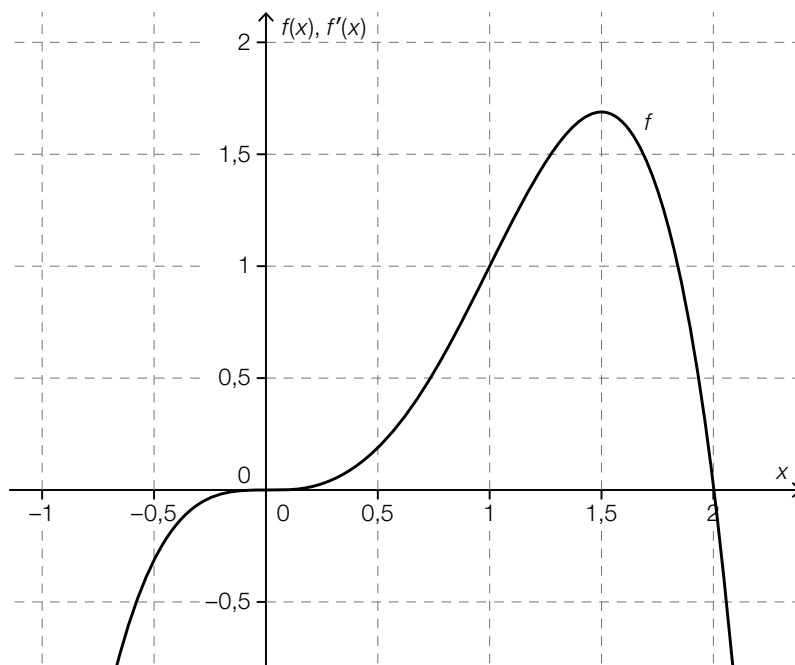


# Aufgabe 4

## Polynomfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion  $f$  dargestellt.



### Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$ ! Achten Sie dabei besonders darauf, die Nullstellen von  $f'$  korrekt einzuzichnen und das Monotonieverhalten von  $f'$  korrekt darzustellen!

### Leitfrage:

Begründen Sie, warum die Polynomfunktion  $f$  mindestens vom Grad 4 sein muss!

Eine Funktionsgleichung der Polynomfunktion  $f$  vom Grad 4 lautet allgemein:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ mit } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Begründen Sie, warum für die in der Abbildung dargestellte Polynomfunktion  $c = d = e = 0$  gilt!

# Aufgabe 4

## Funktionseigenschaften – Krümmung

Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion  $f$  mit  $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ ).

**Aufgabenstellung:**

Geben Sie an, in welchem Intervall der Graph der Funktion  $f$  mit den Parametern  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 0$  und  $d = 1$  linksgekrümmt ist! Erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

**Leitfrage:**

Ermitteln Sie die zweite Ableitung der allgemeinen Polynomfunktion  $f$  und lösen Sie dann die beiden folgenden Teilaufgaben!

Begründen Sie, warum die Krümmung des Graphen von  $f$  nicht von den Parametern  $c$  und  $d$  abhängt!

Begründen Sie, warum der Graph der Funktion  $f$  immer zwei verschiedene Krümmungsbereiche aufweist!

# Aufgabe 4

## Polynomfunktion vierten Grades

Für eine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion  $f$  vierten Grades mit  $f(x) = a \cdot x^4 + x^2 + c$  gilt:  $a > 0$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie für  $a = 1$  die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  an der Stelle  $x = 2$  und erklären Sie, warum die Angabe des Wertes  $c$  für die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht erforderlich ist!

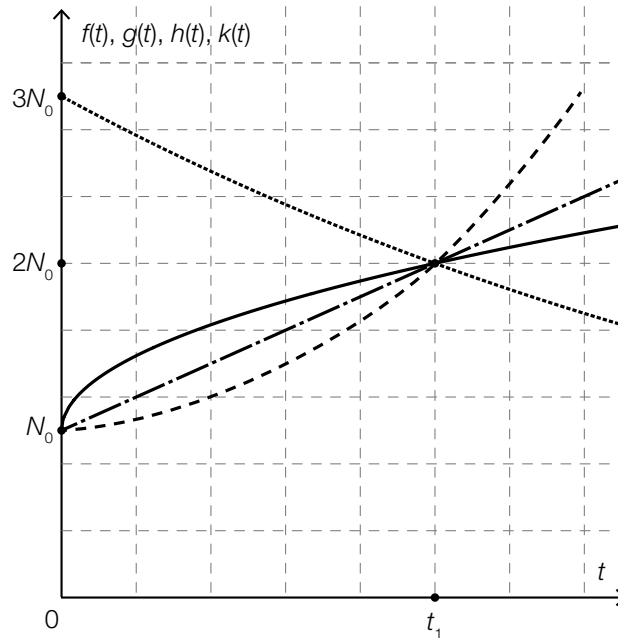
### Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung an, mit deren Hilfe man für alle  $a > 0$  die Wendestellen berechnen kann, und schließen Sie anhand dieser Gleichung auf die Anzahl der Wendestellen der Funktion  $f$ !

# Aufgabe 4

## Funktionsgraphen

Nachstehend sind die Graphen von vier Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  und  $k$  dargestellt.



### Aufgabenstellung:

Für die vier Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  und  $k$  gelten für alle  $t \in (0; t_1)$  folgende Aussagen:

- $f''(t) = 0$  und  $f'(t) > 0$
- $g''(t) > 0$  und  $g'(t) > 0$
- $h''(t) < 0$  und  $h'(t) > 0$
- $k''(t) > 0$  und  $k'(t) < 0$

Beschriften Sie in der obigen Abbildung die Graphen korrekt mit  $f$ ,  $g$ ,  $h$  und  $k$  und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

### Leitfrage:

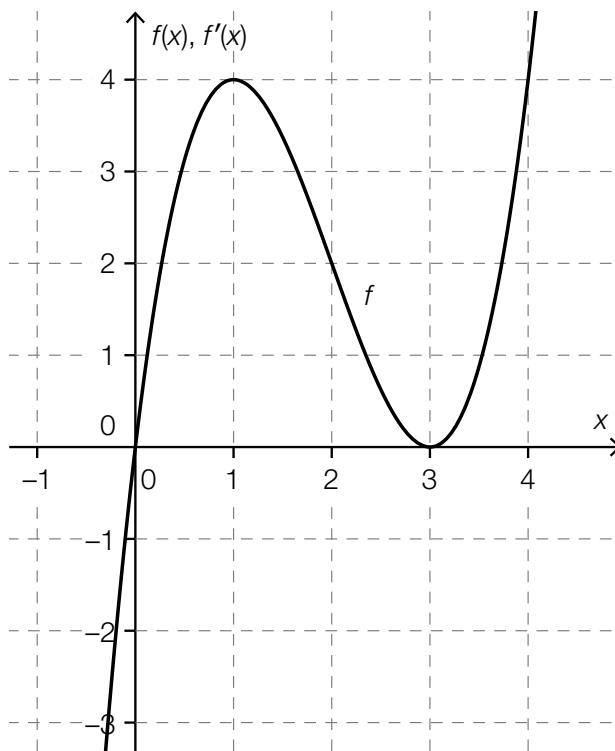
Ermitteln Sie unter Verwendung von  $N_0$  und  $t_1$  die Funktionsgleichung der Funktion  $f$  in Abhängigkeit von  $t$  und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Geben Sie an, ob für die Funktion  $f$  die Aussage „Die Verdoppelungszeit ist konstant“ richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

# Aufgabe 3

## Ableitungsfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion  $f$  dritten Grades dargestellt.



### Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  im gegebenen Koordinatensystem und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

### Leitfrage:

Die abgebildete Polynomfunktion  $f$  ist die Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion  $F$ .

Nachstehend sind fünf Aussagen über die Polynomfunktion  $F$  angeführt.

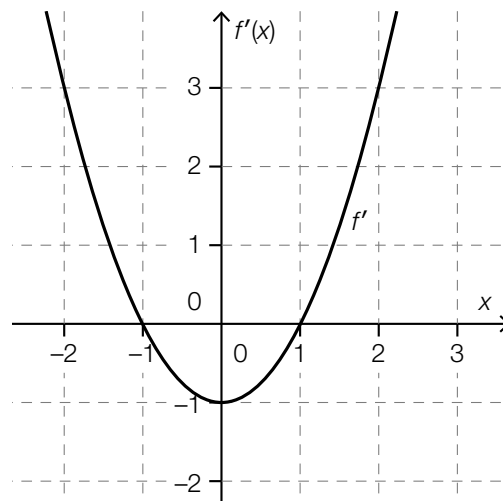
- Aussage 1: Die Funktion  $F$  ist eine Polynomfunktion vom Grad 3.
- Aussage 2: Die Funktion  $F$  ist für positive  $x$ -Werte (streng) monoton steigend.
- Aussage 3: Die Funktion  $F$  hat an der Stelle  $x = 0$  eine Minimumstelle.
- Aussage 4: Die Funktion  $F$  hat an der Stelle  $x = 3$  eine Wendestelle.
- Aussage 5: Die Funktion  $F$  ist für alle  $x > 3$  rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

# Aufgabe 3

## Ableitungsfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion  $f'$  zweiten Grades. Die Funktion  $f'$  ist die Ableitungsfunktion einer Funktion  $f$ .



### Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion  $f$  und erläutern Sie das Krümmungsverhalten von  $f$ !

### Leitfrage:

Die erste Ableitungsfunktion  $f'$  einer Polynomfunktion  $f$  ist durch die Gleichung  $f'(x) = x^2 + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  gegeben.

Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Anzahl der (lokalen) Extremstellen der Polynomfunktion  $f$  vom Wert des Parameters  $c$  und begründen Sie Ihre Aussagen!

# Aufgabe 3

## Graph einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion  $f$  erfüllt die nachstehend angeführten Bedingungen.

$$f'(-2) < 0$$

$$f'(2) > 0$$

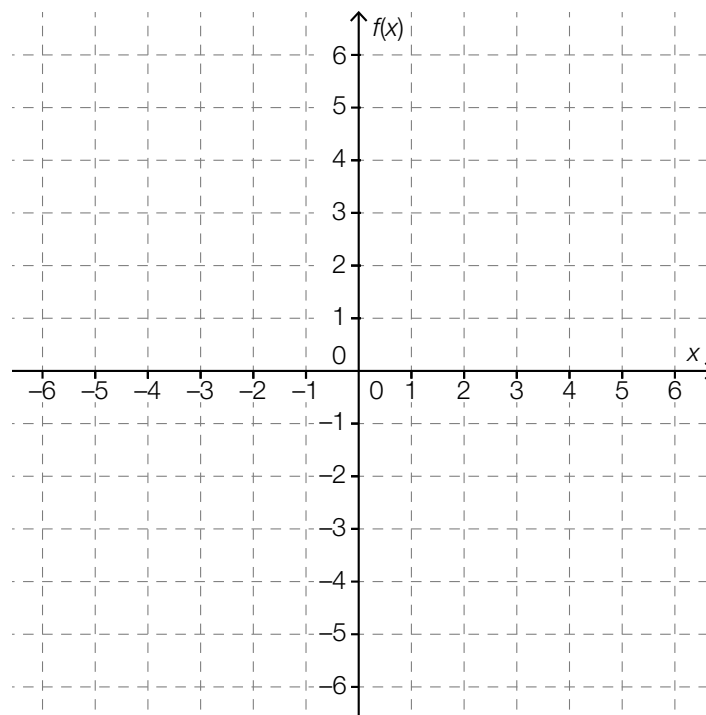
$$f''(2) = 0$$

$$f(4) = 4$$

$$f'(4) = 0$$

### Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen einer solchen Funktion  $f$  mit kleinstmöglichem Grad!



### Leitfrage:

Eine Funktion  $g$  soll – zusätzlich zu den für  $f$  gegebenen Bedingungen – auch  $g''(4) = 0$  erfüllen.

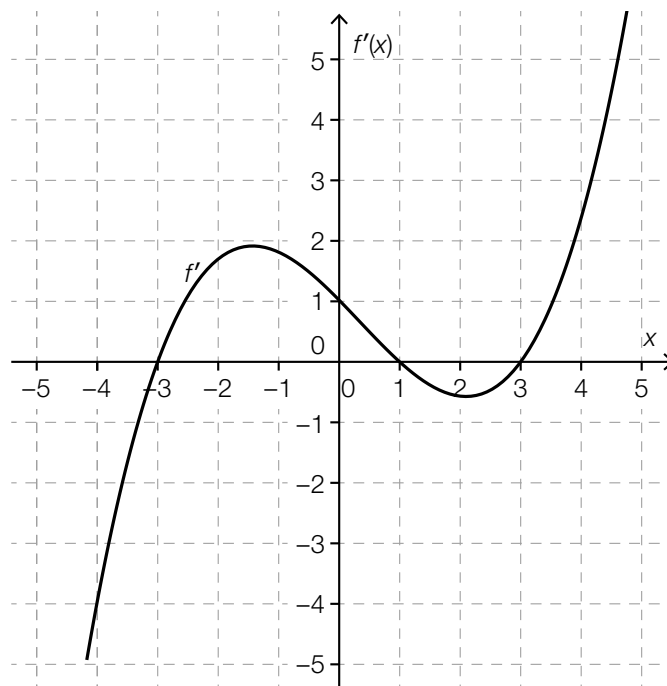
Begründen Sie, warum der Grad von  $g$  mindestens um 1 höher als der Grad von  $f$  sein muss!

Erläutern Sie, wie sich das Monotonieverhalten der Funktion  $g$  von jenem der Funktion  $f$  unterscheidet, wenn der Grad von  $g$  um genau 1 höher als jener von  $f$  ist!

# Aufgabe 4

## Funktionseigenschaften

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  einer Polynomfunktion  $f$  vierten Grades.



### Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der drei nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Die Funktion  $f$  hat im Intervall  $(-4; 4)$  genau zwei lokale Extremstellen.

Aussage 2: Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $(0; 2)$  streng monoton fallend.

Aussage 3: Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $(-1; 1)$  rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

### Leitfrage:

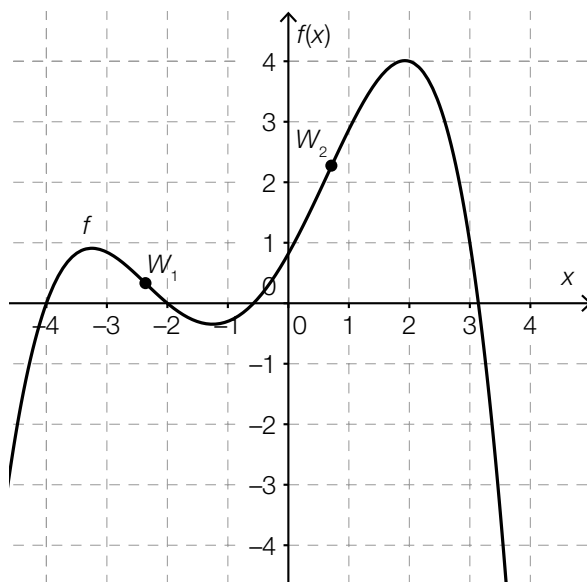
Skizzieren Sie in der gegebenen Abbildung einen möglichen Graphen von  $f$  und erklären Sie den Zusammenhang zwischen den Verläufen der Graphen von  $f'$  und  $f$ !



# Aufgabe 4

## Ableitungs- und Stammfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion  $f$  vierten Grades mit den Wendepunkten  $W_1$  und  $W_2$ .



### Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Für alle  $x \in [-1; 1]$  gilt:  $f'(x) > 0$ .

Aussage 2: Es gibt ein  $x \in [0; 1]$  mit  $f'(x) = 0$ .

Aussage 3: Für alle  $x \in [-4; -2]$  gilt:  $f''(x) < 0$ .

Aussage 4: Es gibt ein  $x \in [1; 3]$  mit  $f''(x) = 0$ .

### Leitfrage:

Geben Sie an, in welchen Teilintervallen von  $[-4; 3]$  eine Stammfunktion von  $f$  streng monoton steigend ist, und erläutern Sie Ihre Antwort!