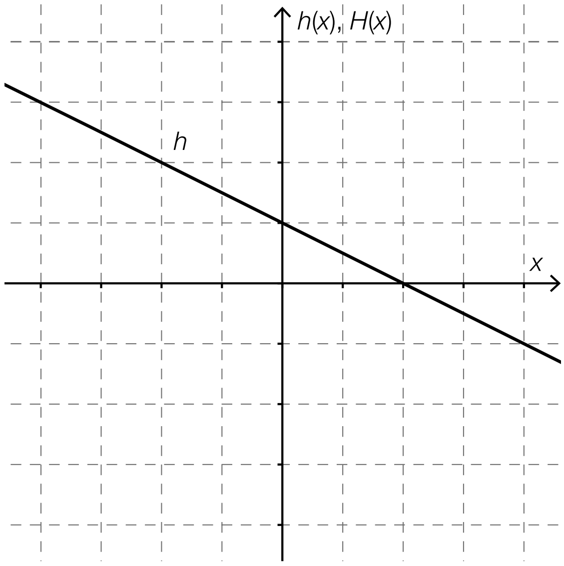
Aufgabe 4

Stammfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer linearen Funktion h.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in obiger Abbildung den Graphen einer Stammfunktion H von h und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

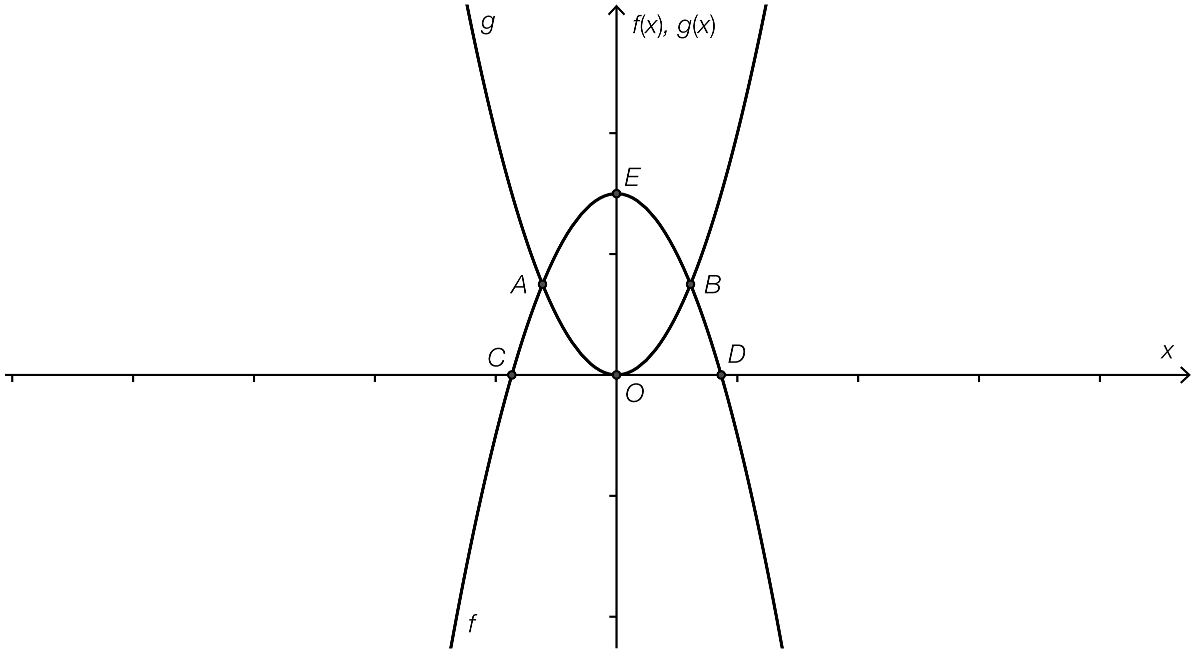
Begründen Sie, warum es unendlich viele Stammfunktionen der dargestellten Funktion h gibt, und geben Sie an, worin sich die Graphen dieser Stammfunktionen unterscheiden!

Geben Sie mithilfe der Stammfunktion H einen (allgemeinen) Term zur Berechnung des Integrals $\int_{-10}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x$ an!

Aufgabe 4

Flächenberechnung

Gegeben sind die Graphen von zwei quadratischen Funktionen f und g, die symmetrisch zur senkrechten Achse liegen:



Dabei gilt:

$B = (a|b)$
$D = (d|0)$
$O = (0|0)$
$E = (0|e)$ mit $a, b, d, e \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Die Graphen von g und f und die positive x-Achse begrenzen ein Flächenstück.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Größe dieses Flächenstücks an!

Leitfrage:

Skizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion F der Funktion f mit $F(0) = 0$ in der gegebenen Abbildung!

Markieren Sie in der Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt gleich $F(d)$ ist!

Aufgabe 3

Federkraft

Wird eine Feder gedehnt, so ist die Kraft, die zur Dehnung der Feder aufgewendet werden muss, direkt proportional zur Ausdehnung. Die Funktion F beschreibt die aufzuwendende Kraft in Abhängigkeit von der Ausdehnung x.

Es gilt: $F(x) = k \cdot x$.

Dabei wird x in Metern (m) und $F(x)$ in Newton (N) angegeben. Die Konstante k wird als Federkonstante bezeichnet und gibt die „Härte" einer Feder an.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von F und kennzeichnen Sie k in Ihrer Skizze!

Leitfrage:

Geben Sie einen Term in Abhängigkeit von k an, mit dem man diejenige Arbeit berechnen kann, die notwendig ist, um die Feder um die Länge x_0 zu dehnen!

Geben Sie an, wie sich die Arbeit ändert, wenn die Feder um die Länge $2 \cdot x_0$ gedehnt wird!

Aufgabe 4

Integral

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 1$.

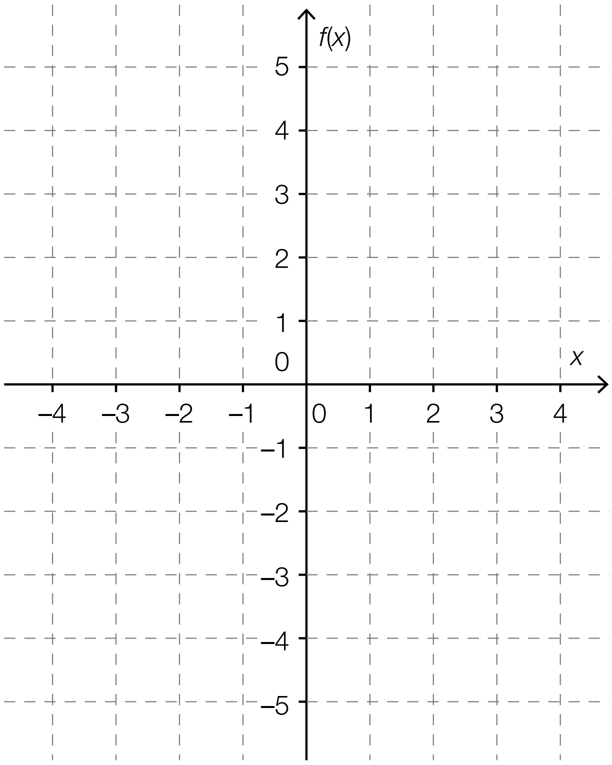
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F der Funktion f an, für die $F(2) = 2$ gilt!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$!

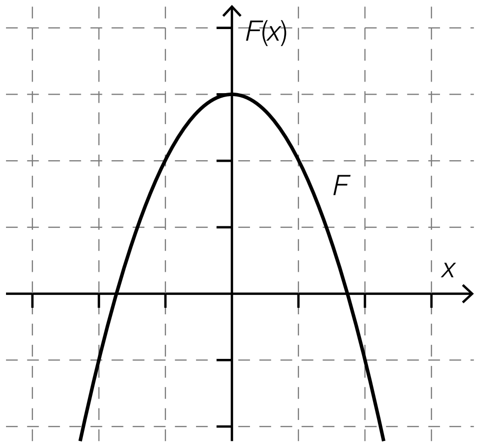
Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion f dar und erklären Sie anhand des Graphen, warum in diesem Fall $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt!



Aufgabe 4

Stammfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Stammfunktion F einer Polynomfunktion f dargestellt. Die Funktion F ist symmetrisch zur senkrechten Achse.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ an und erläutern Sie, welche Überlegungen zu diesem Wert führen!

Leitfrage:

Die Funktion F ist eine Polynomfunktion zweiten Grades mit der Funktionsgleichung $F(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Erläutern Sie, wie sich eine Veränderung des Parameters b auf den Wert des bestimmten Integrals $\int_{0}^{z} f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $z > 0$ auswirkt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 4

Integral

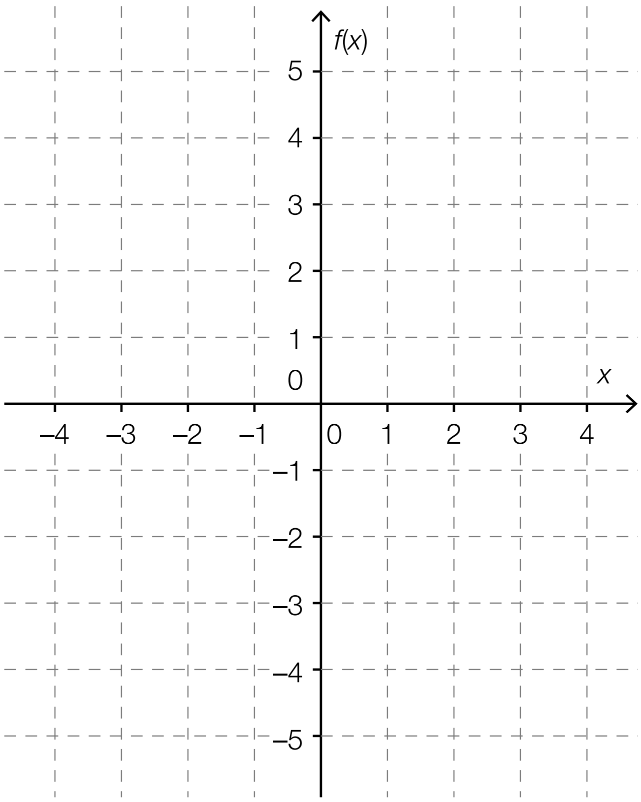
Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot x + 2$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F der Funktion f an, für die $F(2) = 1$ gilt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

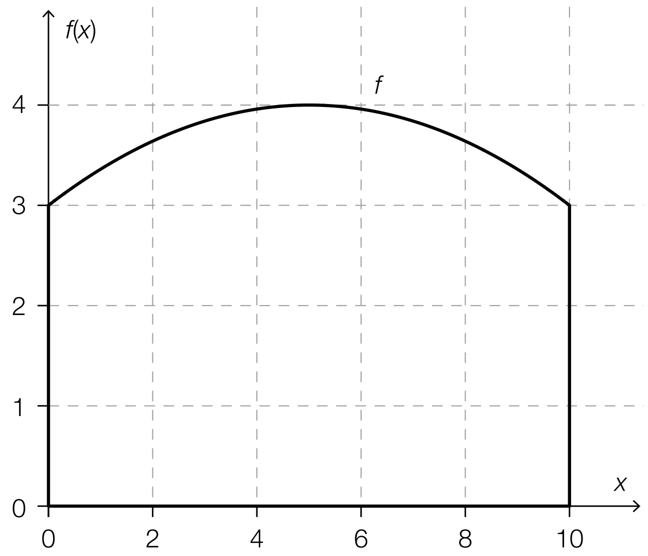
Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!
Stellen Sie den Graphen der Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem dar und erklären Sie, warum in diesem Fall der Wert des bestimmten Integrals nicht mit dem Inhalt derjenigen Fläche übereinstimmt, die im Intervall [0; 3] vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossen wird!



Aufgabe 4

Wandfläche

Eine Wandfläche hat drei geradlinige Berandungen, die durch die x-Achse, die senkrechte Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ modelliert werden können. Die vierte Grenze kann durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit der Gleichung $f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 3$ modelliert werden. Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Grenzen dieser Wand (Maße in Metern).



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Stammfunktion F von f an und bestimmen Sie den Inhalt der Wandfläche mithilfe dieser Stammfunktion!

Leitfrage:

Die Wandfläche soll in Teilbereichen mit unterschiedlichen Farben bemalt werden.

Variante 1:

Die Wandfläche soll durch zwei zur senkrechten Achse parallele Geraden in drei flächengleiche Teile geteilt werden.

Zeigen Sie, dass die erste Gerade die Gleichung $x = 3{,}46$ hat, und geben Sie die Gleichung der zweiten Geraden an!

Variante 2:

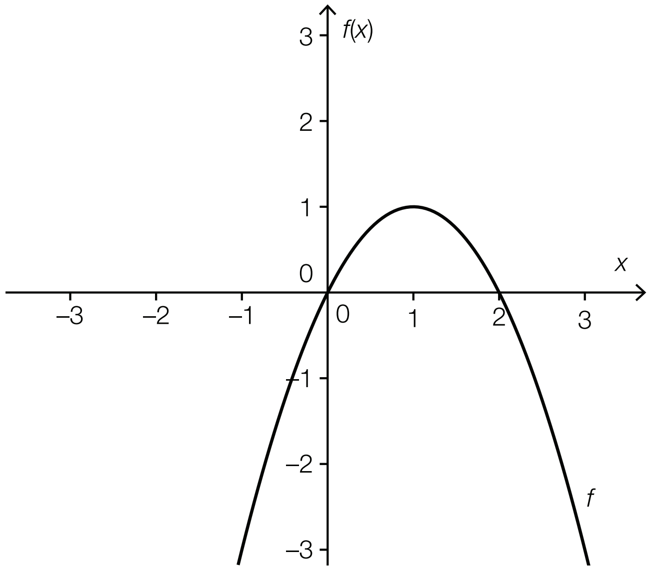
Die Wandfläche soll durch eine zur x-Achse parallele Gerade in der Höhe h in zwei flächengleiche Teile geteilt werden.

Berechnen Sie h!

Aufgabe 3

Bestimmtes Integral

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x$.



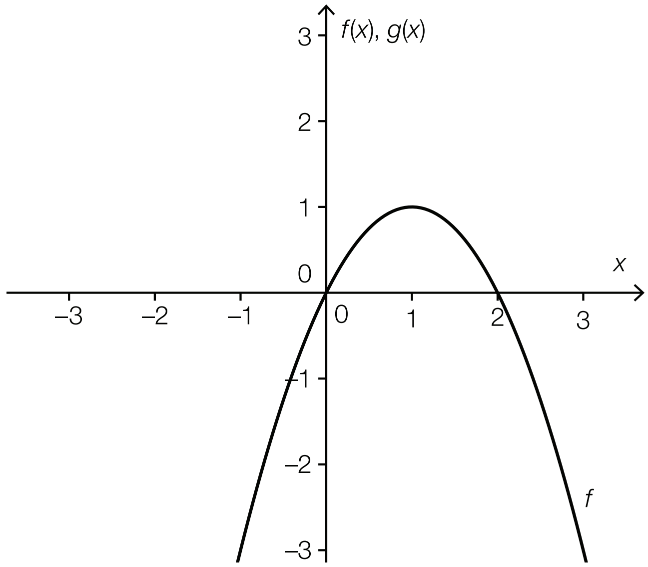
Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term zur Berechnung des Inhalts derjenigen Fläche an, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird, und berechnen Sie diesen!

Leitfrage:

Ergänzen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot x - 1$!

Für $a = \sqrt{3}$ gilt: $\int_0^a [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 0$.
Erläutern Sie den durch diese Gleichung beschriebenen Sachverhalt mithilfe der nachstehenden Abbildung!



Erläutern Sie, wie sich eine Vergrößerung von a auf den Wert des angegebenen bestimmten Integrals auswirkt!

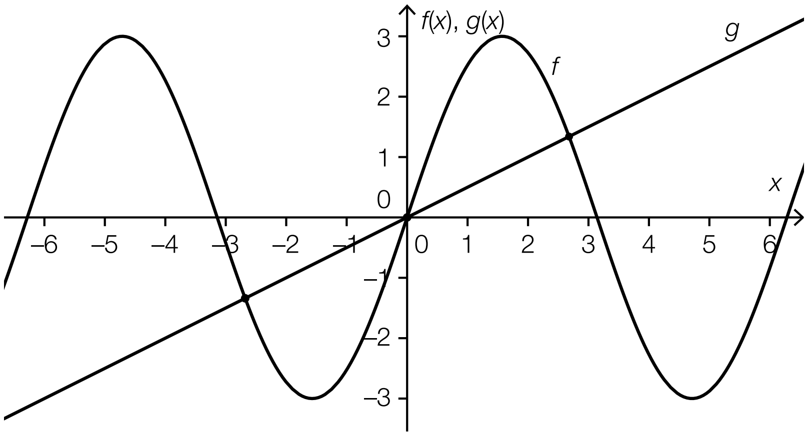
Aufgabe 3

Funktionen

Gegeben sind die Gleichungen und Graphen der Funktionen f und g mit:

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g(x) = \frac{x}{2}$



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diejenige Stelle x_1 im Intervall $[0; \pi]$, für die $f'(x_1) = g'(x_1)$ gilt, und erklären Sie, wie man diese Stelle grafisch ermitteln kann!

Leitfrage:

Die Gleichung $f(x) = g(x)$ hat für x drei Lösungen a, 0 und c mit $a < 0 < c$.

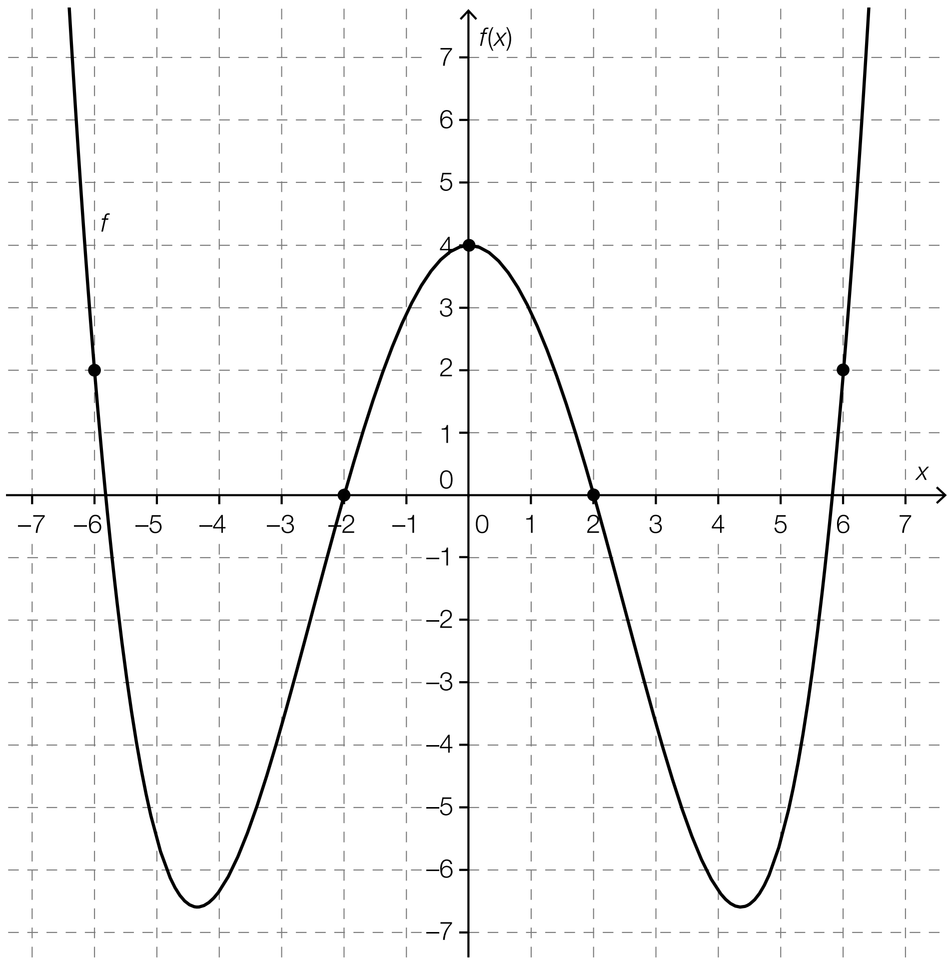
Stellen Sie den Wert des Terms $\int_0^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ in der oben stehenden Abbildung grafisch dar!

Geben Sie den Wert des Terms $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ an!

Aufgabe 3

Polynomfunktion vierten Grades

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion *f* vierten Grades mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ dargestellt. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Parameter *a*, *b* und *c* der Funktion *f*!
Geben Sie diejenigen Intervalle an, in denen $f'(x) > 0$ gilt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie ein $k \in \mathbb{R}$ mit $k > 2$ so an, dass die nachstehende Gleichung allgemeingültig ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = f'(0)$$

Es gibt einen weiteren Wert $h \in \mathbb{R}$, $0 \leq h \leq 2$, für den die Gleichung $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = f'(0)$ erfüllt ist. Berechnen Sie diesen Wert!

Aufgabe 4

Stammfunktion

Für eine Funktion f gilt $f(4) = -4$, die Gleichung ihrer Ableitungsfunktion f' lautet $f'(x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an!

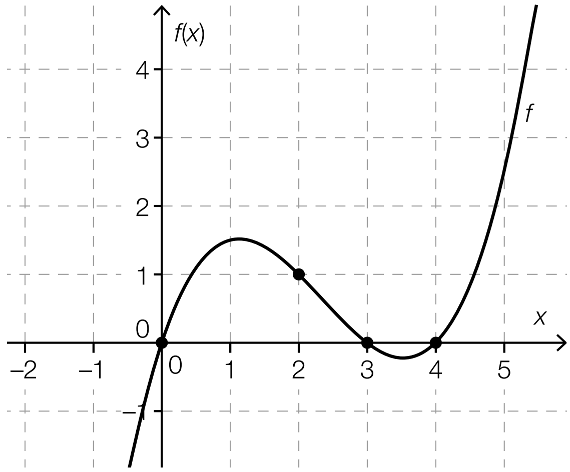
Leitfrage:

Die Funktion g ist eine Stammfunktion von f. Der Graph von g und die x-Achse begrenzen eine Fläche der Größe 144 Flächeneinheiten.
Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 3

Funktion und Stammfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Anzahl und die Lage der Extremstelle(n) und Wendestelle(n) einer Stammfunktion F von f an!

Leitfrage:

Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse zwei endliche Flächenstücke ein.

Stellen Sie einerseits unter Verwendung von f und andererseits unter Verwendung von F jeweils eine Formel zur Berechnung des (gesamten) Flächeninhalts dieser beiden Flächenstücke auf!

In der nebenstehenden Abbildung wird das größere Flächenstück durch 12 gleich breite Rechtecke angenähert. Die Summe dieser Rechtecksflächen (Obersumme) kann als Näherungswert für den Flächeninhalt des größeren Flächenstücks herangezogen werden.
Geben Sie den Wert der dargestellten Obersumme an und berechnen Sie unter Verwendung einer geeigneten Modellfunktion f, um wie viel dieser Wert vom tatsächlichen Wert des Flächeninhalts dieses Flächenstücks abweicht!