Aufgabe 4

Bremsweg

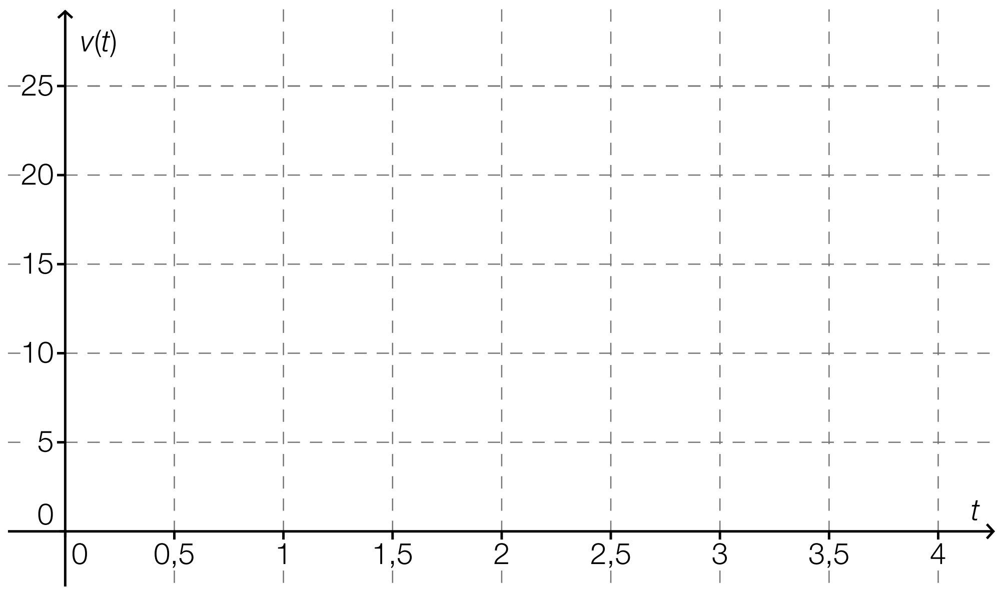
Ein PKW beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichmäßig zu bremsen.
Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit $v(t)$ des PKW zum Zeitpunkt t ($v(t)$ in Metern pro Sekunde, t in Sekunden).
Es gilt: $v(t) = 20 - 8t$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den der PKW während des gleichmäßigen Bremsvorgangs bis zum Stillstand zurücklegt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Stellen Sie den Graphen der Funktion v und die Länge des berechneten Bremsweges im nachstehenden Koordinatensystem grafisch dar!



Erklären Sie, wie sich der Graph von v und die Länge des Bremsweges verändern, wenn

- die Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs höher ist und die Geschwindigkeitsänderung bei diesem gleichmäßigen Bremsvorgang gleich bleibt,
- die Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs gleich ist und die Geschwindigkeitsänderung bei diesem gleichmäßigen Bremsvorgang geringer ist!

Aufgabe 3

Senkrechter Wurf

Ein Körper wird aus einer Anfangshöhe h_0 mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Die durch die Erdanziehungskraft verursachte Beschleunigung wird mit g bezeichnet.
Die Wurfhöhe des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt t kann in diesem Fall durch eine Polynomfunktion h mit $h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ näherungsweise beschrieben werden. Dabei wird t in Sekunden und $h(t)$ in Metern angegeben.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die nachstehenden Ausdrücke im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

a) $\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (t_2 > t_1)$

b) $h'(t_2)$

c) $h''(t_2)$

Leitfrage:

Geben Sie an, unter welcher Voraussetzung $h'(t_2) \approx \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$ für $t_2 > t_1$ gilt!

Die Gleichung $h'(t) = 0$ hat die Lösung t^*. Geben Sie diese Lösung in Abhängigkeit von den Parametern der Funktion h an!

Deuten Sie die Lösung t^* und den Ausdruck $h(t^*)$ im gegebenen Zusammenhang!

Aufgabe 3

Zeit – Geschwindigkeit

Der Geschwindigkeitsverlauf eines PKW kann im Beobachtungszeitraum [0 s; 5 s] annähernd durch eine quadratische Funktion v mit $v(t) = b \cdot t^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ modelliert werden. Dabei wird t in Sekunden (s) und $v(t)$ in Metern pro Sekunde (m/s) angegeben.

Aufgabenstellung:

Zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt die Geschwindigkeit 13,6 m/s und zum Zeitpunkt $t = 5$ beträgt die Geschwindigkeit 20 m/s.

Ermitteln Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v für diesen Beobachtungszeitraum und deuten Sie den Wert des Parameters c im gegebenen Kontext!

$v(t) =$ ____

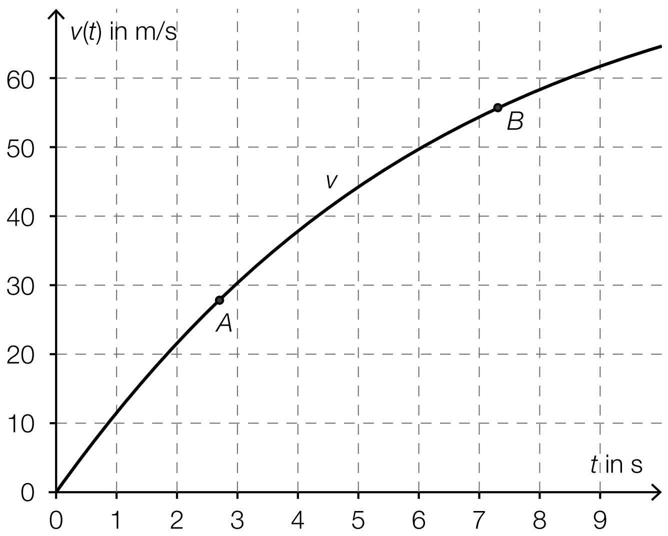
Leitfrage:

Bestimmen Sie die Länge des Wegstücks s, das der PKW (in diesem Beobachtungszeitraum) bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von $v = 15$ m/s zurücklegt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 3

Beschleunigungsvorgang

Im nachstehenden Diagramm ist die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) eines Rennautos während der Beschleunigungsphase in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) dargestellt. Weiters sind zwei Punkte $A = (2{,}7|27{,}78)$ und $B = (7{,}3|55{,}56)$ markiert.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Wert der Steigung derjenigen Sekante s, die durch die Punkte A und B verläuft, und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ermitteln Sie grafisch denjenigen Punkt T, in dem die Tangente dieselbe Steigung wie die Sekante s durch die Punkte A und B hat, und geben Sie die Koordinaten von T an!

Deuten Sie beide Koordinaten von T und den Wert der Steigung im gegebenen Kontext!

Aufgabe 3

Bewegungsvorgang

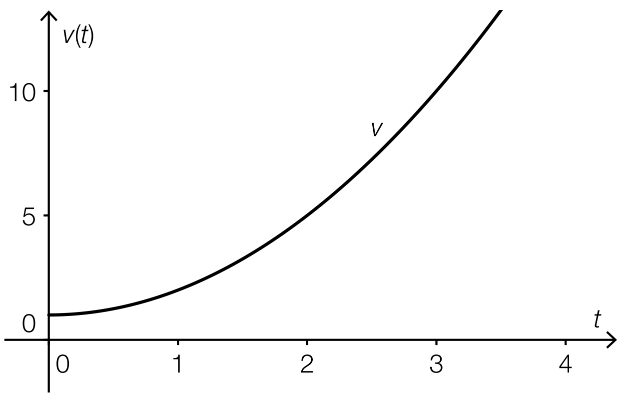
Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t wird durch eine Funktion v beschrieben ($v(t)$ in m/s, t in s).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Terme $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$ im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion v.
Erklären Sie anhand der Abbildung die geometrische Bedeutung von $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$!



Geben Sie an, wie anhand der Abbildung derjenige Zeitpunkt t_1 aus dem Intervall [0; 3] ermittelt werden kann, zu dem gilt:

$$v'(t_1) = \frac{v(2) - v(0)}{2}$$

Aufgabe 3

Lotrechter Wurf

Ein Objekt wird lotrecht nach oben geworfen. Die Funktion s beschreibt dabei die Höhe des Objekts über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t.

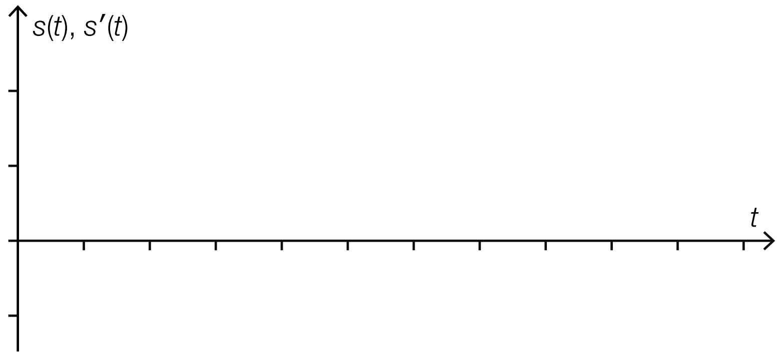
$s(t) = a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2$ mit $a, b > 0$ und $t \in \left[0; \frac{2a}{b}\right]$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion s'' und geben Sie an, was durch die Funktion s'' im gegebenen Kontext beschrieben wird!

Leitfrage:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem mögliche Graphen von s und s'! Achten Sie auf die Zusammenhänge zwischen den Funktionsgraphen!



Geben Sie die Nullstelle(n) der Funktion s' in Abhängigkeit von a und b an und deuten Sie die Nullstelle(n) im gegebenen Kontext!

Aufgabe 3

Änderungsmaße

Wird ein bestimmter Körper senkrecht nach oben geworfen, so kann die Höhe des Körpers über dem Boden näherungsweise durch eine Funktion h mit der Gleichung $h(t) = -5 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 2$ beschrieben werden. Dabei ist $h(t)$ die Höhe des Körpers über dem Boden in Metern (m) und t die Zeit in Sekunden (s), die nach dem Wurf vergangen ist.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die absolute und die relative (prozentuelle) Änderung der Funktion h im Zeitintervall [0 s; 2 s] und deuten Sie die Ergebnisse im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion h im Zeitintervall [0 s; 2 s] und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem die momentane Änderungsrate der Funktion h gleich der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall [0 s; 2 s] ist, und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Aufgabe 4

Zurückgelegter Weg

Ein Fahrzeug wird im Zeitintervall [0; 10] aus dem Stand gleichmäßig beschleunigt. Dabei beschreibt $v(t)$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs (in m/s) zum Zeitpunkt t (in s).

Aufgabenstellung:

Mit welchem der nachstehenden Terme kann die Länge des im Zeitintervall [0; 10] zurückgelegten Weges näherungsweise berechnet werden? Geben Sie denjenigen Term an, der am besten geeignet ist, und begründen Sie, warum die anderen beiden Terme nicht geeignet sind.

a) $v(0) \cdot 10$

b) $[v(0) + v(2) + v(4) + v(6) + v(8)] \cdot 2$

c) $[v(0) + v(1) + v(2) + ... + v(8) + v(9)] \cdot 10$

Leitfrage:

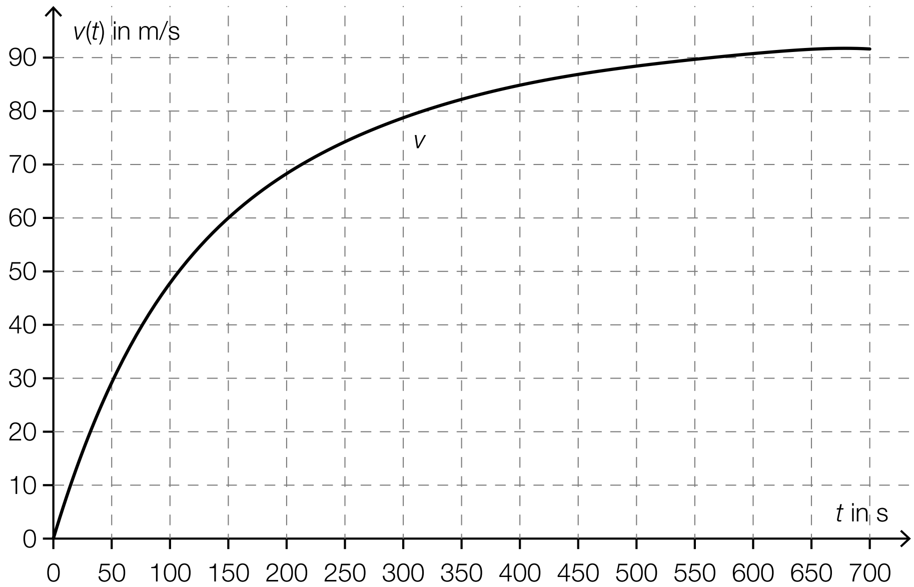
Geben Sie an, ob der im Zeitintervall [0; 10] vom Fahrzeug tatsächlich zurückgelegte Weg kleiner oder größer als der am besten geeignete Näherungswert aus der Aufgabenstellung ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, mit der der Näherungswert für den zurückgelegten Weg verbessert werden kann, und geben Sie einen Ausdruck unter Verwendung von $v(t)$ zur Berechnung des exakten Wertes an!

Aufgabe 4

ICE

In der nachstehenden Abbildung ist der Beschleunigungsvorgang eines Hochgeschwindigkeitszuges ICE (Intercity-Express) dargestellt. Dabei ist die Geschwindigkeit v in Metern pro Sekunde (m/s) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) dargestellt. Der Beschleunigungsvorgang dauert 700 s, die erreichte Endgeschwindigkeit beträgt 92 m/s.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit während des Beschleunigungsvorgangs und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

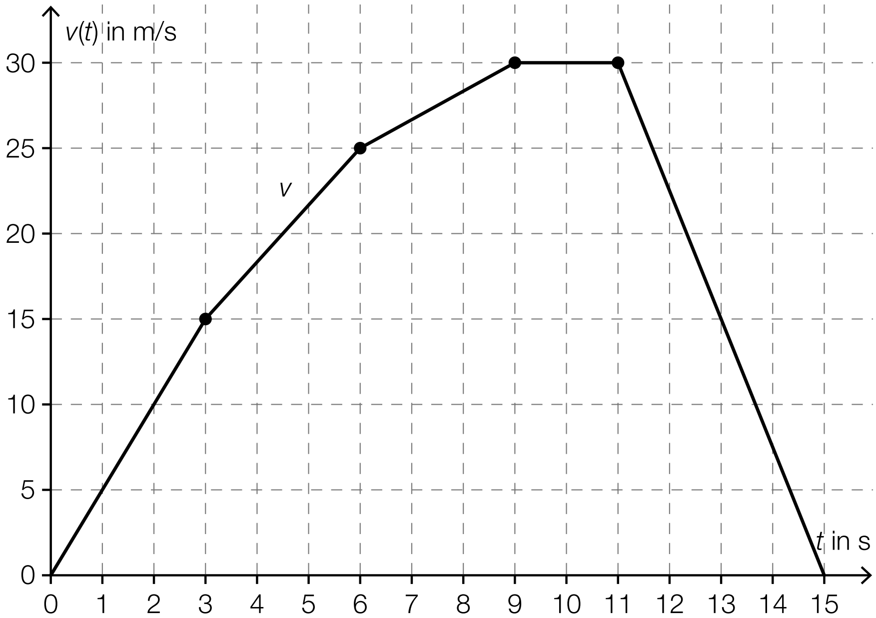
Geben Sie mithilfe eines bestimmten Integrals einen Ausdruck an, um die während der ersten 500 Sekunden des Beschleunigungsvorgangs zurückgelegte Weglänge (in Metern) berechnen zu können!

Veranschaulichen Sie diese Weglänge in der obigen Abbildung und geben Sie einen Näherungswert für diese Weglänge an! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 4

Autofahrt

Ein Auto fährt entlang eines geraden Streckenabschnitts. Im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm ist die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) des Autos in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) dargestellt. Dabei ist die Dauer der Fahrt in fünf Zeitintervalle unterteilt, in denen die Geschwindigkeitsfunktion jeweils linear modelliert wird. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Beschleunigung a_1 des Autos im zweiten Zeitintervall samt der Maßeinheit an!

Leitfrage:

Zum Zeitpunkt t_1 hat das Auto eine Strecke von 100 m zurückgelegt. Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, in welchem der fünf Zeitintervalle der Zeitpunkt t_1 liegt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung dieses Zeitpunkts t_1 an und ermitteln Sie den Wert von t_1!

Aufgabe 4

Zugfahrt

Ein Zug startet seine Fahrt von einer Station, fährt ohne Zwischenstopp zur nächsten Station und hält dort an.

In diesem Zeitintervall kann seine Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v mit
$v(t) = -0{,}15 \cdot t^2 + 0{,}90 \cdot t$ modelliert werden. Dabei wird t in Minuten und $v(t)$ in km/min angegeben.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem die Geschwindigkeit des Zuges maximal ist, und geben Sie diese maximale Geschwindigkeit v_{max} an!

t_0 = ______________________ min

v_{max} = ______________________ km/min

Leitfrage:

Ermitteln Sie die Fahrtdauer des Zuges für die Fahrt zwischen den beiden Stationen!

Beschreiben Sie die Entfernung s zwischen den beiden Stationen mithilfe eines bestimmten Integrals und ermitteln Sie diese Entfernung!

Geben Sie denjenigen Zeitpunkt $\overline{t}$ an, zu dem 80 % der Wegstrecke zurückgelegt sind!

Aufgabe 3

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm

Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit eines fahrenden Autos auf einem geradlinigen Straßenabschnitt in den ersten 16 Sekunden nach dem Start.
In Abbildung 1 ist der Graph von v dargestellt. In Abbildung 2 ist der Graph derjenigen Funktion v_m dargestellt, die diese Geschwindigkeit in vier getrennten Abschnitten linear modelliert.

Abbildung 1

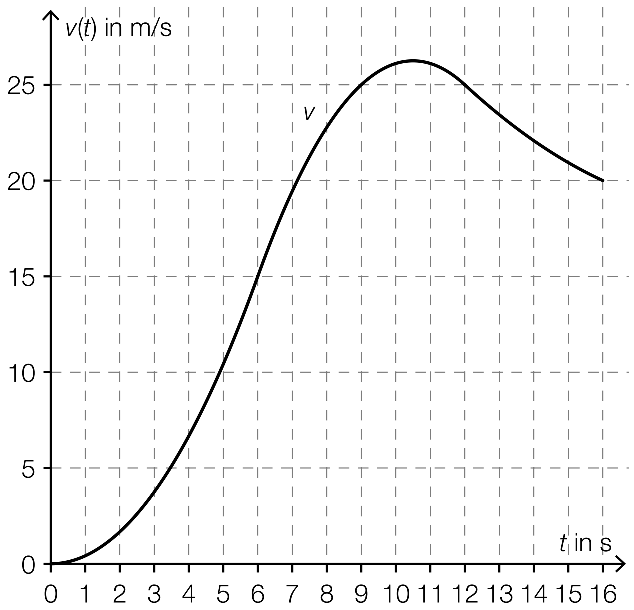
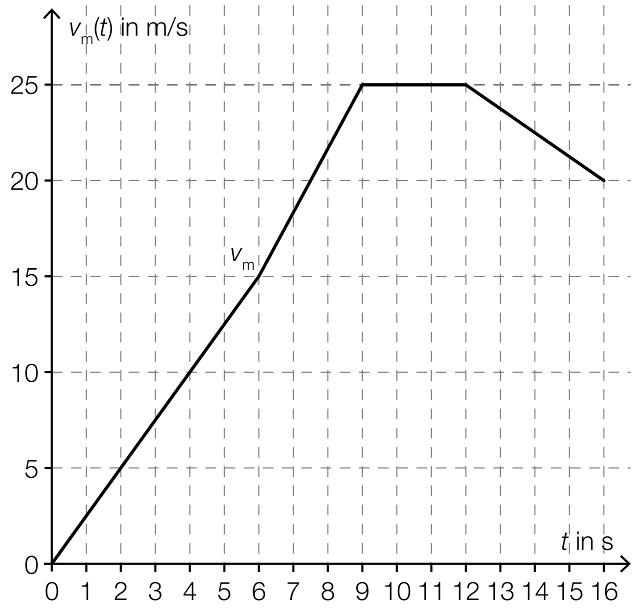


Abbildung 2



Aufgabenstellung:

Geben Sie mithilfe der Funktion v einen Ausdruck zur Berechnung desjenigen Weges s an, den das Auto in den ersten 16 Sekunden nach dem Start zurückgelegt hat!

Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe des Graphen von v, wie groß die mittlere Beschleunigung des Autos im Zeitintervall [6; 9] ist!

Leitfrage:

Die Lösungen der Gleichung $v(t) = v_m(t)$ mit $t \in [0; 16]$ werden der Größe nach geordnet und in der Folge als „Stützstellen" bezeichnet.

Ermitteln Sie den zwischen der 4. und 5. Stützstelle zurückgelegten Weg mithilfe von v_m!
Geben Sie an, ob der tatsächlich zurückgelegte Weg über- oder unterschritten wird, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 4

Lotrechter Wurf

Die Flughöhe eines Körpers, der zum Zeitpunkt $t = 0$ nach oben geschossen wird, lässt sich mithilfe einer Funktion h beschreiben. Es gilt: $h(t) = 50 + 60 \cdot t - 5 \cdot t^2$ ($h(t)$ in Metern, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von h und geben Sie die Bedeutung dieser Funktion für die Bewegung des Körpers unter Verwendung der richtigen Maßeinheit an!

Ermitteln Sie den Extrempunkt $E = (t_1 | h(t_1))$ der Funktion h und deuten Sie die beiden Koordinaten t_1 und $h(t_1)$ im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion h im Zeitintervall $[0; t_1]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens eine Stelle $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt.

Interpretieren Sie diese Aussage für die Funktion h im gegebenen Kontext für das Zeitintervall $[0; t_1]$!

Bestimmen Sie für die Funktion h die im Mittelwertsatz beschriebene Stelle t_0 für das Zeitintervall $[0; t_1]$!