Aufgabe 3

Funktionen vergleichen

Gegeben sind vier reelle Funktionen f, g, h und i mit den nachstehenden Funktionsgleichungen:

$f(x) = 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = 3^x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$i(x) = \sin(3x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche dieser vier Funktionen im gesamten Definitionsbereich monoton steigend sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Skizzieren Sie jeweils in einem selbst angelegten Koordinatensystem (das nicht beschriftet oder skaliert sein muss) charakteristische Verläufe für die nachstehenden fünf Funktionstypen:

- lineare Funktion der Art $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$
- Polynomfunktion zweiten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$
- Polynomfunktion dritten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a \neq 0$
- Exponentialfunktion der Art $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
- Sinusfunktion der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$

Geben Sie an, welche dieser Funktionstypen auf ihrem Definitionsbereich auf jeden Fall lokale Extremstellen haben, welche auf jeden Fall keine lokalen Extremstellen haben und welche eventuell lokale Extremstellen haben!

öffentliches Dokument

Aufgabe 2

Formel als Funktion interpretieren

Gegeben ist folgende Formel:

$F = \frac{5 \cdot a^2 \cdot b}{3}$ mit $F, a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie sowohl

- F in Abhängigkeit von a bei konstantem b mit $b < 0$

als auch

- F in Abhängigkeit von b bei konstantem a mit $a \neq 0$

als Funktion und geben Sie jeweils an, um welchen Funktionstyp es sich dabei handelt!

Skizzieren Sie den Verlauf des jeweiligen Graphen!

Leitfrage:

Beschreiben Sie für die obigen zwei Funktionen die folgenden Eigenschaften:

- Monotonieverhalten
- Achsensymmetrie
- Achsenschnittpunkte

öffentliches Dokument

Aufgabe 2

Coulomb-Kraft

Zwischen zwei Ladungsmengen q_1 und q_2 (mit q_1, $q_2 > 0$), die sich im Abstand r befinden, wirkt die Coulomb-Kraft $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, wobei k eine positive Konstante ist.

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, welche Auswirkungen es auf die Coulomb-Kraft F hat, wenn die in der Formel auftretenden Größen folgendermaßen verändert werden!

a) Beide Ladungsmengen und der Abstand werden halbiert.

b) Eine Ladungsmenge und der Abstand werden verdoppelt, die zweite Ladungsmenge bleibt unverändert.

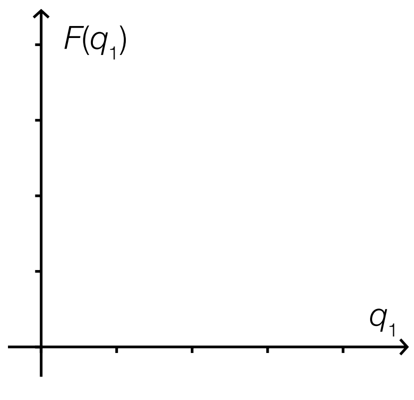
Leitfrage:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen die Graphen folgender funktionaler Abhängigkeiten und erläutern Sie jeweils den Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Graphen und den auftretenden Größen in der Funktionsgleichung!

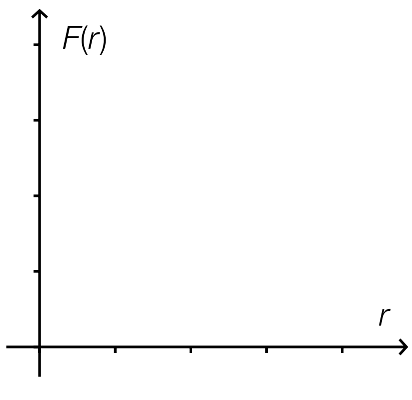
a) $F(q_1)$ bei konstantem q_2 und konstantem Abstand r

b) $F(r)$ bei konstanten Ladungsmengen

a)



b)



öffentliches Dokument

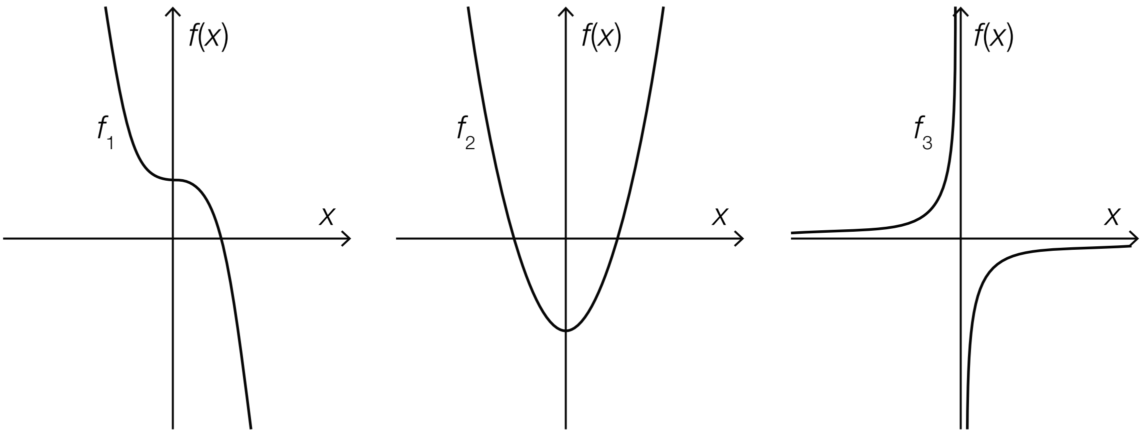
Aufgabe 2

Graphen von Potenzfunktionen

Gegeben sind drei Graphen von Potenzfunktionen mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{Z}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede der drei Funktionen f_1 bis f_3 einen möglichen Wert für den Exponenten z an! Geben Sie für jede Funktion an, ob der Parameter b negativ, positiv oder gleich null ist, und begründen Sie Ihre Antwort!



Leitfrage:

Geben Sie für Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a > 0$ an, für welche Werte des Parameters b und für welche Exponenten z folgende Sonderfälle auftreten:

- f beschreibt einen direkt proportionalen Zusammenhang.
- f beschreibt einen indirekt proportionalen Zusammenhang.

Erklären Sie außerdem die Begriffe *direkte Proportionalität* und *indirekte Proportionalität*!

öffentliches Dokument

Aufgabe 2

Funktionsgleichung aufstellen

Eine Funktion g hat die Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g(x + 1) = g(x) - 0{,}5$

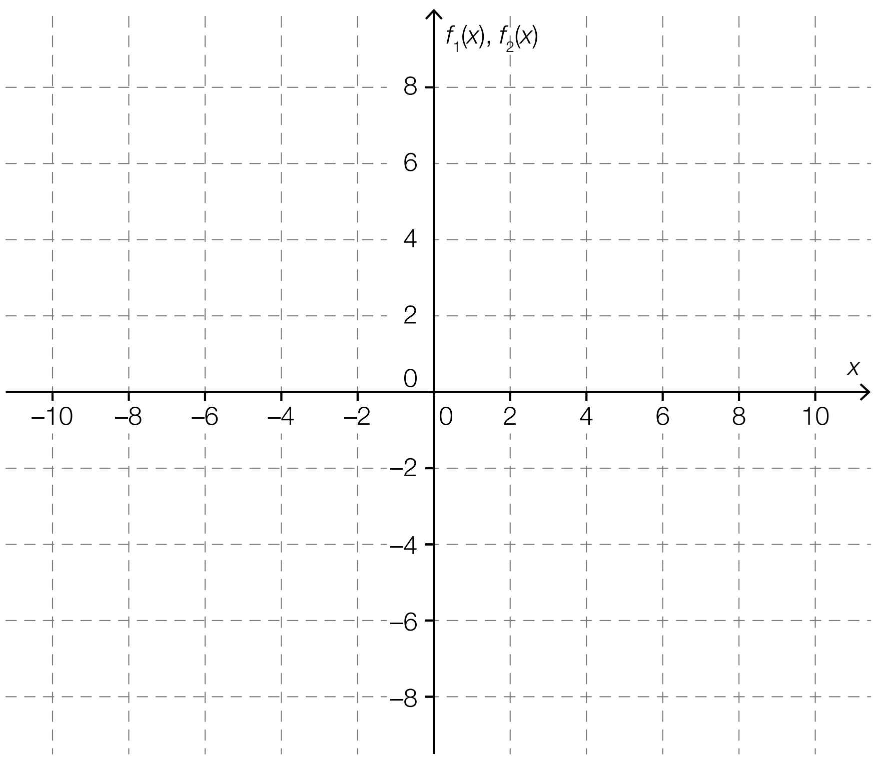
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung einer Funktion g an, die die gegebene Eigenschaft hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit folgenden Eigenschaften:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f_1(x + 1) = f_1(x) + a$ und $f_2(x + 1) = f_2(x) \cdot a$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 1$

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Verlauf der Graphen von f_1 und f_2!
Geben Sie für beide Funktionen an, welcher Funktionstyp jeweils vorliegt, und geben Sie an, wie sich das Monotonieverhalten der beiden Funktionen ändert, wenn man a aus dem Intervall (0; 1) wählt!



Aufgabe 2

Formel

Gegeben ist die Formel $E = \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ mit $a, b, d \in \mathbb{R}_0^+$ und $c \in \mathbb{R}^+$.

Diese Formel kann als Darstellung einer Funktion E in Abhängigkeit von einer der Variablen a, b, c oder d interpretiert werden, sofern die anderen drei Variablen mit Werten belegt und somit konstant sind.

Aufgabenstellung:

Bei der Funktion E_d mit $d \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ handelt es sich um eine lineare Funktion. Geben Sie für diese lineare Funktion die Steigung des Graphen und seinen Schnittpunkt S mit der senkrechten Achse an!

$k =$ ____

$S = (\ \_\_\_\_\_ \mid \_\_\_\_\_\ )$

Leitfrage:

Für die Bearbeitung der nachstehenden Fragestellung gilt: $d = 0$.

E_a: $a \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

E_b: $b \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

E_c: $c \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

Geben Sie jeweils den Funktionstyp der reellen Funktionen E_a, E_b und E_c an und skizzieren Sie für jede dieser Funktionen einen möglichen Graphen!

Aufgabe 2

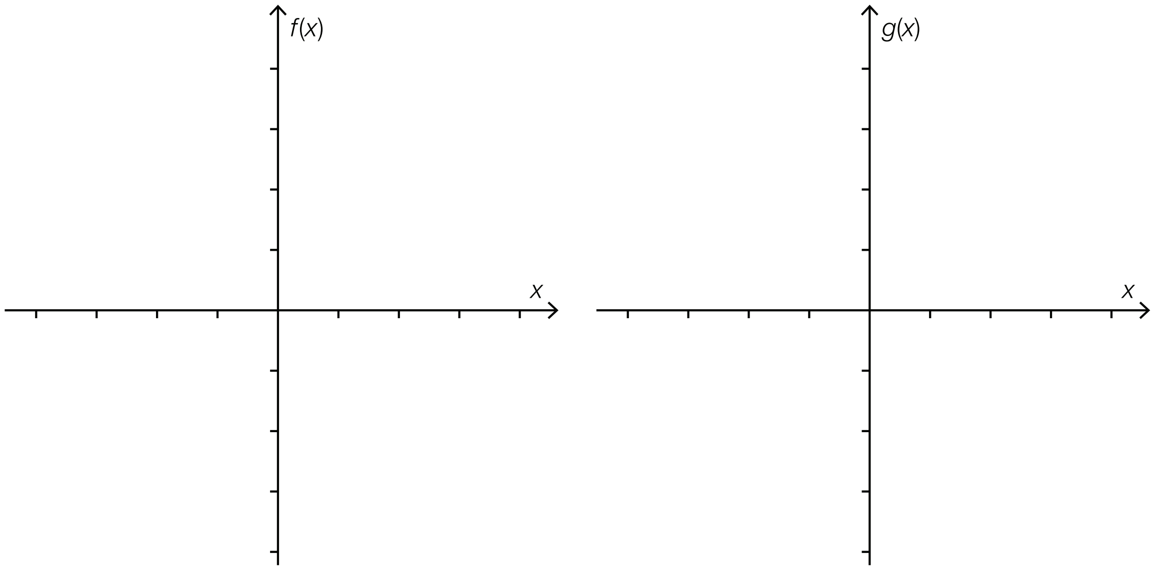
Polynomfunktionen

Für die Polynomfunktionen f und g gilt:

- f hat genau zwei Nullstellen, genau drei lokale Extremstellen und genau zwei Wendestellen.
- g hat genau eine Nullstelle, keine lokale Extremstelle und genau eine Wendestelle.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen jeweils einen möglichen Graphen der Funktionen f und g so, dass die genannten Eigenschaften ersichtlich sind, und markieren Sie alle Wendepunkte!



Leitfrage:

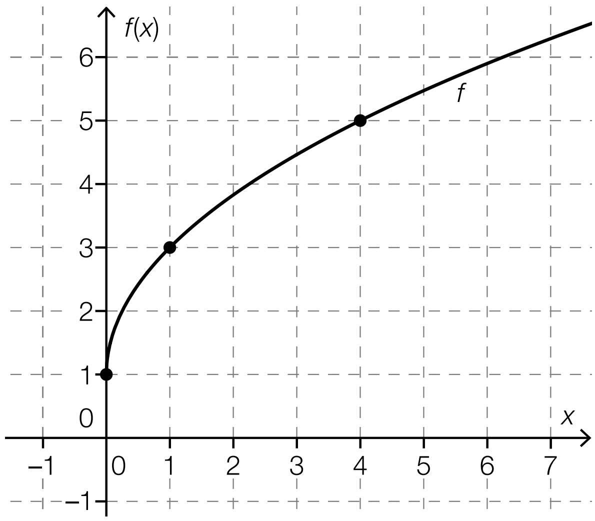
Geben Sie jeweils den kleinstmöglichen Grad n_f bzw. n_g der Polynomfunktionen f und g an, sodass die oben genannten Eigenschaften erfüllt sind, und begründen Sie Ihre Aussage!

Geben Sie an, ob die Funktion g auch vom Grad $n_g + 1$ sein kann, und begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 3

Zwei Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit $f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) und $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + d$ ($d \in \mathbb{R}$). Nachstehend ist der Graph von f abgebildet. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte der Parameter a und b an!

Leitfrage:

Es gibt eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Ermitteln Sie diese Stelle x_0!

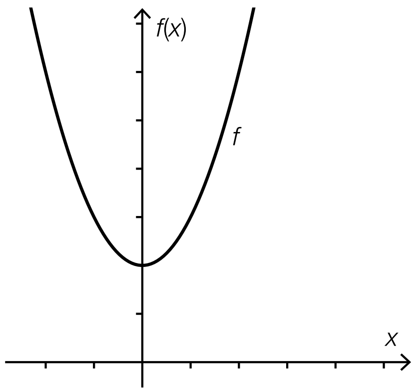
An dieser Stelle x_0 gilt weiters: $f(x_0) = g(x_0)$.
Geben Sie den Wert des Parameters d der Funktion g an und erläutern Sie, welche Aussage aufgrund der beiden für x_0 gegebenen Bedingungen über die Lagebeziehung zwischen den Graphen der Funktionen f und g getroffen werden kann!

Aufgabe 2

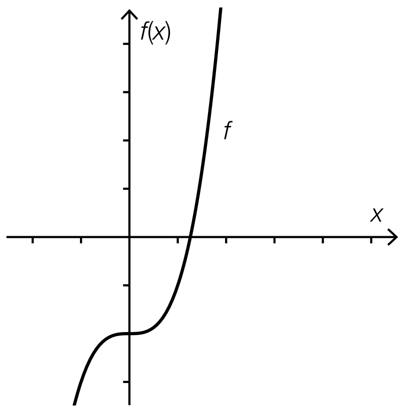
Funktionen

Gegeben sind drei Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $z \in \{1, 2, 3\}$.

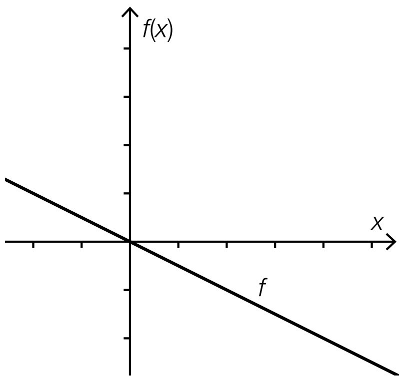
Graph 1:



Graph 2:



Graph 3:



Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede Funktion anhand des Graphen an, welchen Wert z hat und ob die Parameter a und b jeweils größer als null, kleiner als null oder gleich null sind!

Leitfrage:

Geben Sie für die Funktion, deren Darstellung der Graph 2 ist, eine Gleichung zur Berechnung der Nullstelle(n) in Abhängigkeit von den Parametern a und b an!

Geben Sie an, wie viele Nullstellen ein Graph dieses Funktionstyps hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Ermitteln Sie die Parameter a und b einer Funktion dieses Funktionstyps, deren Graph im Punkt $A = (1|-1)$ die Steigung 3 hat!

Aufgabe 2

Zentripetalkraft

Ein Körper mit der Masse $m > 0$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v > 0$ auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r > 0$. Der Betrag der Kraft F, die dabei auf den Körper wirkt, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

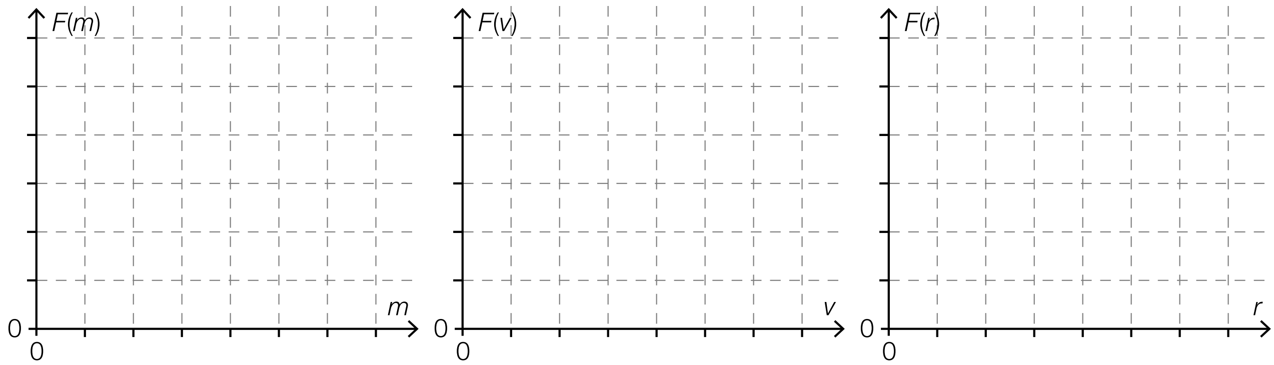
Aufgabenstellung:

Geben Sie jeweils an, wie sich die Verdoppelung einer der Größen m, v bzw. r auf den Betrag der Kraft F auswirkt, wenn die beiden anderen Größen konstant sind!

Leitfrage:

Stellen Sie mögliche Graphen der folgenden Funktionen jeweils in dem entsprechenden nachstehenden Koordinatensystem dar!

$F(m)$ mit v, r konstant $\quad$ $F(v)$ mit m, r konstant $\quad$ $F(r)$ mit v, m konstant



Geben Sie für jede der Funktionen an, wie z jeweils zu wählen ist, damit die Graphen Darstellungen von Funktionen der Art $f(x) = a \cdot x^z + b$ sind!