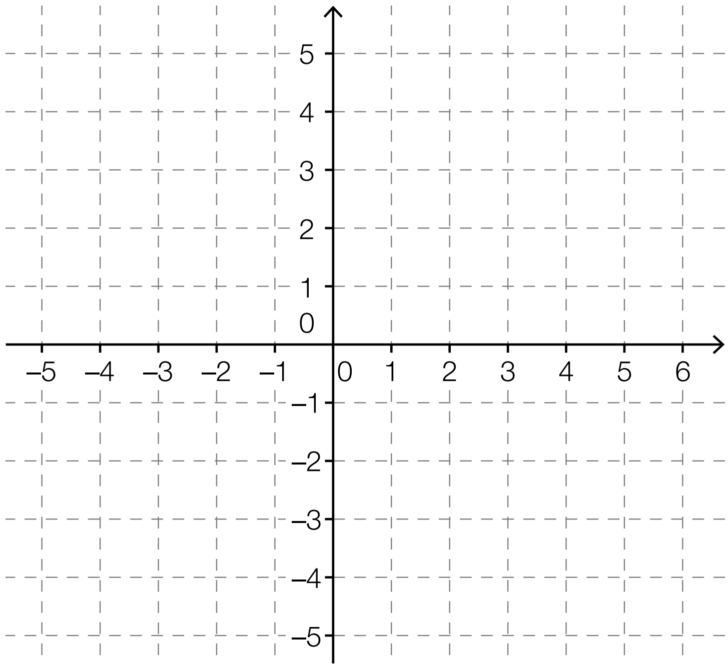
Gegeben sind ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P = (3|-2)$ und $Q = (-7|-8)$ in der Ebene.

Aufgabenstellung:

Eine Gerade g wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben: $X = P + s \cdot \vec{a}$ mit $s \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die Gerade g den Punkt Q enthält, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und einen zugehörigen, gleich langen Normalvektor $\overrightarrow{n_a}$ ein!



Ergänzen Sie im obigen Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} + k \cdot \overrightarrow{n_a}$ mit $0 < k < 1$!

Erklären Sie weiters, warum es unterschiedliche Möglichkeiten gibt, zu einem gegebenen Vektor einen Normalvektor anzugeben!

Aufgabe 2

Parallelogramm

Von einem Parallelogramm *ABCD* sind die Eckpunkte $A = (-1|2)$ und $B = (5|1)$ und der Schnittpunkt der Diagonalen $M = (3|3)$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunkts *C* rechnerisch!

Leitfrage:

Geben Sie die Koordinaten eines Punktes B_1 so an, dass die Punkte A und B_1 die Eckpunkte sind und M der Mittelpunkt eines Quadrats ist! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Geraden g:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Weiters ist ein Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4 \\ p_3 \end{pmatrix}$ mit $p_1, p_3 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Geben Sie p_1 und p_3 so an, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

Leitfrage:

Geben Sie an, wie die Gerade g in Bezug zur x-, y- und z-Achse jeweils liegt (parallel, identisch, schneidend bzw. windschief), und begründen Sie Ihre Aussagen!

Weiters ist die Parameterdarstellung der Geraden h in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3 (mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) gegeben:

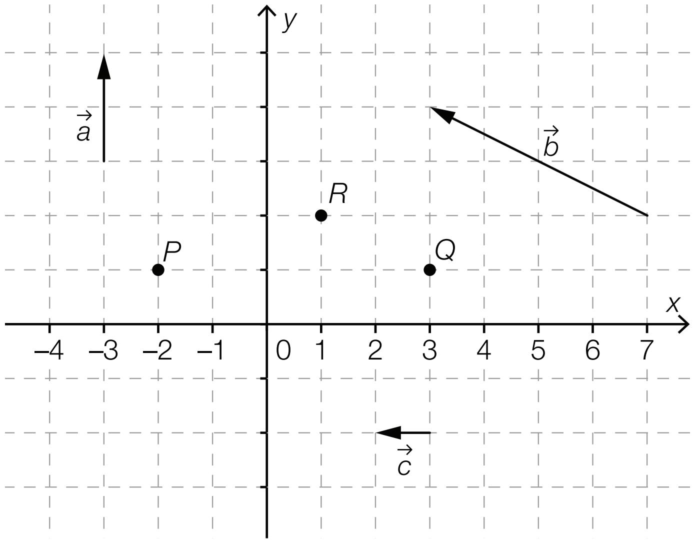
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Geben Sie an, welche Bedingungen a_1, a_2 und a_3 erfüllen müssen, damit die Geraden g und h aufeinander normal stehen!

Aufgabe 1

Punkte und Vektoren

Im nachstehenden Koordinatensystem sind drei Punkte mit jeweils ganzzahligen Koordinaten und drei Vektoren mit jeweils ganzzahligen Komponenten eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der nachstehenden Aussagen wahr ist/sind!

- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $Q = P + t \cdot \vec{c}$.
- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $P = R + t \cdot \vec{a}$.
- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $R = Q + t \cdot \vec{b}$.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen und berechnen Sie gegebenenfalls den entsprechenden Parameterwert!

Leitfrage:

Erläutern Sie allgemein, warum nicht jede Gerade als Graph einer linearen Funktion f mit $f: x \mapsto y$ aufgefasst werden kann!

Geben Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung derjenigen Geraden g an, die durch den Punkt P verläuft, einen der drei eingezeichneten Vektoren als Richtungsvektor hat und nicht als Graph einer linearen Funktion g mit $g: x \mapsto y$ aufgefasst werden kann!

Aufgabe 1

Geraden

Gegeben sind die Parameterdarstellung einer Geraden g sowie die Gleichungen von drei weiteren Geraden g_1, g_2, g_3.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

$g_1\colon 3 \cdot x + y = 9$

$g_2\colon y = -3 \cdot x + 10$

$g_3\colon x - 3 \cdot y = -7$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der Geraden g_1, g_2, g_3 mit der Geraden g einen rechten Winkel einschließen, und begründen Sie Ihre Antwort!

Leitfrage:

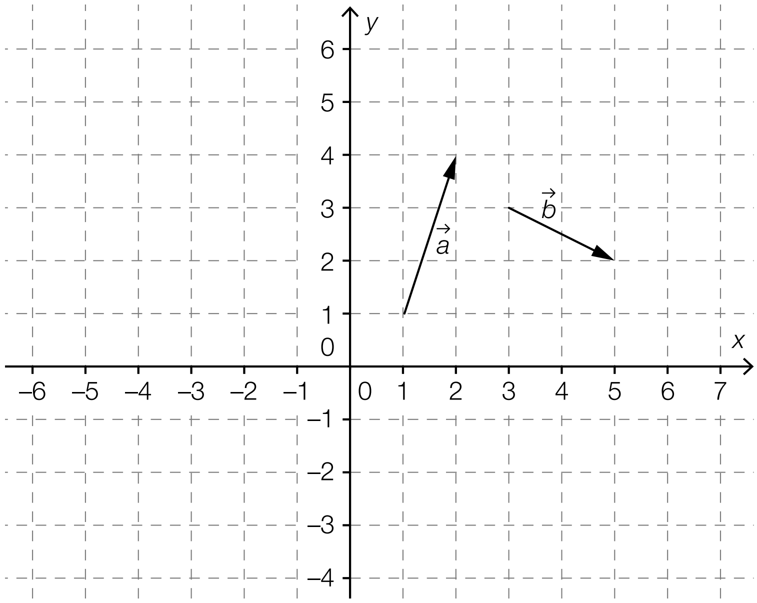
Geben Sie an, welche der vier gegebenen Geraden identisch sind, und begründen Sie Ihre Antwort!

Geben Sie an, wie die Werte von a_1 und b_2 (mit $a_1, b_2 \in \mathbb{R}$) der Geraden $h\colon X = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, damit g und h genau einen Schnittpunkt haben!
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 1

Vektoren in der Ebene

Im nachstehenden Koordinatensystem sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie man den Vektor $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ grafisch ermitteln kann, zeichnen Sie diesen Vektor in das Koordinatensystem ein und lesen Sie aus der Grafik die Koordinaten (die Komponenten) dieses Vektors ab!

Leitfrage:

Geben Sie eine Parameterdarstellung derjenigen Geraden g an, die durch den Ursprung $(0|0)$ verläuft und den Vektor $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ als Richtungsvektor hat!

Erläutern Sie die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene und geben Sie für jede dieser Möglichkeiten eine Parameterdarstellung einer Geraden an, die zur Geraden g diese Lagebeziehung aufweist!

Aufgabe 1

Vierecke

Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit den Eckpunkten $A = (0|0|0)$, $B = (6|-2|3)$, C und $D = (3|6|z_D)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die fehlende Koordinate des Eckpunkts D und die Koordinaten des Eckpunkts C!

Leitfrage:

Gegeben ist ein weiteres Viereck *PQRS* mit den Eckpunkten $P = (0|0|0)$, $Q = (7|y_Q|-4)$, $R = (8|15|0)$ und $S = (x_S|8|4)$.

Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte Q und S so, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist!
Überprüfen Sie, ob das Parallelogramm auch ein Rechteck, eine Raute oder ein Quadrat ist, und erläutern Sie jeweils Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Die Gerade g wird durch die Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ festgelegt.

Aufgabenstellung:

Die Gleichung $a \cdot x - 6 \cdot y = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beschreibt dieselbe Gerade g. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

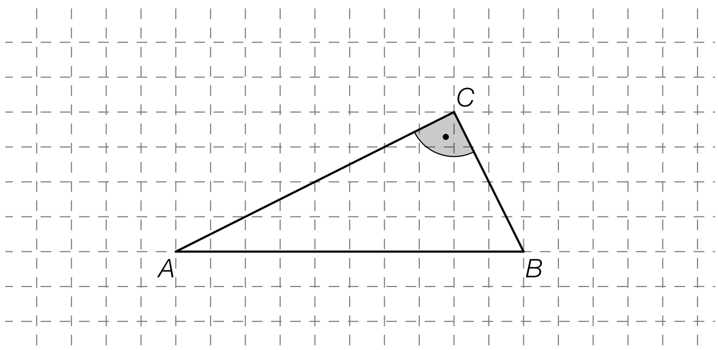
Die durch die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ beschriebene Gerade h verläuft normal zu g. Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt $S = (8 | y_S)$.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$. Die Seite BC ist halb so lang wie die Seite AC.



In diesem Dreieck gilt für die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $2 \cdot \vec{u} = \overrightarrow{BC}$ und $4 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{CA}$.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie sowohl den Vektor $\vec{u}$ als auch den Vektor $\vec{v}$ mit A als Ausgangspunkt ein!

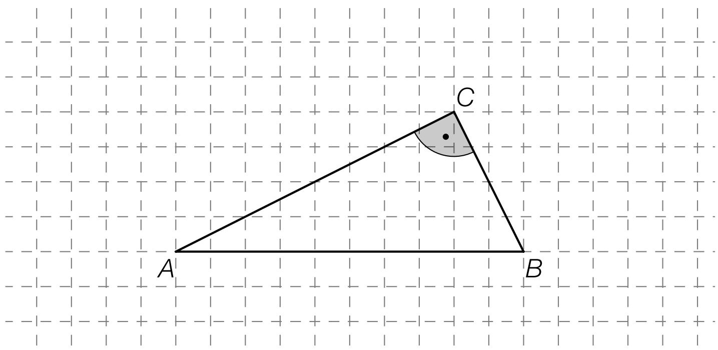
Leitfrage:

Für einen Punkt D gelten beide nachstehend angeführten Bedingungen.

(1) Es existiert ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$, für den $D = C + t \cdot \vec{v}$ gilt.

(2) Für die beiden Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BD}$ gilt: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Punkt D ein und geben Sie den Wert des Parameters t an! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!



Aufgabe 3

Kräfteparallelogramm

Zwei Kräfte $\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ greifen in einem Punkt an ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0$).

Die beiden Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$ schließen einen rechten Winkel ein. Für die resultierende Kraft $\vec{F}$ gilt:
$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 75 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte der Koordinaten (Komponenten) x_1, x_2 und y_2, wenn die Koordinate $y_1 = 27$ ist!

Leitfrage:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels $\alpha \in (0°; 90°)$ zwischen den Kräften $\vec{F}$ und $\overrightarrow{F_2}$ an und berechnen Sie diesen Winkel α!

Aufgabe 1

Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b_z \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ c_y \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Komponenten b_z und c_y so, dass die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ jeweils auf $\vec{a}$ normal stehen!

Zeigen Sie, dass für die von Ihnen ermittelten Komponenten auch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufeinander normal stehen, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie jeweils eine Parameterdarstellung für die Geraden *g*, *h* und *i* so an, dass die nachstehend angeführten Bedingungen erfüllt sind!

I: Die Gerade *g* hat den Vektor $\vec{a}$ als Richtungsvektor und verläuft durch den Ursprung.

II: Die Gerade *h* hat den Vektor $\vec{b}$ als Richtungsvektor und schneidet die Gerade *g* in genau einem Punkt.

III: Die Gerade *i* ist parallel zur Geraden *h* und windschief zur Geraden *g* (sie hat also mit *g* keinen Schnittpunkt).

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise und weisen Sie nach, dass *i* zu *g* windschief ist!