

Abstandsmessung*

Aufgabennummer: 2_035

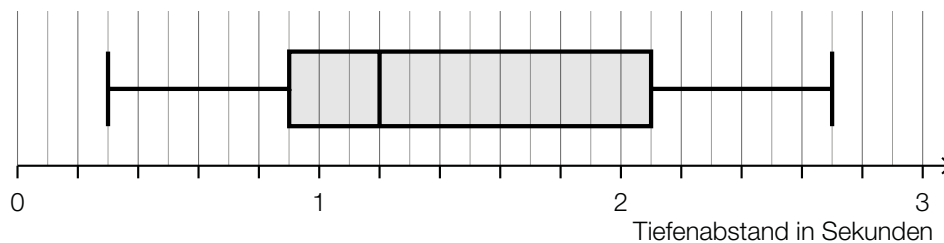
Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 1.7, FA 2.1, WS 1.1, WS 1.3, WS 1.4, WS 3.2

Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff *Abstand* eine Streckenlänge und der Begriff *Tiefenabstand* eine Zeitspanne.

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deuten Sie den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Geben Sie an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Geben Sie einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl!

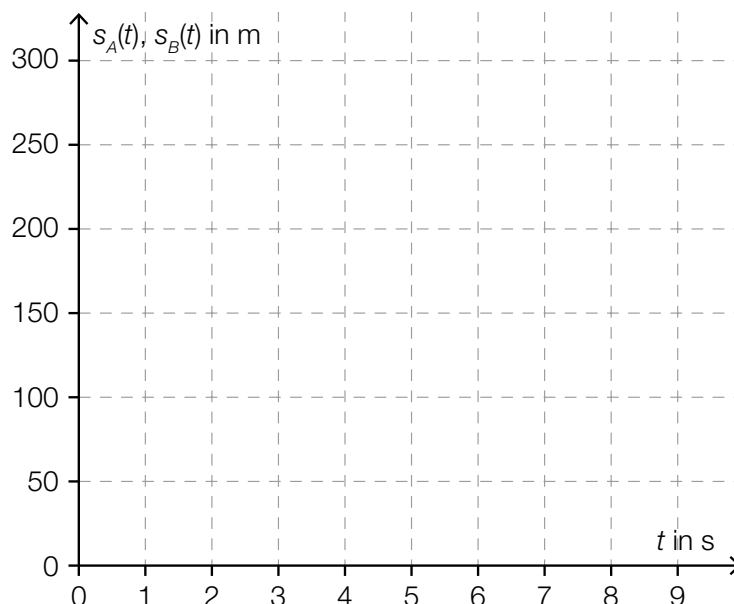
Nehmen Sie den von Ihnen ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird.

Geben Sie an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

- c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug A fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stellen Sie den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und geben Sie an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug B legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizzieren Sie ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



Lösungserwartung

a) $q_1 = 0,9$

$q_3 = 2,1$

Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

$130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s}$

$36,1 \text{ m/s} \cdot 0,9 \text{ s} = 32,5 \text{ m} \Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

b) ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:

Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:

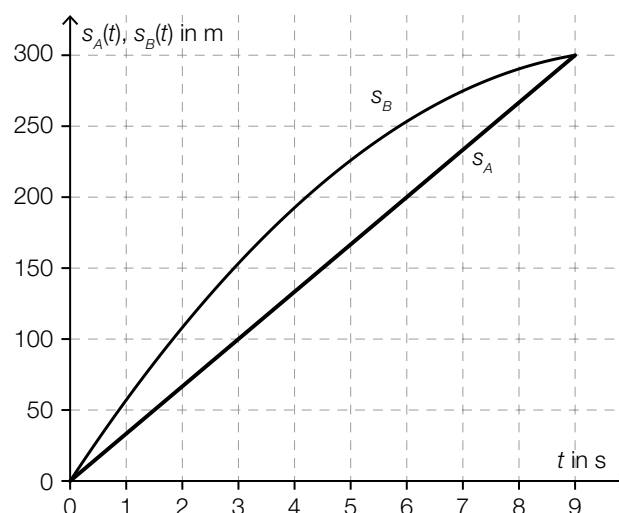
Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahler/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0,25$... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde

$n = 10$... Anzahl der ausgewählten Messungen

$P(X \geq 6) \approx 0,0197$

c) Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
– Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b) – Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin/vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A .
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B .

Hopfen*

Aufgabennummer: 2_034

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.2, AN 3.2, AN 3.3, FA 1.5, FA 1.7, FA 2.2

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0,46$ ermittelt.

Aufgabenstellung:

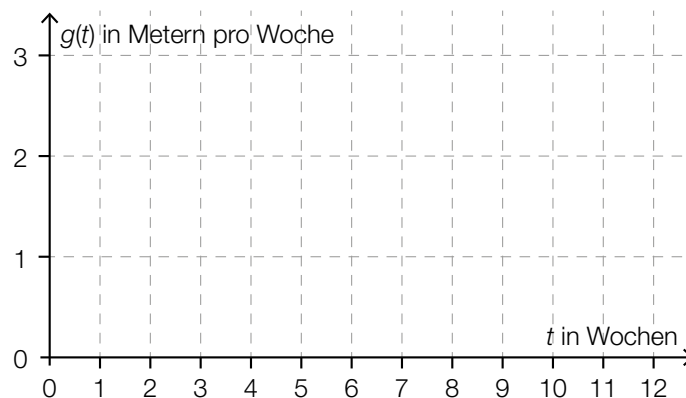
- a) Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

- b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2 , zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g , die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



- c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1 , deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$$h_1(t) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1 , warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1 !

- d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{\max} bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{\max} hat, und geben Sie h_{\max} an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d. h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{\max} annähert. Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

Lösungserwartung

a) möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$$h(10) - h(0) \approx 6,45$$

Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.

Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall $[0; 10]$ ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

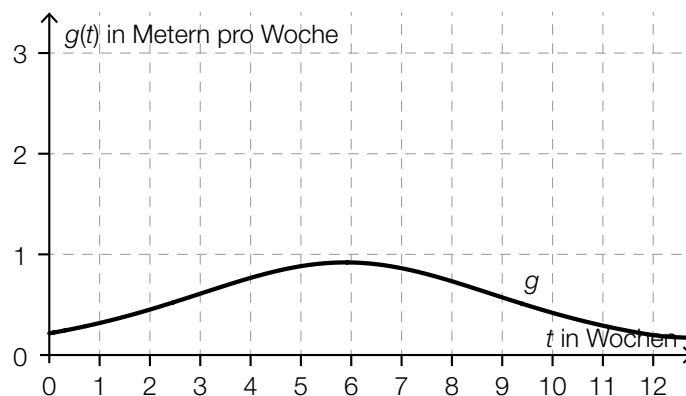
b) Mögliche Gleichung:

$$h''(t) = 0 \Rightarrow t_2$$

$$t_2 \approx 5,9 \text{ Wochen}$$

$$h'(t_2) \approx 0,92$$

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



c) Mögliche Funktionsgleichung von h_1 :

$$h_1(t) = 0,58\dot{3} \cdot t + 0,6$$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1 , dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

d) Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{k \cdot t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{\max} unabhängig von k .

$$h_{\max} = a$$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.
Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]
- b) – Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche“ nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g .
Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]
- c) – Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung.
Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k .

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_033

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.3, AN 1.3, AN 4.2, AN 4.3, FA 4.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind.

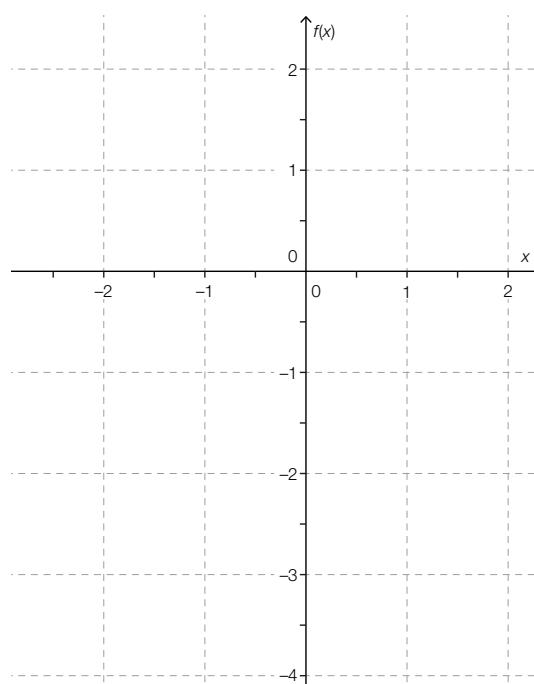
Aufgabenstellung:

- a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b . Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

- b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x) dx = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x) dx = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

a) Mögliche Begründung:

$$\text{Berechnung der Nullstellen: } a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$$

Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

$$\text{Berechnung weiterer Nullstellen: } a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.

Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$$

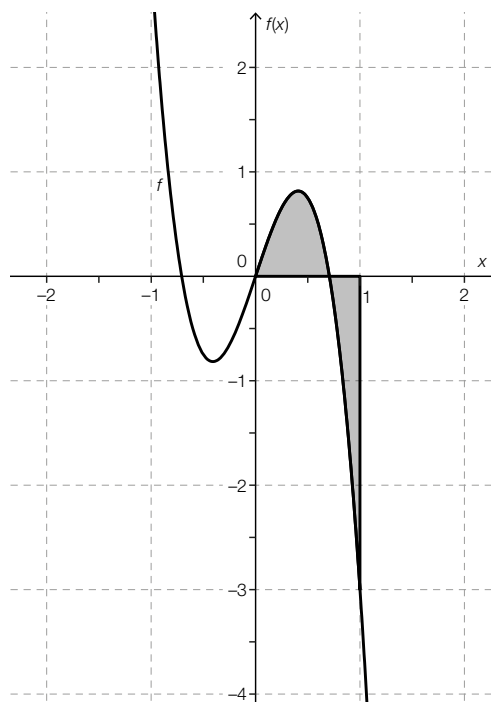
b) Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x) dx = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x -Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x -Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x -Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f :



Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b) – Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b .
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f . Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Bitcoin*

Aufgabennummer: 2_036

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, WS 1.1, WS 4.1

Bitcoin (Währungskürzel: BTC) ist eine digitale Kunstwährung. Der Marktwert des Bitcoin ergibt sich aufgrund von Angebot und Nachfrage.

Nutzer/innen des Bitcoin werden in dieser Aufgabe als Bitcoin-User bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bitcoin-Euro-Kurs vom 11. März 2015 bis zum 11. März 2016. Die linke Skala zeigt dabei den absoluten Wert eines Bitcoins in Euro, die rechte Skala zeigt die Veränderung in Prozent bezogen auf den 11. März 2015.

Bitcoin-Euro-Kurs (BTC – EUR)



Datenquelle: <http://www.finanzen.net/devisen/bitcoin-euro-kurs> [11.03.2017] (adaptiert).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie an, in welchem der Monate von April 2015 bis Dezember 2015 der Bitcoin-Euro-Kurs jeweils vom Monatsanfang bis zum Monatsende absolut am stärksten gefallen ist, und geben Sie diesen Kursverlust in Euro an!

Monat: _____

Kursverlust: _____

Es sei K_1 der Bitcoin-Euro-Kurs zum Beginn des betreffenden Monats, K_2 der Bitcoin-Euro-Kurs am Ende des betreffenden Monats sowie AT die Anzahl der Tage des betreffenden Monats.

Berechnen Sie den ungefähren Wert des Ausdrucks $\frac{K_2 - K_1}{AT}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

- b) Anfang Jänner 2016 waren ca. 15 Millionen Bitcoins im Umlauf. Die t Jahre nach dem Jahr 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins ist annähernd $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0,18 \cdot t}$. Damit ist $f(0)$ die zu Anfang Jänner 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins.

Bestimmen und interpretieren Sie die relative (prozentuelle) Änderung der im Umlauf befindlichen Menge an Bitcoins im Zeitintervall $[7; 8]$!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der derjenige Zeitpunkt berechnet werden kann, ab dem nur mehr eine Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

- c) Eine Untersuchung der Demografie von Bitcoin-Usern hat ergeben, dass weltweit 88 % der Bitcoin-User männlich sind. Es soll festgestellt werden, wie hoch dieser Prozentsatz in Österreich ist. Dazu wird eine große Anzahl an Personen befragt. Diese Befragung ergibt, dass 171 der befragten Personen Bitcoin-User sind, und von diesen 171 Personen sind 138 männlich.

Geben Sie aufgrund dieser Daten ein symmetrisches 95%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Anteil der männlichen Bitcoin-User unter allen Bitcoin-Usern in Österreich an!

Geben Sie an, welches Konfidenzniveau zur Berechnung eines solchen Intervalls mindestens angenommen werden muss, damit der weltweit ermittelte Anteil von 88 % in diesem Intervall enthalten ist!

Lösungserwartung

a) Monat: August

Kursverlust: $\approx \text{€ } 55$

$$\frac{K_2 - K_1}{AT} \approx -1,8$$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca. $\text{€ } -1,8$.

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca. $\text{€ } 1,8$.

b) $\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0,065$

Mögliche Interpretation:

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:

$$f(t) = 20 \cdot 10^6$$

Lösung der Gleichung: $t \approx 17$

Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

c) $n = 171$ $h \approx 0,807$

$$0,807 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,807 \cdot (1 - 0,807)}{171}} \approx 0,807 \pm 0,059 \Rightarrow [0,748; 0,866]$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$0,880 - \frac{138}{171} \approx 0,073$$

$$0,073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0,807 \cdot (1 - 0,807)}{171}} \Rightarrow z \geq 2,418$$

$$2 \cdot \Phi(2,418) - 1 \approx 0,984$$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe des richtigen Monats sowie des korrekten Wertes für den Kursverlust. Toleranzintervall: [€ 50; € 70]
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
Toleranzintervall: [-2,3; -1,5] bzw. [1,5; 2,3]
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
Toleranzintervall: [0,06; 0,07] bzw. [6 %; 7 %]
– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall [16; 17] bzw. [2025; 2026]
- c) – Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,74; 0,75]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,86; 0,87]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,98; 0,99] bzw. [98 %; 99 %]

Vornamen in Österreich*

Aufgabennummer: 2_047

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.3, AG 2.5, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.4

Seit Jahrzehnten erhebt die Statistik Austria, das statistische Amt der Republik Österreich, die Vornamen, die Eltern ihren Kindern geben. Dabei betrachtet das Amt nur den ersten Vornamen (falls ein Kind mehrere Vornamen hat). Außerdem werden gewisse gleichlautende oder von der gleichen Herkunft stammende Vornamen wie etwa *Sophie*, *Sofie* und *Sofia* zu einem Vornamen zusammengefasst.

Seit vielen Jahren zählen *Anna* und *Lukas* zu den beliebtesten Vornamen. Von den im Jahr 2015 geborenen Kindern (40777 Mädchen, 43604 Buben) erhielten 2144 Mädchen den Vornamen *Anna* und 1511 Buben den Vornamen *Lukas*.

Aufgabenstellung:

- a) Für eine statistische Erhebung werden 30 Mädchen und 30 Buben aus dem Geburtsjahrgang 2015 nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens ein Mädchen Anna heißt!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens ein Mädchen Anna und mindestens ein Bub Lukas heißt!

- b) Im Jahr 1995 betrug der relative Anteil der zehn beliebtesten Vornamen für Buben 37,07 %. Im Jahr 2005 lag er bei 24,28 %. Im Jahr 2015 betrug er 20,91 %.

Diese Entwicklung des relativen Anteils der zehn beliebtesten Vornamen für Buben wird mit einer quadratischen Funktion f modelliert mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Dabei gibt t die Anzahl der Jahre ab 1995 an, es gilt also $f(0) = 0,3707$.

Bestimmen Sie die Werte von a , b und c und geben Sie eine Funktionsgleichung von f an!

In welchem Jahr unterschreitet der relative Anteil der zehn beliebtesten Vornamen für Buben in diesem Modell zum ersten Mal ein Drittel?

Geben Sie die entsprechende Jahreszahl an!

- c) Die Zufallsvariable X modelliert die Anzahl der im Jahr 2015 in Oberösterreich geborenen Mädchen, die den Vornamen *Anna* erhielten. Diese wird binomialverteilt mit den Parametern $n = 7041$ und $p = 0,0526$ angenommen.

Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ dieser Zufallsvariablen X !

$$\mu \approx \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\sigma \approx \underline{\hspace{10cm}}$$

Tatsächlich wurde für Mädchen der Vorname *Anna* im Jahr 2015 in allen neun Bundesländern am häufigsten gewählt, wobei der prozentuelle Anteil in Oberösterreich am größten war. In Oberösterreich wurden 7041 Mädchen im Jahr 2015 geboren. Davon erhielten 494 den Vornamen *Anna*.

Es gilt $494 - \mu = c \cdot \sigma$ für ein $c \in \mathbb{R}^+$.

Berechnen Sie c und deuten Sie den Wert von c im gegebenen Kontext!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X ... Anzahl der Mädchen mit dem Vornamen *Anna*

Aufgrund der großen Grundgesamtheit kann die Zufallsvariable X als binomialverteilt angenähert werden.

$$n = 30$$

$$p = \frac{2144}{40777} \approx 0,0526$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{2144}{40777}\right)^{30} \approx 0,80217$$

(Ergebnis bei Verwendung der hypergeometrischen Verteilung: $\approx 0,80229$)

mögliche Vorgehensweise:

$$\left(1 - \left(1 - \frac{2144}{40777}\right)^{30}\right) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1511}{43604}\right)^{30}\right) \approx 0,52370$$

(Ergebnis bei Verwendung der hypergeometrischen Verteilung: $\approx 0,52388$)

b) mögliche Vorgehensweise:

$$f(0) = 0,3707 \Rightarrow c = 0,3707$$

$$f(10) = 0,2428 \Rightarrow 100 \cdot a + 10 \cdot b + 0,3707 = 0,2428$$

$$f(20) = 0,2091 \Rightarrow 400 \cdot a + 20 \cdot b + 0,3707 = 0,2091$$

$$a = 0,000471$$

$$b = -0,0175$$

$$f(t) = 0,000471 \cdot t^2 - 0,0175 \cdot t + 0,3707$$

mögliche Vorgehensweise:

$$f(t) < \frac{1}{3} \Rightarrow 2,274 < t < 34,88$$

also $t > 2,274$

Bei dieser Modellierung unterschreitet der relative Anteil der zehn beliebtesten Bubennamen zum ersten Mal im Jahr 1998 ein Drittel.

c) $\mu \approx 370,4$

$$\sigma \approx 18,7$$

$$c = \frac{494 - \mu}{\sigma} \approx 6,6$$

mögliche Deutung:

In Oberösterreich weicht der prozentuelle Anteil der im Jahr 2015 geborenen Mädchen, die den Vornamen *Anna* erhielten, mehr als 6 Standardabweichungen vom Erwartungswert μ ab. Damit weicht dieser Anteil signifikant von μ ab.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: $[0,80; 0,81]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: $[0,52; 0,53]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für a : $[0,0004; 0,0005]$
Toleranzintervall für b : $[-0,02; -0,01]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Angabe der Jahreszahl je nach Rundung der Koeffizienten a und b variieren kann.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervalle: $[370; 371]$ bzw. $[18; 19]$
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.

Algenteppich*

Aufgabennummer: 2_046

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.5, FA 5.1, AN 1.3, AN 1.4

Auf der Oberfläche eines 800 m^2 großen Teichs befindet sich ein Algenteppich, der immer weiter wächst. Fünf Wochen lang werden jeweils am Ende der Woche die Flächeninhalte des Algenteppichs gemessen. Die Messwerte sind in der nachstehenden Tabelle aufgelistet. Zu Beginn der Beobachtung bedeckt der Algenteppich 4 m^2 .

t (in Wochen)	0	1	2	3	4	5
$A(t)$ (Flächeninhalt des Algenteppichs nach t Wochen in m^2)	4	7	12,25	21,44	37,52	65,65

Das Algenwachstum kann mathematisch unterschiedlich modelliert werden.

Aufgabenstellung:

- a) In den ersten fünf Wochen kann der Flächeninhalt $A(t)$ des Algenteppichs näherungsweise durch eine Exponentialfunktion A beschrieben werden, weil der Algenteppich nur einen kleinen Teil des Teichs bedeckt ($A(t)$ in m^2 , t in Wochen).

Ermitteln Sie, um welchen Prozentsatz sich der Flächeninhalt des Algenteppichs wöchentlich vergrößert, und geben Sie eine Funktionsgleichung für A an!

$A(t) =$ _____

Am Ende der fünften Woche sollen nach erfolgter Messung 30 m^2 Algen geerntet werden. Das soll regelmäßig im Abstand von jeweils einer Woche wiederholt werden.

Ermitteln Sie, wie oft dieser Vorgang unter der Voraussetzung, dass sich der Flächeninhalt des Algenteppichs zwischen den Erntevorgängen weiterhin um den gleichen Prozentsatz vergrößert, durchgeführt werden kann!

- b) Berechnen Sie die durchschnittliche wöchentliche Änderung (in m^2 pro Woche) des Flächeninhalts des Algenteppichs vom Ende der zweiten Woche bis zum Ende der vierten Woche des Beobachtungszeitraums!

Die bisher verwendete Exponentialfunktion beschreibt das Algenwachstum bei größerer bedeckter Fläche nur ungenau, weil sich in Abhängigkeit von der Größe des Teichs das Algenwachstum irgendwann verlangsamen wird. Ein realistischeres Modell berücksichtigt auch diesen Aspekt.

In Abhängigkeit vom Flächeninhalt A des Algenteppichs kann die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Funktion w mit $w(A) = k \cdot A \cdot (800 - A)$ modelliert werden. Dabei wird A in m^2 angegeben; $k \in \mathbb{R}^+$ ist der sogenannte Wachstumsparameter, der unter anderem von der Algenart abhängt.

Ermitteln Sie denjenigen Flächeninhalt A_1 des Algenteppichs, bei dem die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist!

$$A_1 = \underline{\hspace{10cm}} \text{ m}^2$$

- c) Der Beobachtungszeitraum wird über die in der Einleitung beschriebenen fünf Wochen hinaus verlängert. Der Flächeninhalt des Algenteppichs t Wochen nach Beobachtungsbeginn wird mithilfe einer Funktion A_2 mit $A_2(t) = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot k \cdot t}}$ modelliert ($A_2(t)$ in m^2 , t in Wochen).

Geben Sie den Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}^+$ mithilfe des in der Tabelle angegebenen Messwerts zum Zeitpunkt $t = 5$ an!

Zu welchem Zeitpunkt bedeckt der Algenteppich erstmals 90 % der Oberfläche, wenn dieses Modell zugrunde liegt?

Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Lösungserwartung

- a) Die Fläche des Algenteppichs vergrößert sich jede Woche um ca. 75 %.

$$A(t) = 4 \cdot 1,75^t$$

mögliche Vorgehensweise:

$$A(6) = (A(5) - 30) \cdot 1,75 \approx 62,39$$

$$A(7) = (A(6) - 30) \cdot 1,75 \approx 56,68$$

$$A(8) = (A(7) - 30) \cdot 1,75 \approx 46,69$$

$$A(9) = (A(8) - 30) \cdot 1,75 \approx 29,21$$

Die geplante Menge kann viermal geerntet werden.

- b) mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{37,52 - 12,25}{2} \approx 12,64$$

Die durchschnittliche wöchentliche Änderung beträgt in diesem Zeitraum ca. 12,64 m²/Woche.

mögliche Vorgehensweise:

$$w'(A) = k \cdot (800 - A) - k \cdot A$$

$$800 \cdot k - 2 \cdot k \cdot A_1 = 0$$

$$A_1 = 400 \text{ m}^2$$

- c) mögliche Vorgehensweise:

$$65,65 = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot 5 \cdot k}}$$

$$k \approx 0,00072 \text{ m}^{-2}/\text{Woche}$$

mögliche Vorgehensweise:

$$720 = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot 0,00072 \cdot t}}$$

$$t \approx 13$$

Nach ca. 13 Wochen sind erstmals 90 % der Oberfläche des Teichs mit Algen bedeckt.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen (z. B.: $A(t) = 4 \cdot e^{0,5596 \cdot t}$) sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m²/Woche“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [12; 13]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m⁻²/Woche“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,0007; 0,0008]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Zeitpunkts. Auch die Angabe „in der 14. Woche“ ist als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3

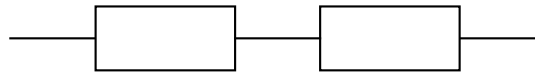
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

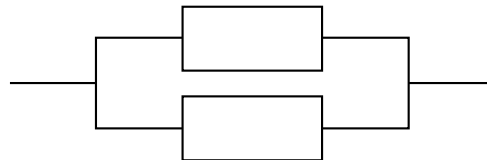
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

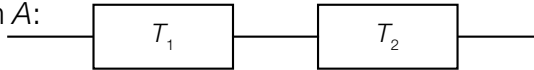
- Parallelsysteme:



Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2 .

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2 .

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

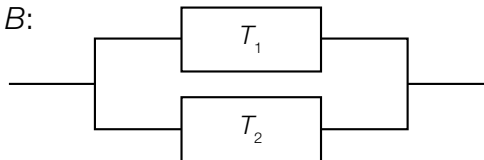
$$z_A(p_1, p_2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0,7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$$p_{\text{neu}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p .

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p .

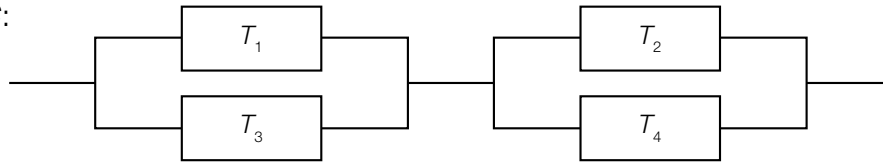
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$$z_B(p) = \underline{\hspace{10cm}}$$

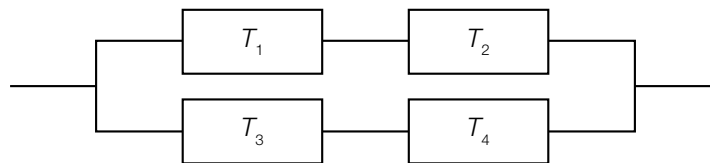
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1 , T_2 , T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p .

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0,9)}{1 - z_C(0,8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p .

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0; 1)$ gilt!

Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

mögliche Vorgehensweise:

$$1 - p_{\text{neu}}^2 = \frac{1 - 0,7^2}{4}$$

$$p_{\text{neu}} = \sqrt{0,8725} \approx 0,934$$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.

Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1 | 1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0 \text{ für alle } p \in (0; 1)$$

oder:

$$z_B = 1 - (1 - p)^2$$

$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.

Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

$$c) \frac{1 - z_C(0,9)}{1 - z_C(0,8)} \approx 0,254$$

mögliche Interpretation:

Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$$

$$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D .

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System D funktioniert, funktioniert auch System C . Außerdem funktioniert System C auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A . Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
 – Ein Punkt für die richtige Lösung.
 Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
 Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
 – Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
 Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
 – Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Roulette*

Aufgabennummer: 2_040

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2

Roulette ist ein Glücksspiel, bei dem mittels einer Kugel eine natürliche Zahl aus dem Zahlenbereich von 0 bis 36 zufällig ausgewählt wird, wobei jede der 37 Zahlen bei jedem der voneinander unabhängigen Spieldurchgänge mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Das Spielfeld mit der Zahl Null ist grün gefärbt, die Hälfte der restlichen Zahlenfelder ist rot, die andere Hälfte schwarz gefärbt.

Die nachstehende Tabelle zeigt eine Auswahl von Setzmöglichkeiten und die im Erfolgsfall ausbezahlten Gewinne. „35-facher Gewinn“ bedeutet zum Beispiel, dass bei einem gewonnenen Spiel der Einsatz und zusätzlich der 35-fache Einsatz (also insgesamt der 36-fache Einsatz) ausbezahlt wird.

Einzelzahl (von 0 bis 36)	35-facher Gewinn
Rot/Schwarz	1-facher Gewinn
Ungerade/Gerade (ohne Null)	1-facher Gewinn

Eine der bekanntesten Spielstrategien ist das Martingale-System. Man setzt dabei stets auf dieselbe „einfache Chance“ (z. B. auf „Rot“ oder „Gerade“). Falls man verliert, verdoppelt man den Einsatz im darauffolgenden Spiel. Sollte man auch dieses Spiel verlieren, verdoppelt man den Einsatz noch einmal für das nächstfolgende Spiel und setzt diese Strategie von Spiel zu Spiel fort. Sobald man ein Spiel gewinnt, endet diese Spielserie, und man hat mit dieser Strategie den Einsatz des ersten Spiels dieser Spielserie (Starteinsatz) als Gewinn erzielt.

Aufgabenstellung:

- a) Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel bei 80 Spielen auf eine bestimmte Zahl fällt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 80 Spielen mindestens viermal auf eine bestimmte Zahl fällt!

Ein Spieler möchte seine Gewinnchancen erhöhen und handelt wie folgt: Er notiert während einer Serie von z. B. 37 Spielen, auf welche Zahlen die Kugel fällt. Weiters geht er davon aus, dass die Kugel in den nachfolgenden Spielen auf die dabei nicht notierten Zahlen fällt, und setzt auf diese Zahlen.

Geben Sie an, ob der Spieler mit dieser Strategie die Gewinnchancen erhöhen kann, und begründen Sie Ihre Antwort!

- b) Eine Spielerin wendet das Martingale-System an und setzt immer auf „Rot“. Die Spielserie endet, sobald die Spielerin gewinnt bzw. wenn der vom Casino festgelegte Höchsteinsatz von € 10.000 keine weitere Verdoppelung des Spieleinsatzes mehr erlaubt.

Die nachstehende Tabelle zeigt, wie schnell die Einsätze ausgehend von einem Starteinsatz von € 10 bei einer Martingale-Spielserie im Falle einer „Pechsträhne“ ansteigen können.

Spielrunde	Einsatz in €
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160
6	320
7	640
8	1 280
9	2 560
10	5 120

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielerin bei dieser Martingale-Spielserie alle zehn Spiele verliert!

Zeigen Sie durch die Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn, dass trotz der sehr geringen Wahrscheinlichkeit, zehn aufeinanderfolgende Spiele zu verlieren, das beschriebene Martingale-System ungünstig für die Spielerin ist!

Lösungserwartung

a) $P(X \geq 4) \approx 0,171$

Da die Spieldurchgänge voneinander unabhängig sind und somit die Ergebnisse der vorherigen Spielrunden keine Auswirkungen auf die nachfolgenden Spielrunden haben, kann der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht beeinflussen.

b) $\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0,00128$

Mögliche Vorgehensweise:

Bei zehn aufeinanderfolgenden verlorenen Spielrunden beträgt der Verlust € 10.230.

Endet die Spielserie mit einem Gewinn, so beträgt dieser € 10.

Erwartungswert für einen Gewinn: $(1 - 0,00128) \cdot 10 - 0,00128 \cdot 10\,230 \approx -3,11$

Ein negativer Erwartungswert zeigt, dass dieses Spiel langfristig gesehen für die Spielerin ungünstig ist.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall für $P(X \geq 4)$: $[0,1; 0,2]$ bzw. $[10\%; 20\%]$

– Ein Punkt für die Angabe, dass der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht erhöhen kann, und eine korrekte Begründung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.

Toleranzintervall: $[0,0012; 0,0013]$

– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

Lachsbestand*

Aufgabennummer: 2_039

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 1.6, AN 3.3, WS 1.1

Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell.

Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.

Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort“ zurück, um dort zu laichen, d. h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.

Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908–31.12.1911	1 098
01.01.1912–31.12.1915	740
01.01.1916–31.12.1919	714
01.01.1920–31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1,535$ und $b = 0,000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

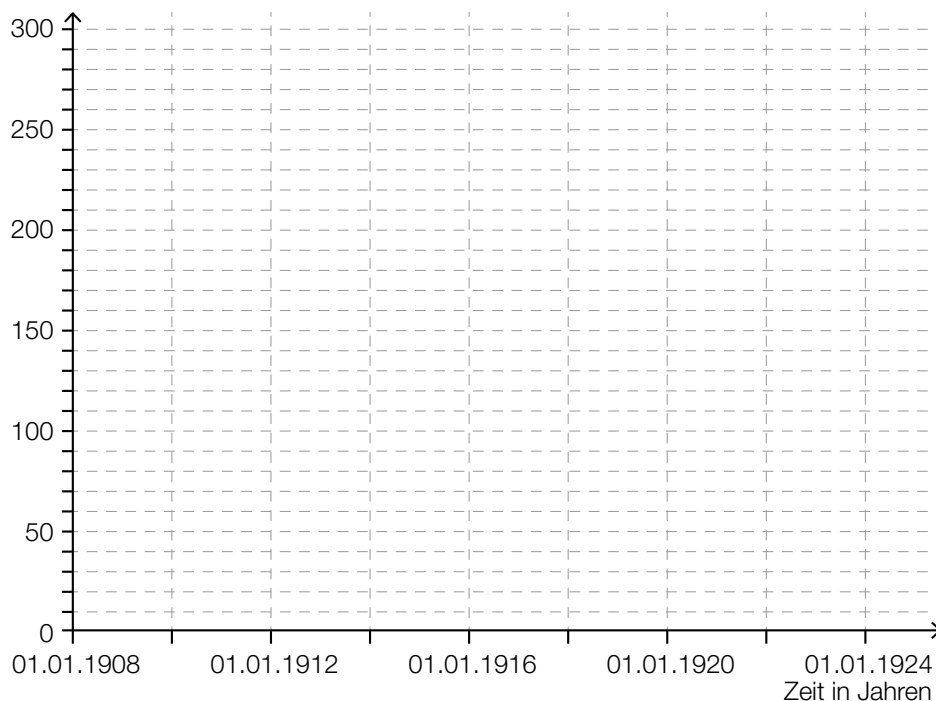
- a) Ermitteln Sie für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

Interpretieren Sie n_0 im gegebenen Kontext!

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E | R(n_E))$ der Reproduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeigen Sie, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

- c) Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachsbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nehmen Sie den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechnen Sie damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und tragen Sie die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	
01.01.1916–31.12.1919	
01.01.1920–31.12.1923	

Lösungserwartung

a) $n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$$R'(n) = 0 \Rightarrow n_E = \frac{1}{b}$$

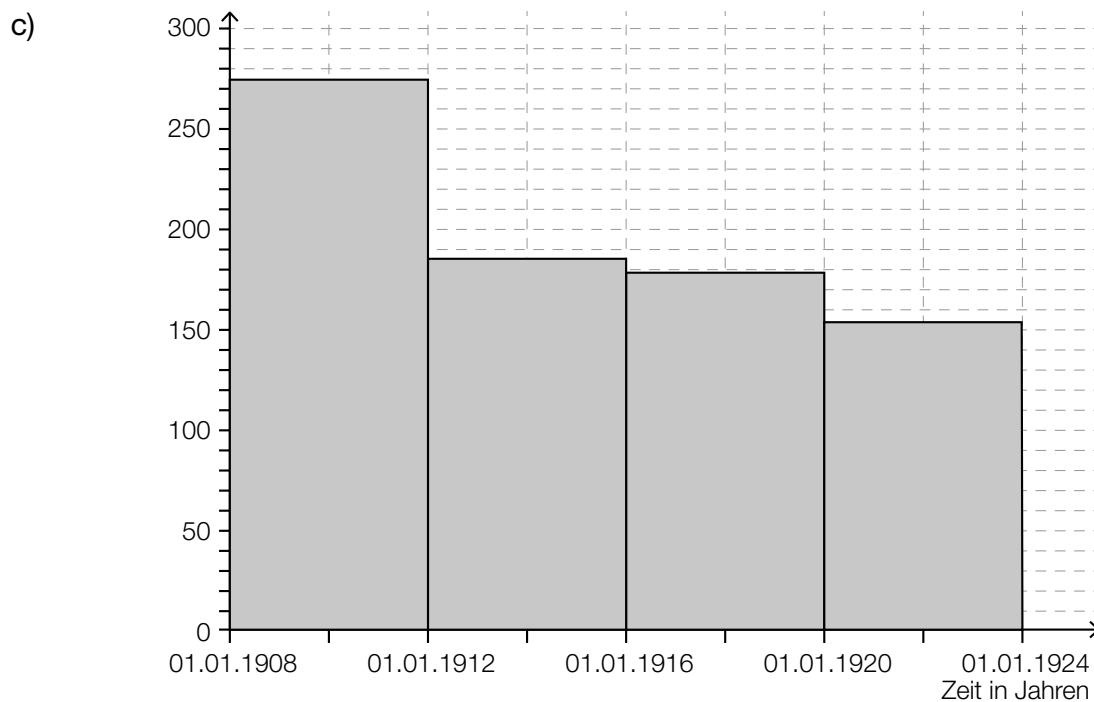
$$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{b} \mid \frac{a}{b \cdot e}\right)$$

Möglicher Nachweis:

$$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0 \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{Maximumstelle}$$

$$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \Rightarrow a > e$$



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
 - Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

- b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von E und einen korrekten Nachweis.
 - Ein Punkt für die richtige Lösung.

- c) – Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
 - Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

Überlagerung von Schwingungen*

Aufgabennummer: 2_038

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, AN 4.2

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben. Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1 , h_2 und h_3 beschrieben.

Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

$$h_2(t) = \sin(2,5 \cdot \pi \cdot t)$$

$$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.

Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \bar{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind \bar{p} und ω Konstanten.

Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\bar{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

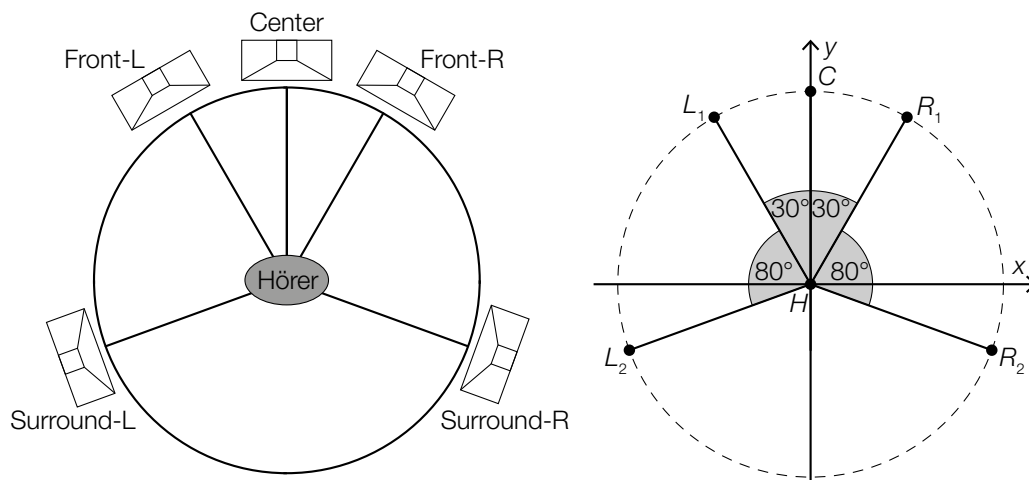
- b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

- c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1 , h_2 und h_3 ist!

- d) Für ein angenehmes Raumklingerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/5.1> [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C , L_1 , L_2 , R_1 , R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

Lösungserwartung

a) $T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \Rightarrow T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$$

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1} \int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_{\text{eff}} \approx 0,71 \text{ Pa}$$

b) $T = 4 \text{ ms}$

Frequenz von h : $\frac{1}{0,004} = 250 \text{ Hz}$

c) Amplitude von h : ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:

Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1 , h_2 und h_3 , da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

d) $R_1 = (1 | \sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:

$$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Mögliche Vorgehensweise:

Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20^\circ) \approx 3,76 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]
- b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h , wobei die Einheit „ms“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
- c) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.
- d) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1 .
Toleranzintervall für die y -Koordinate: [1,7; 1,75]
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 2_037

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.5, AN 3.2, AN 3.3

Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0|y_A)$ und hat mit der positiven x -Achse den Punkt $B = (x_B|0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist.

Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' .“ Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Geben Sie diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

- c) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Geben Sie die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

Lösungserwartung

a) $c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f . Da B auf der positiven x -Achse liegt, muss seine x -Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = -2 \cdot b$.
Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührungspunkt mit der positiven x -Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

b) Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Da $B = (x_B | 0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f' .

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \Rightarrow \text{Die Steigung der Ableitungsfunktion } f' \text{ ist } \frac{1}{2}.$$

$$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \Rightarrow x_t = 1 - 2 \cdot b$$

c) Mögliche Vorgehensweise:

Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung

$\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot c}}{0,5} \Rightarrow c = b^2$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \Rightarrow b = \frac{-x_B}{2}$$

$$\text{Aus } c = b^2 \text{ folgt: } c = \frac{x_B^2}{4}.$$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c . Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B .

Wahlhochrechnung*

Aufgabennummer: 2_044

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, WS 1.1, WS 1.3, WS 4.1

Es gibt unterschiedliche mathematische Methoden, um auf das Wahlverhalten von Wählerinnen und Wählern bei bevorstehenden Wahlen zu schließen. Eine gängige Methode ist die Erhebung und Auswertung der Daten einer Stichprobe. In einem anderen Verfahren werden sogenannte *Regressionsgeraden* ermittelt, mit deren Hilfe eine relativ genaue Hochrechnung möglich ist. Zur Bestimmung dieser Regressionsgeraden benötigt man die Ergebnisse einer sogenannten *Vergleichswahl*, die idealerweise zeitnah erfolgte.

Die 4 150 Wahlberechtigten eines bestimmten Ortes mit fünf Wahlbezirken konnten sich bei einer Bürgermeisterwahl zwischen den Kandidaten *A* und *B* entscheiden. Alle Wahlberechtigten gaben ihre Stimme ab und es gab keine ungültigen Stimmen. Nach der Auszählung der Stimmen von vier der fünf Wahlbezirke liegt folgendes Zwischenergebnis vor:

Tabelle 1: Bürgermeisterwahl

	1. Wahlbezirk	2. Wahlbezirk	3. Wahlbezirk	4. Wahlbezirk	5. Wahlbezirk
Kandidat <i>A</i>	443	400	462	343	nicht gezählt
Kandidat <i>B</i>	332	499	466	227	nicht gezählt
Wahlberechtigte	775	899	928	570	978

Der relative Stimmenanteil für Kandidat *A* für die ersten vier Wahlbezirke bei dieser Bürgermeisterwahl wird mit h bezeichnet.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie an, wie viele Stimmen für Kandidat *A* im 5. Wahlbezirk zu erwarten sind, wenn man h als Schätzwert für den relativen Stimmenanteil für diesen Kandidaten in diesem Wahlbezirk verwendet!

Im 4. Wahlbezirk weicht das Ergebnis für Kandidat *A* am stärksten von h ab. Geben Sie diese Abweichung in Prozentpunkten an!

b) Die nachstehende Tabelle zeigt das Ergebnis einer Vergleichswahl.

Tabelle 2: Vergleichswahl

	1. Wahlbezirk	2. Wahlbezirk	3. Wahlbezirk	4. Wahlbezirk	5. Wahlbezirk	gesamt
Kandidat A	390	416	409	383	478	2076
Kandidat B	385	483	519	187	500	2074
Wahlberechtigte	775	899	928	570	978	4150

Die Variable x sei die Anzahl der Stimmen für Kandidat A bei der Vergleichswahl, die Variable y die Anzahl der Stimmen für Kandidat A bei der Bürgermeisterwahl. Damit erhält man für den Kandidaten A für die Ergebnisse aus dem 1., 2., 3. und 4. Wahlbezirk vier Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem.

Die Regressionsgerade $g: y = 1,5462 \cdot x - 205,71$ verläuft nun durch diese „Punktwolke“ so, dass ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Variablen x und y gut beschrieben wird.

Berechnen Sie mithilfe der Regressionsgeraden g die erwartete Anzahl an Stimmen bei der Bürgermeisterwahl für den Kandidaten A im 5. Wahlbezirk!

Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden g im gegebenen Kontext!

c) Bei einer österreichweiten Wahl kann ein Kandidat C gewählt werden. Aus einer vorhergehenden Wahl ist bekannt, dass der Stimmenanteil h für Kandidat A bei der Bürgermeisterwahl in den Wahlbezirken 1 bis 4 repräsentativ für den Stimmenanteil für Kandidat C bei der österreichweiten Wahl ist.

Ermitteln Sie anhand des Stimmenanteils h ein symmetrisches 95%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Stimmenanteil für Kandidat C!

Nach Auszählung aller Stimmen bei der österreichweiten Wahl hat der Kandidat C 61 % der Stimmen erhalten. Damit liegt dieser Stimmenanteil außerhalb des davor ermittelten symmetrischen 95%-Konfidenzintervalls.

Hätte man als Konfidenzniveau 90 % gewählt, so hätte man ein Konfidenzintervall mit einer anderen Breite erhalten.

Geben Sie an, ob der tatsächliche Stimmenanteil für Kandidat C in diesem Konfidenzintervall enthalten wäre, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösungserwartung

a) $\frac{1648}{3172} \approx 0,52$

Für Kandidat A sind ca. 52 % von 978 Stimmen, also ca. 509 Stimmen, zu erwarten.

relativer Stimmenanteil für Kandidat A im 4. Wahlbezirk: $\frac{343}{570} \approx 0,6$

Der relative Stimmenanteil weicht im 4. Wahlbezirk um ca. 8 Prozentpunkte von h ab.

b) $1,5462 \cdot 478 - 205,71 \approx 533$

Bei der Hochrechnung mithilfe der Regressionsgeraden g erhält Kandidat A im 5. Wahlbezirk ca. 533 Stimmen bei der Bürgermeisterwahl.

Mögliche Interpretation:

Der Wert der Steigung von g gibt an, dass Kandidat A pro zusätzlicher Stimme bei der Vergleichswahl ca. 1,55 Stimmen mehr bei der Bürgermeisterwahl erwarten kann.

c) $0,52 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{3172}} \approx 0,52 \pm 0,017 \Rightarrow [0,503; 0,537]$

Ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall hat bei gleicher Stichprobengröße sowie gleichem Stichprobenanteil und der Verwendung derselben Berechnungsmethode eine geringere Breite als das symmetrische 95-%-Konfidenzintervall, daher wäre das Ergebnis auch nicht im symmetrischen 90-%-Konfidenzintervall enthalten.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [500; 510]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8; 9]
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [530 Stimmen; 540 Stimmen]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.
- c) – Ein Punkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,500; 0,503]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,536; 0,540]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

Vermögensverteilung*

Aufgabennummer: 2_043

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

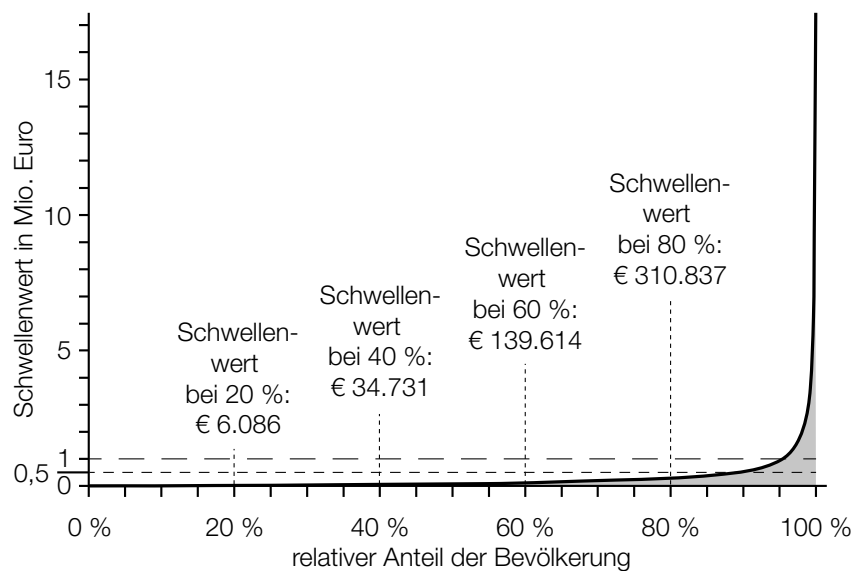
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 4.3, WS 1.1

Das gesamte Vermögen eines Landes ist häufig sehr ungleich auf die Bevölkerung verteilt. Eine im Jahr 2012 durchgeführte Erhebung der Europäischen Zentralbank (EZB) lieferte Daten für eine Abschätzung, welcher Anteil der österreichischen Bevölkerung über welches Vermögen (in Millionen Euro) verfügt. Die Ergebnisse der darauf basierenden Studie sind in Abbildung 1 dargestellt. Beispielsweise bedeutet der Schwellenwert bei 20 %, dass die vermögensschwächsten 20 % der österreichischen Bevölkerung ein Vermögen von maximal € 6.086 besitzen.

Im Jahr 2012 betrug die Bevölkerungszahl von Österreich ca. 8,45 Millionen Einwohner/innen.

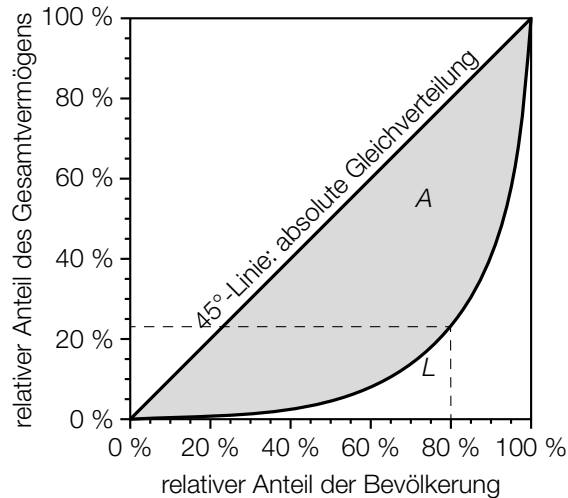
Die sogenannte *Lorenz-Kurve L* (vgl. Abbildung 2) veranschaulicht, welcher relative Anteil der Bevölkerung welchen relativen Anteil des Gesamtvermögens besitzt. So besitzen laut der EZB-Studie die vermögensschwächsten 80 % der österreichischen Bevölkerung nur ca. 23 % des gesamten Vermögens.

Abbildung 1:



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Abbildung 2:



Quelle: Eckerstorfer, Paul, Johannes Halak et al.: *Vermögen in Österreich. Bericht zum Forschungsprojekt „Reichtum im Wandel“*. Linz: Johannes-Kepler-Universität Linz 2013, S. 12–13. http://media.arbeiterkammer.at/PDF/Vermoegen_in_Oesterreich.pdf [17.10.2014] (adaptiert).

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß für die Ungleichverteilung des Vermögens in einem Land. Er entspricht dem Quotienten aus dem Inhalt der markierten Fläche A (zwischen der 45°-Linie und der Lorenz-Kurve L) und dem Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, das durch die Eckpunkte (0 %|0 %), (100 %|0 %) und (100 %|100 %) festgelegt ist.

Laut EZB-Studie hatte der Gini-Koeffizient für Österreich für das Jahr 2012 den Wert 0,76.

Aufgabenstellung:

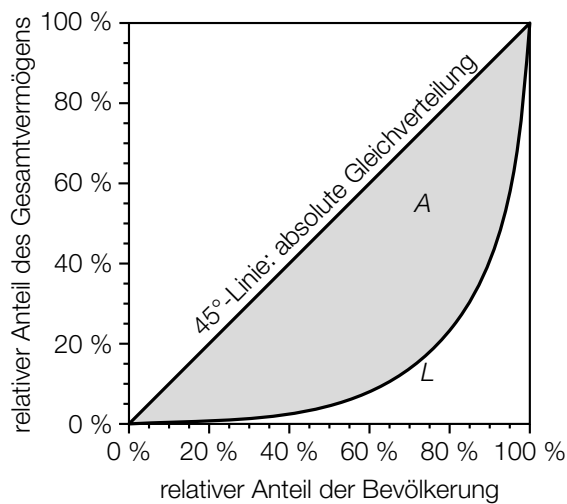
- a) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2012 ein Vermögen von mindestens einer Million Euro besaßen!

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Schwellenwerte im Intervall [20 %; 40 %] annähernd linear zunehmen, einen Näherungswert des Schwellenwerts bei 25 %!

- b) Ermitteln Sie, welchen relativen Anteil am Gesamtvermögen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen!

Laut einer Studie der Universität Linz aus dem Jahr 2013 besitzen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung einen deutlich größeren relativen Anteil am Gesamtvermögen, als es in der EZB-Studie behauptet wurde.

Unter Berücksichtigung der Studie der Universität Linz erhält man eine andere Lorenz-Kurve L^* als die abgebildete Lorenz-Kurve L . Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Verlauf einer solchen Lorenz-Kurve L^* !



- c) Die Lorenz-Kurve wird im Intervall $[0; 1]$ durch eine reelle Funktion in Abhängigkeit von x modelliert, wobei x den relativen Anteil der Bevölkerung angibt.

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten für ein Land S , dessen Lorenz-Kurve für das Jahr 2012 durch die Funktion L_1 mit $L_1(x) = 0,9 \cdot x^5 + 0,08 \cdot x^2 + 0,02 \cdot x$ im Intervall $[0; 1]$ beschrieben werden kann!

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Gini-Koeffizienten für Österreich für das Jahr 2012 und geben Sie an, ob das Gesamtvermögen in diesem Jahr in Österreich oder im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war!

Lösungserwartung

- a) Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

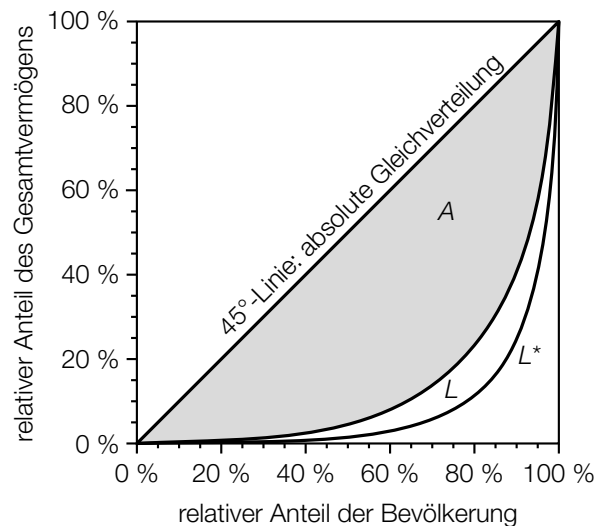
Mögliche Vorgehensweise:

$$6086 + \frac{34731 - 6086}{4} = 13247,25$$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

- b) Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^* :



- c) Mögliche Vorgehensweise:

$$0,5 - \int_0^1 L_1(x) dx = 0,313$$

$$\frac{0,313}{0,5} \approx 0,63$$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land S etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land S niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^* , wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.
- c) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Kondensator*

Aufgabennummer: 2_042

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.1, FA 1.5, AN 4.3

Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, mit dem elektrische Ladung und die daraus resultierende elektrische Energie gespeichert werden kann.

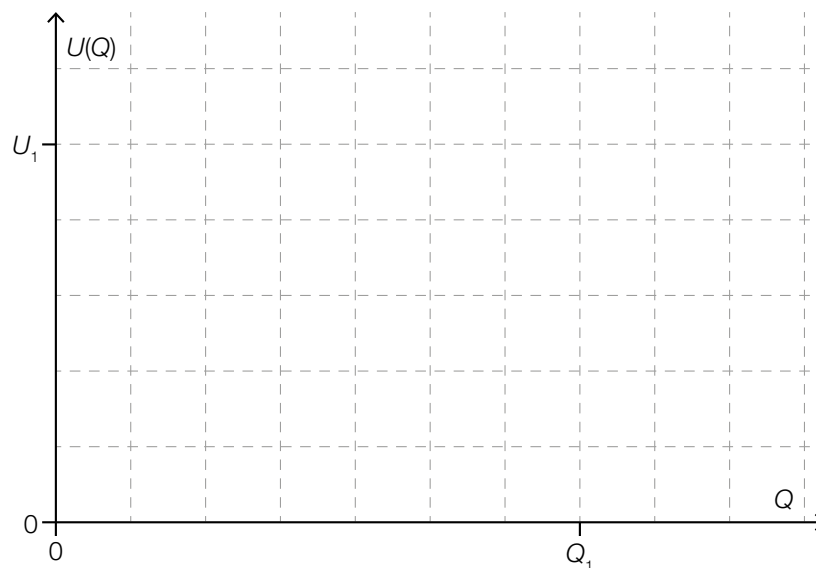
Eine einfache Form des Kondensators ist der sogenannte *Plattenkondensator*. Er besteht aus zwei einander gegenüberliegenden elektrisch leitfähigen Flächen, die als *Kondensatorplatten* bezeichnet werden.

Das Verhältnis zwischen der gespeicherten Ladung Q und der an die Kondensatorplatten angelegten (Gleich-)Spannung U wird als Kapazität C bezeichnet.

Es gilt $C = \frac{Q}{U}$, wobei C in der Einheit Farad angegeben wird.

Aufgabenstellung:

- a) Ein Kondensator mit einer bestimmten Kapazität C wird bis zur Ladungsmenge Q_1 aufgeladen, die gemessene Spannung $U(Q_1)$ hat dann den Wert U_1 .
Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung die Spannung U beim Ladevorgang am Kondensator in Abhängigkeit von der Ladung Q !



Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie W kann mithilfe der Formel $W = \int_0^{Q_1} U(Q) dQ$ berechnet werden.

Geben Sie eine Formel für die gespeicherte Energie W in Abhängigkeit von U_1 und C an!

- b) Bei einem Ladevorgang kann die Spannung zwischen den Kondensatorplatten als Funktion U in Abhängigkeit von der Zeit t durch $U(t) = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ beschrieben werden. Dabei ist $U^* > 0$ die an den Kondensator angelegte Spannung und $\tau > 0$ eine für den Ladevorgang charakteristische Konstante. Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

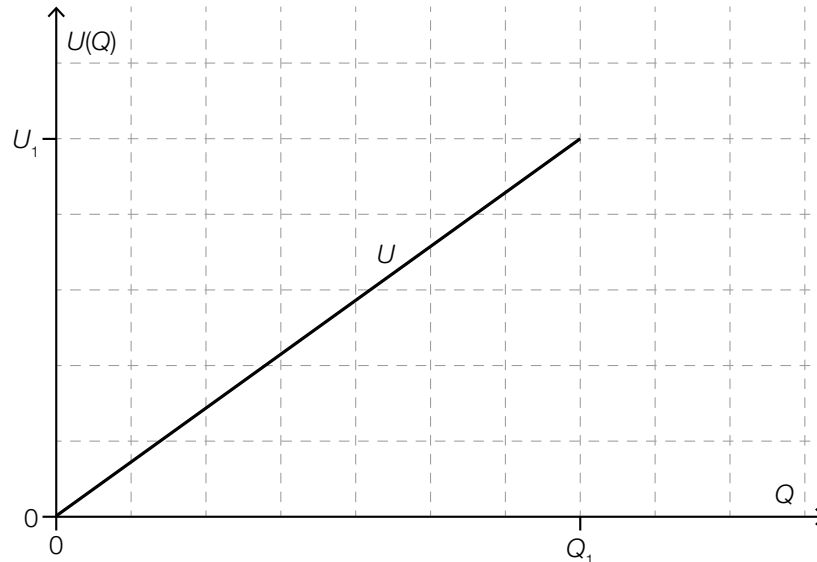
Die Zeit, nach der die Spannung $U(t)$ zwischen den Kondensatorplatten 99 % der angelegten Spannung U^* beträgt, wird als *Ladezeit* bezeichnet.

Bestimmen Sie die Ladezeit eines Kondensators in Abhängigkeit von τ !

Geben Sie eine Formel für die momentane Änderungsrate der Spannung zwischen den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von t an und zeigen Sie mithilfe dieser Formel, dass die Spannung während des Ladevorgangs ständig steigt!

Lösungserwartung

a)



$$W = \int_0^{Q_1} U(Q) dQ = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$$

b) Mögliche Vorgehensweise:

$$0,99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$0,01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Ladezeit: } t = -\tau \cdot \ln(0,01) \quad \text{bzw.} \quad t = \tau \cdot \ln(100)$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$U'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$$

Es gilt: $U^* > 0$, $\tau > 0$, $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \Rightarrow U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für eine richtige Skizze.
– Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_041

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 1.2, FA 1.5, FA 4.3, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + t \cdot x$. Für den Parameter t gilt: $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie die lokalen Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t an!

An der Stelle $x = t$ gelten für die Funktion f_t die Gleichungen $f_t(t) = 0$, $f_t'(t) = 0$ und $f_t''(t) = 2$.

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_t bei $x = t$!

- b) Geben Sie diejenige Stelle x_0 in Abhängigkeit von t an, an der sich das Krümmungsverhalten von f_t ändert!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von f_t an der Stelle $x = 0$ unabhängig von der Wahl des Parameters t ist!

- c) Die Funktion A beschreibt in Abhängigkeit von t mit $t > 0$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und von der x -Achse im Intervall $[0; t]$ begrenzt wird. Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $t \mapsto A(t)$, ist eine Polynomfunktion.

Geben Sie den Funktionsterm und den Grad von A an!

Geben Sie das Verhältnis $A(t) : A(2 \cdot t)$ an!

- d) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_{-1}(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt!

Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion f_{-1} aus dem Graphen der Funktion f_1 hervorgeht!

Lösungserwartung

a) Mögliche Vorgehensweise:

$$f'_t(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$$

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{t}{3}; x_2 = t$$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$$f''_t(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$$

$$f''_t(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$f''_t(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t .

c) Mögliche Vorgehensweise:

$$A(t) = \int_0^t f_t(x) dx = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$$

d) Mögliche Vorgehensweise:

$$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$$

$$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \Rightarrow f_{-1}(x) = f_1(-x)$$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1} .

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
- c) – Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A . Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.
- d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom *Catcher-Car* überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das *Catcher-Car* zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des *Catcher-Cars* wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

- a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

$$t = \underline{\hspace{10cm}}$$

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. %.

- b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$$v(t) = 12 \cdot 0,7^{t-1} \text{ mit } t \text{ in h und } v(t) \text{ in km/h}$$

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t) dt$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: : UTC

- c) Eine Gruppe von Läuferinnen und Läufern wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass diese Gruppe nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft.“

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit \bar{v} !

$\bar{v} =$ _____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0,5) \Rightarrow t = \frac{7,5}{15 - v}$$

mögliche Vorgehensweise:

$$s = v \cdot t$$

$$s = v \cdot \frac{7,5}{15 - v}$$

$$v = 9 \text{ km/h: } s = 11,25 \text{ km}$$

$$v = 9,9 \text{ km/h: } s \approx 14,559 \text{ km}$$

$$\frac{14,559}{11,25} \approx 1,294$$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$$12 + \int_1^b v(t) dt = 15 + 16 \cdot (b - 1,5) \Rightarrow b \approx 1,878$$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$$t = 3,5 + \frac{3,72}{20} = 3,686 \text{ h}$$

$$\bar{v} = \frac{51,72}{3,686} \approx 14,03 \text{ km/h}$$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Exponentialfunktion und lineare Funktion*

Aufgabennummer: 2_049

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist eine lineare Funktion $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie alle $k \in \mathbb{R}$ an, für die die Graphen von f und g_1 einander in genau zwei Punkten schneiden!

Für ein solches k beschreibt die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = g_1(x) - f(x)$ die Differenz von g_1 und f . Für eine Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittpunkten der Graphen gilt die Beziehung $h'(x_0) = 0$.

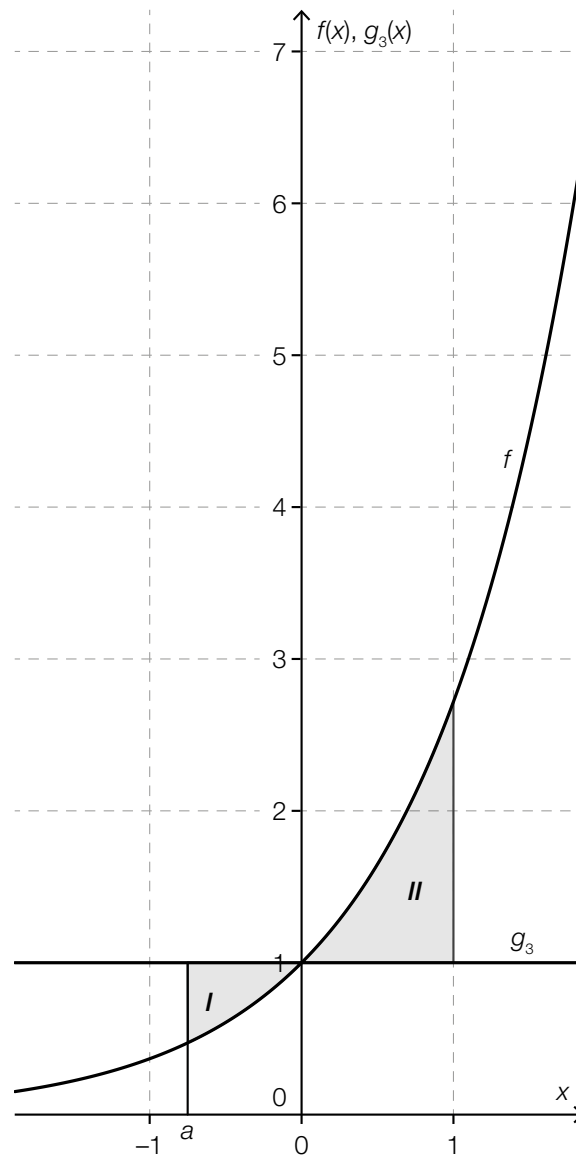
Bestimmen Sie x_0 in Abhängigkeit von k !

b) Der Graph einer linearen Funktion $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = 4 \cdot x + d$ und $d \in \mathbb{R}$ ist eine Tangente an den Graphen von f .

Geben Sie die Koordinaten des Berührungspunkts B der beiden Graphen an!

Geben Sie den Wert von d an!

- c) Gegeben ist die Funktion $g_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = 1$.
 Die von den beiden Graphen von g_3 und f im Intervall $[a; 0]$ (mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < 0$) eingeschlossene Fläche **I** hat den Flächeninhalt A_1 . Die von den beiden Graphen von f und g_3 im Intervall $[0; 1]$ eingeschlossene Fläche **II** hat den Flächeninhalt A_2 .



Berechnen Sie den Flächeninhalt A_2 !

Drücken Sie das bestimmte Integral $\int_a^1 (f(x) - g_3(x)) dx$ durch die Flächeninhalte A_1 und A_2 aus!

Lösungserwartung

a) $k \in \mathbb{R}^+$

mögliche Vorgehensweise:

$$h(x) = g_1(x) - f(x) = k \cdot x + 2 - e^x$$

$$h'(x) = k - e^x$$

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow k - e^{x_0} = 0 \Rightarrow x_0 = \ln(k)$$

b) mögliche Vorgehensweise:

$$B = (x_B | f(x_B))$$

$$f'(x_B) = 4$$

$$e^{x_B} = 4 \Rightarrow x_B = \ln(4)$$

$$f(x_B) = e^{\ln(4)} = 4$$

$$B = (\ln(4) | 4)$$

$$4 = 4 \cdot \ln(4) + d \Rightarrow d = 4 - 4 \cdot \ln(4) \approx -1,545$$

c) $A_3 = \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2$

$$\int_a^1 (f(x) - g_3(x)) dx = A_2 - A_1$$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten.
Toleranzintervall für x_B : [1,3; 1,4]
Toleranzintervall für $f(x_B)$: [3,6; 4,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für d : [-2,0; -1,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei bereits die Angabe $\int_0^1 (e^x - 1) dx$ als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall: [0,70; 0,72]
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Körper mit rechteckigen Querschnittsflächen*

Aufgabennummer: 2_050

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 4.1, FA 2.1, FA 4.1, FA 4.3, AN 1.3, AN 4.3

Die nachstehenden Abbildungen 1 und 2 stellen einen Körper mit ebenen Seitenflächen im Schrägriss bzw. eine Schnittfläche dar.

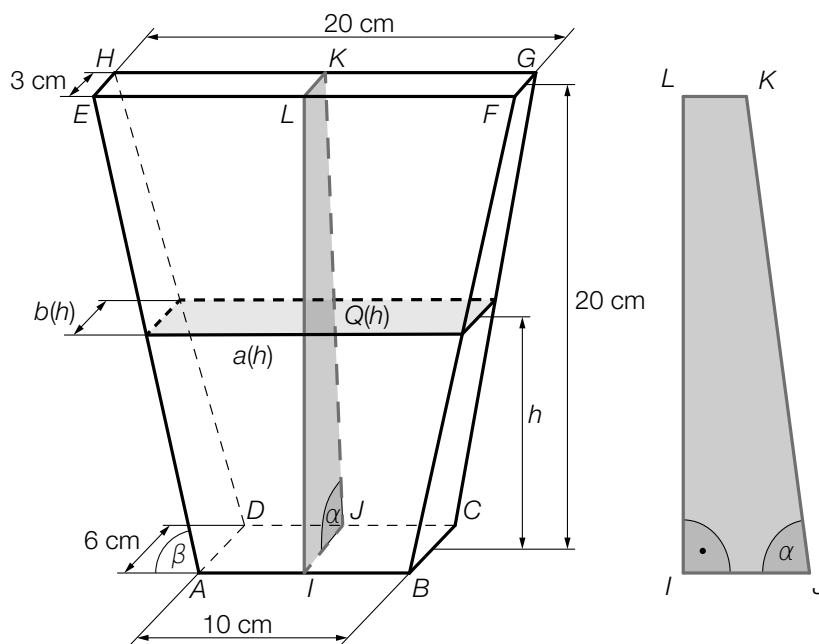


Abbildung 1: Schrägriss des Körpers

Abbildung 2: Schnittfläche IJKL

Die vordere Seitenfläche $ABFE$ steht normal auf die horizontale Grundfläche $ABCD$ und auf die horizontale Deckfläche $EFGH$, während die hintere Seitenfläche $DCGH$ zur Grundfläche unter dem Winkel α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) geneigt ist.

Die beiden Seitenflächen $ADHE$ und $BCGF$ weisen gegenüber der Grundfläche den gleichen Neigungswinkel β (mit $\beta \approx 76^\circ$) auf.

Die horizontalen Querschnittsflächen des Körpers sind in jeder Höhe rechteckig. Die Längen $a(h)$ und die Breiten $b(h)$ dieser Rechtecke ändern sich linear in Abhängigkeit von der Höhe h . Die Grundfläche hat eine Länge von 10 cm und eine Breite von 6 cm, die Deckfläche hat eine Länge von 20 cm und eine Breite von 3 cm. Die Höhe des Körpers beträgt 20 cm.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

- a) Die Funktion $Q: [0; 20] \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt die Größe der Querschnittsfläche $Q(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h (mit $Q(h)$ in cm^2 , h in cm).

Es gilt: $Q(h) = s \cdot h^2 + 1,5 \cdot h + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von s und t !

Berechnen Sie das Volumen des Körpers und geben Sie das Ergebnis inklusive Einheit an!

- b) Die lokale Änderungsrate der Breite $b(h)$ nimmt für jedes $h \in [0; 20]$ einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an.

Berechnen Sie c !

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen c und α mithilfe einer Gleichung!

- c) Die Funktion a beschreibt die Länge $a(h)$ in der Höhe h mit $a(h)$ und h in cm .

Geben Sie eine Funktionsgleichung von a an!

Ändert man den Winkel β auf 45° und lässt die Länge der Grundlinie AB und die Körperhöhe unverändert, so erhält man eine neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 , bei der die Funktion a_1 mit $a_1(h) = 2 \cdot h + 10$ die Länge $a_1(h)$ in der Höhe h beschreibt ($a_1(h)$ und h in cm).

Geben Sie das Verhältnis $\int_0^{20} a_1(h) dh : \int_0^{20} a(h) dh$ an und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 und die ursprüngliche vordere Seitenfläche $ABFE$!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

$$Q(0) = 60 \Rightarrow t = 60$$

$$Q(20) = 60 \Rightarrow 60 = 400 \cdot s + 90 \Rightarrow s = -\frac{3}{40}$$

$$V = \int_0^{20} Q(h) dh = -\frac{1}{40} \cdot 20^3 + 0,75 \cdot 20^2 + 60 \cdot 20 = 1300 \text{ cm}^3$$

b) $c = \frac{3-6}{20} = -\frac{3}{20}$

$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{c}$$

c) mögliche Vorgehensweise:

$$a(h) = \frac{a(20) - a(0)}{20} \cdot h + a(0)$$

$$a(h) = \frac{1}{2} \cdot h + 10$$

mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^{20} a_1(h) dh = \int_0^{20} (2 \cdot h + 10) dh = 600$$

$$\int_0^{20} a(h) dh = \int_0^{20} \left(\frac{1}{2} \cdot h + 10 \right) dh = 300$$

$$\int_0^{20} a_1(h) dh : \int_0^{20} a(h) dh = 600 : 300 = 2 : 1$$

Das Verhältnis des Flächeninhalts der neuen Seitenwand ABF_1E_1 zum Flächeninhalt der ursprünglichen Seitenwand $ABFE$ ist $2 : 1$.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für s : $[-0,08; -0,07]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung unter Angabe einer richtigen Einheit.
Toleranzintervall: $[1\,280\text{ cm}^3; 1\,320\text{ cm}^3]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: $[-0,2; -0,1]$
- Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Interpretation.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Bremsvorgang*

Aufgabennummer: 2_051

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.2, AN 1.1, AN 3.2, AN 4.3

Der Bremsweg s_B ist die Länge derjenigen Strecke, die ein Fahrzeug ab dem Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand zurücklegt. Entscheidend für den Bremsweg sind die Fahrgeschwindigkeit v_0 des Fahrzeugs zu Beginn des Bremsvorgangs und die Bremsverzögerung b . Der Bremsweg s_B kann mit der Formel $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ berechnet werden (v_0 in m/s, b in m/s^2 , s_B in m).

Der Anhalteweg s_A berücksichtigt zusätzlich zum Bremsweg den während der Reaktionszeit t_R zurückgelegten Weg. Dieser sogenannte *Reaktionsweg* s_R kann mit der Formel $s_R = v_0 \cdot t_R$ berechnet werden (v_0 in m/s, t_R in s, s_R in m).

Der Anhalteweg s_A ist gleich der Summe aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B .

Aufgabenstellung:

- a) 1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Fahrgeschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit vom Bremsweg s_B und von der Bremsverzögerung b auf.

$$v_0 = \underline{\hspace{10cm}}$$

- 2) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0 .	<input type="checkbox"/>
Der Bremsweg s_B ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0 .	<input type="checkbox"/>
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b .	<input type="checkbox"/>
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0 .	<input type="checkbox"/>
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Reaktionszeit t_R .	<input type="checkbox"/>

- b) Die oft in Fahrschulen verwendeten Formeln für die näherungsweise Berechnung des Reaktions- und des Bremswegs (jeweils in m) lauten:

$$s_R = \frac{v_0}{10} \cdot 3 \quad \text{und} \quad s_B = \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 \quad \text{mit } v_0 \text{ in km/h und } s_R \text{ bzw. } s_B \text{ in m}$$

- 1) Zeigen Sie anhand geeigneter Umformungen, dass die für die näherungsweise Berechnung des Reaktionswegs verwendete Formel für eine Reaktionszeit von etwa einer Sekunde annähernd die gleichen Ergebnisse wie die Formel für s_R aus der Einleitung liefert.
 - 2) Berechnen Sie, welcher Wert für die Bremsverzögerung bei der Näherungsformel für den Bremsweg angenommen wird.
- c) Es kann eine Bremsverzögerung b von 8 m/s^2 bei trockener Fahrbahn, von 6 m/s^2 bei nasser Fahrbahn und von höchstens 4 m/s^2 bei Schneefahrbahn angenommen werden.

- 1) Geben Sie denjenigen Bruchteil an, um den bei gleicher Fahrgeschwindigkeit der Bremsweg bei nasser Fahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn ist.

Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Der Anhalteweg ist bei Schneefahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn.

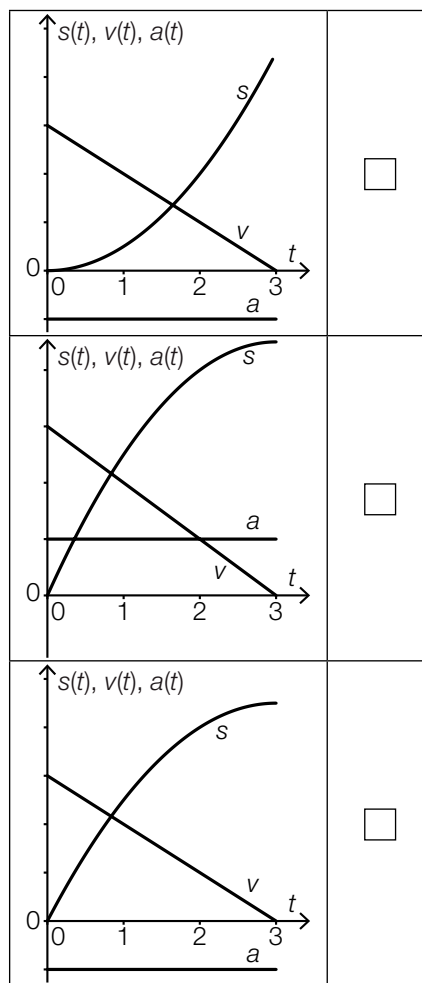
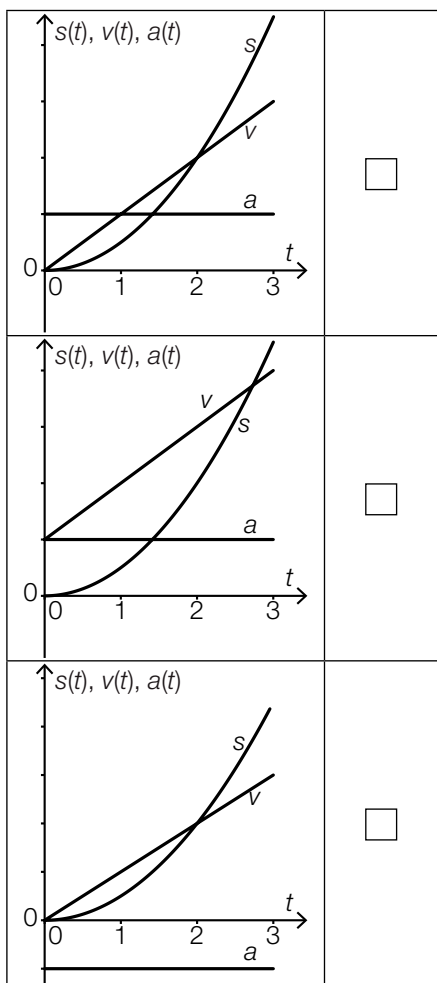
- 2) Ermitteln Sie unter der Annahme $t_R = 1 \text{ s}$ für diese beiden Fahrbahnzustände den Mindestwert für die absolute Zunahme des Anhaltewegs.

d) Das Wirksamwerden der Bremsen eines Fahrzeugs beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs kann für das Zeitintervall $[0; 3]$ durch die Funktion v modelliert werden, die Beschleunigung $a(t)$ durch die Funktion a und der in diesem Zeitintervall zurückgelegte Weg $s(t)$ durch die Funktion s ($v(t)$ in m/s , $a(t)$ in m/s^2 , $s(t)$ in m , t in s).

1) Interpretieren Sie die Bedeutung des bestimmten Integrals $\int_0^3 v(t)dt$ im gegebenen Kontext.

Jede der sechs nachstehenden Abbildungen zeigt – jeweils im Zeitintervall $[0; 3]$ – den Graphen einer Beschleunigungsfunktion a , den Graphen einer Geschwindigkeitsfunktion v und den Graphen einer Wegfunktion s .

2) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die drei zusammengehörige Graphen eines drei Sekunden dauernden Bremsvorgangs zeigt.



Lösungserwartung

a1) $v_0 = \sqrt{2 \cdot b \cdot s_B}$

a2)

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0 .	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b .	<input checked="" type="checkbox"/>

b1) mögliche Umformungen:

$$s_R = v_0 \cdot t_R$$

Für v_0 in m/s und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = v_0$

Für v_0 in km/h und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = \frac{v_0}{3,6} = v_0 \cdot 0,278... \approx v_0 \cdot 0,3 = \frac{v_0}{10} \cdot 3$

Daher liefern diese beiden Formeln annähernd die gleichen Ergebnisse.

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \text{ mit } v_0 \text{ in m/s} \Rightarrow s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \cdot \frac{1}{3,6^2} = \frac{v_0^2}{25,92 \cdot b} \text{ mit } v_0 \text{ in km/h,}$$

$$\frac{v_0^2}{25,92 \cdot b} = \frac{v_0^2}{100} \Rightarrow b \approx 3,9 \text{ m/s}^2$$

Bei der Näherungsformel wird eine Bremsverzögerung von ca. $3,9 \text{ m/s}^2$ angenommen.

c1) $\frac{\frac{v_0^2}{2 \cdot 6}}{\frac{v_0^2}{2 \cdot 8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ Bei nasser Fahrbahn ist der Bremsweg um $\frac{1}{3}$ länger als der Bremsweg bei trockener Fahrbahn.

c2) mögliche Vorgehensweise:

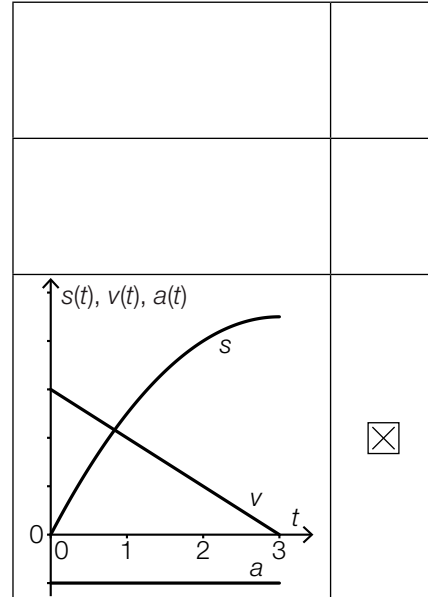
Anhalteweg bei trockener Fahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 8} = 45 \text{ m}$

Mindestwert für den Anhalteweg bei Schneefahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 4} = 70 \text{ m}$

Der Anhalteweg nimmt (bei $v_0 = 20 \text{ m/s}$ und $t_R = 1 \text{ s}$) bei Schneefahrbahn um mindestens 25 m zu.

d1) Das bestimmte Integral $\int_0^3 v(t) dt$ beschreibt den zurückgelegten Weg (in Metern) im Zeitintervall $[0; 3]$.

d2)



Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.
- b1) Ein Punkt für die Angabe geeigneter Umformungen.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s²“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: $[3,8 \text{ m/s}^2; 4 \text{ m/s}^2]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
- d1) Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.
d2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Kostenfunktion*

Aufgabennummer: 2_052

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, FA 4.1, FA 4.3, AN 3.3

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7,5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0,2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für dieses Produkt den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall [100 ME; 200 ME].

2) Ermitteln Sie, ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen.

b) Die Produktionsmenge x_{opt} , für die die Stückkostenfunktion \bar{K} mit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal ist, heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K .

1) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum x_{opt} .

Der Hersteller berechnet die Produktionskosten für die Produktionsmenge x_{opt} . Dabei stellt er fest, dass diese Kosten 65 % seines für die Produktion dieses Produkts verfügbaren Kapitals ausmachen.

2) Berechnen Sie das dem Hersteller für die Produktion dieses Produkts zur Verfügung stehende Kapital.

c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

1) Bestimmen Sie die Werte von a , b , c und d .

2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Lösungserwartung

a1) $\frac{K(200) - K(100)}{200 - 100} = \frac{66,5 - 59,35}{100} = 0,0715 \text{ GE/ME}$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$$K''(x) = 4,8 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$K''(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 312,5 \text{ ME}$$

Ab der Produktionsmenge von 312,5 ME steigen die Grenzkosten.

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$\bar{K}(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7,5 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0,2405 + \frac{42}{x}$$

$$\bar{K}'(x) = 1,6 \cdot 10^{-7} \cdot x - 7,5 \cdot 10^{-4} - \frac{42}{x^2}$$

$$\bar{K}'(x) = 0 \Rightarrow x_{\text{opt}} \approx 554,2 \text{ ME}$$

$$(\bar{K}''(x) > 0 \Rightarrow \text{Es liegt ein Minimum vor.})$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$K(554,2) \approx 81,1 \text{ GE} \Rightarrow 81,1 : 0,65 \approx 125$$

Dem Hersteller stehen für die Produktion dieses Produkts ca. 125 GE zur Verfügung.

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G'(x) = p - K'(x)$$

$$G'(600) = p - K'(600) = 0 \Rightarrow p = 0,2045 \text{ GE/ME}$$

c2) mögliche Vorgehensweise:

$$G(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 335 \quad (x_2 \approx 799, \quad x_3 \approx -196)$$

Gewinnbereich: [355 ME; 650 ME]

d1) $a \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$

$$b \approx -9,8 \cdot 10^{-3}$$

$$c \approx 2,324$$

$$d \approx 103$$

d2) $K_1(x) = 380 \Rightarrow x \approx 365 \text{ ME}$

Lösungsschlüssel

- a1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,05 GE/ME; 0,10 GE/ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- a2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [312 ME; 313 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss und eine Überprüfung, dass es sich um ein Minimum handelt, nicht durchgeführt werden muss.
Toleranzintervall: [554 ME; 555 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [120 GE; 130 GE]
- c1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,20; 0,21]
- c2)** Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Gewinnbereichs, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für x_1 : [325; 345]
- d1)** Ein Punkt für die richtigen Werte von a , b , c und d .
Toleranzintervall für a : [$1 \cdot 10^{-5}$; $2 \cdot 10^{-5}$]
Toleranzintervall für b : [$-1 \cdot 10^{-2}$; $-9 \cdot 10^{-3}$]
Toleranzintervall für c : [2; 2,5]
Toleranzintervall für d : [100; 105]
- d2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung je nach Rundung der Koeffizienten a , b , c und d variieren kann.

Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt*

Aufgabennummer: 2_053

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.3, AN 1.1, AN 1.4

Die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* werden für $n \in \mathbb{N}$ und $n > 2$ durch die Differenzgleichung $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ mit den Startwerten $f(1) = 1$ und $f(2) = 1$ definiert.

Das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ nähert sich für große Werte von n dem

Goldenen Schnitt $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ an.

Aufgabenstellung:

- a) 1) Geben Sie dasjenige n an, für das das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ erstmals auf zwei Nachkommastellen mit dem Goldenen Schnitt ϕ übereinstimmt.

Für Fibonacci-Zahlen gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $k > 2$ folgende Gleichung:

$$f(n+k) = f(n-1) \cdot f(k) + f(n) \cdot f(k+1)$$

- 2) Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung für $n = 3$ und $k = 5$.

- b) Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Bestimmung von Fibonacci-Zahlen durch einen einfachen expliziten Ausdruck ist die Approximation $f(n) \approx g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Die Zahl 832040 ist eine Fibonacci-Zahl, das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 832040$ bzw. $g(n) \approx 832040$.

- 1) Bestimmen Sie dieses n .

Eine exakte explizite Möglichkeit zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen $f(n)$ ist die Formel von Moivre/Binet:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1^n - x_2^n)$$

Dabei sind $x_1 = \phi$ und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + a \cdot x - 1 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

- 2) Berechnen Sie a und x_2 .

Lösungserwartung

a1) mögliche Vorgehensweise:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

n	$f(n)$	$f(n) : f(n-1)$
1	1	–
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666...
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615...

Für $n = 8$ stimmt das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ erstmals auf zwei Nachkommastellen mit ϕ überein.

a2) mögliche Vorgehensweise:

$$\begin{aligned} n = 3, k = 5 &\Rightarrow f(8) = f(2) \cdot f(5) + f(3) \cdot f(6) \\ &21 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \\ &21 = 21 \quad \text{w. A.} \end{aligned}$$

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \approx 832040 \Rightarrow n = 30$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Lösen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ und $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} (\approx -0,618)$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.

a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Toleranzintervall für x_2 : $[-0,62; -0,60]$

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Kino*

Aufgabennummer: 2_054

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: WS 3.2, WS 4.1

Ein Kino hat drei Säle. Im ersten Saal sind 185 Sitzplätze, im zweiten Saal 94 und im dritten Saal 76.

Neue Filme starten üblicherweise an einem Donnerstag. Der Kinobetreiber nimmt modellhaft an, dass an so einem Donnerstag bei einer Vorstellung eines neuen Films in allen drei Sälen jeder einzelne Sitzplatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % belegt ist.

Aufgabenstellung:

a) Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 355$ und $p = 0,95$.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P(X < 350)$ im gegebenen Kontext.

Zum Schulschluss mietet eine Schule alle drei Säle für denselben Film zur selben Beginnzeit. Alle Sitzplätze werden vergeben, jede Besucherin/jeder Besucher bekommt ein Ticket für einen bestimmten Sitzplatz in einem der drei Säle. Alle Tickets haben zusätzlich zur Platznummer noch eine fortlaufende, jeweils unterschiedliche Losnummer. Unmittelbar vor der Vorstellung werden zwei Losnummern ausgelost. Die beiden Personen, die die entsprechenden Tickets besitzen, erhalten jeweils eine große Portion Popcorn.

2) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass diese beiden Personen Tickets für denselben Saal haben.

b) Der Betreiber des Kinos möchte wissen, wie zufrieden seine Kundschaft mit dem gebotenen Service (Buffet, Sauberkeit etc.) ist. Bei einer Umfrage geben von 628 Besucherinnen und Besuchern 515 Besucher/innen an, dass sie mit dem gebotenen Service im Kino insgesamt zufrieden sind.

- 1) Bestimmen Sie auf Basis dieser Befragung ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil aller Besucher/innen dieses Kinos, die mit dem gebotenen Service insgesamt zufrieden sind.

Bei einer zweiten Befragung werden viermal so viele Personen befragt, wobei der relative Anteil der mit dem gebotenen Service insgesamt zufriedenen Besucher/innen wieder genauso groß wie bei der ersten Befragung ist.

- 2) Geben Sie an, wie sich diese Vergrößerung der Stichprobe konkret auf die Breite des aus der ersten Befragung ermittelten symmetrischen 95-%-Konfidenzintervalls auswirkt.

Lösungserwartung

a1) mögliche Beschreibung:

Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Vorstellung eines neuen Films (in allen drei Sälen zusammen) mindestens 350 Sitzplätze belegt sind.

a2) Anzahl der Sitzplätze insgesamt: 355

$$P = \frac{185}{355} \cdot \frac{184}{354} + \frac{94}{355} \cdot \frac{93}{354} + \frac{76}{355} \cdot \frac{75}{354} \approx 0,3858 = 38,58 \%$$

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$n = 628, h = \frac{515}{628} \approx 0,82$$

$$0,82 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,82 \cdot 0,18}{628}} \approx 0,82 \pm 0,03 \Rightarrow [0,79; 0,85]$$

b2) mögliche Interpretation:

Eine Erhöhung der Anzahl der Befragten auf das Vierfache führt (bei gleichem relativem Anteil h) zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung des Terms im gegebenen Kontext.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b1) Ein Punkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall für den unteren Wert: $[0,76; 0,80]$

Toleranzintervall für den oberen Wert: $[0,83; 0,86]$

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für die Angabe der richtigen Auswirkung auf die Breite.

Pasterze*

Aufgabennummer: 2_055

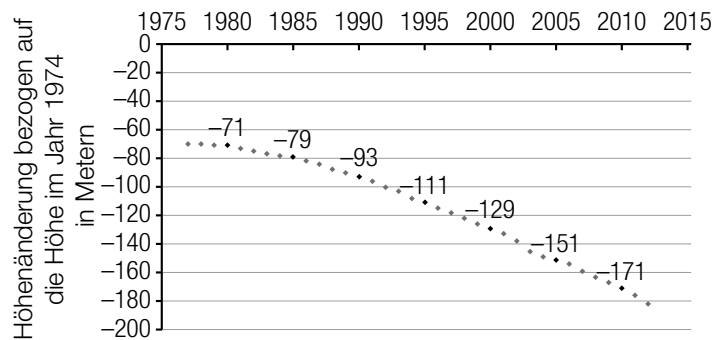
Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 2.5, WS 1.1

Die Pasterze ist der größte Gletscher Österreichs. Sie befindet sich im Großglockner-Massiv.

Aufgabenstellung:

- a) Im nachstehenden Diagramm ist die Höhenänderung der Pasterze in Metern jeweils bezogen auf die Höhe im Jahr 1947 dargestellt.



Datenquelle: <http://geographie.uni-graz.at/de/pasterze/messergebnisse/> [23.08.2014].

Auf Basis der Daten für die Höhenänderung der Pasterze für die Jahre 1995 und 2010 soll mithilfe eines linearen Modells eine Prognose für das Jahr 2020 erstellt werden.

- 1) Bestimmen Sie, um wie viele Meter die Höhe der Pasterze nach diesem Modell im Jahr 2020 geringer als im Jahr 1947 ist.

In einem Werbeprospekt soll der Rückgang der Höhe der Pasterze durch ein lineares Modell dargestellt werden.

- 2) Geben Sie an, welcher der im oben angeführten Diagramm dargestellten Fünfjahreszeiträume [1980; 1985], [1985; 1990], ..., [2005; 2010] für die Zukunft die geringste Höhenänderung prognostiziert.

b) Die Fläche der Pasterze, die im Jahr 1856 rund 30 km^2 ausgemacht hat, ging bis zum Jahr 2006 auf ca. die Hälfte zurück. Das Eisvolumen der Pasterze betrug im Jahr 2006 ca. $1,7 \text{ km}^3$.

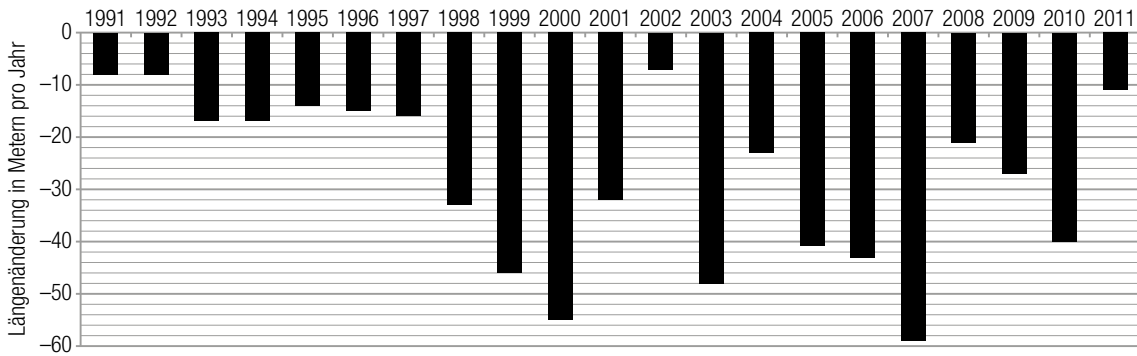
Eine mögliche Vorgehensweise für die Berechnung eines Näherungswerts für das Eisvolumen der Pasterze im Jahr 1856 ist, davon auszugehen, dass die Ausdehnung des Eises in allen drei Raumrichtungen um den gleichen Faktor abnimmt. Diese vereinfachende Annahme bedeutet, dass der Gletscher im Jahr 2006 eine maßstäbliche Verkleinerung des Gletschers aus dem Jahr 1856 ist.

1) Geben Sie an, welcher Näherungswert sich für das Eisvolumen (in km^3) der Pasterze im Jahr 1856 bei dieser Vorgehensweise ergibt.

Bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$ schmilzt Eis zu Wasser. Mit diesem Phasenübergang geht eine Verminderung des Volumens um $8,2 \%$ einher. Dieser Phasenübergang kann auch umgekehrt betrachtet werden, also dass bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$ Wasser zu Eis gefriert.

2) Geben Sie an, welche relative Änderung des Volumens mit diesem Phasenübergang (Wasser zu Eis) einhergeht.

c) Im Zeitraum von 1991 bis 2011 wurde eine Abnahme der Länge der Pasterze festgestellt. Im nachstehenden Diagramm ist die jeweils jährliche Veränderung der Länge der Pasterze in Metern pro Jahr im Zeitraum von 1991 bis 2011 dargestellt.



Datenquelle: <http://geographie.uni-graz.at/de/pasterze/messergebnisse/laengenaenderung/> [01.09.2014].

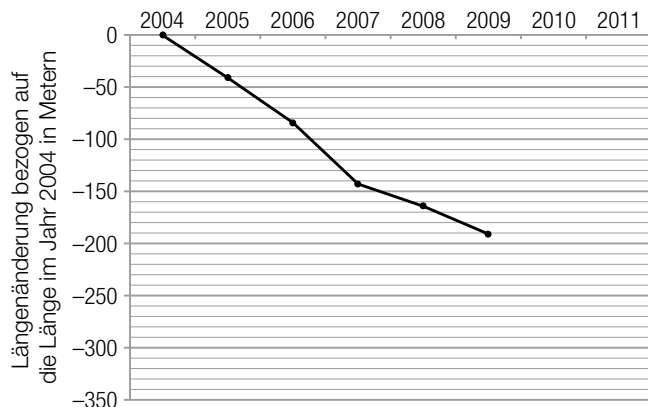
1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Im Zeitraum von 1993 bis 1997 _____ ① _____, weil die Längenänderung pro Jahr _____ ② _____.

①	
bleibt die Länge der Pasterze annähernd unverändert	<input type="checkbox"/>
nimmt die Länge der Pasterze annähernd linear ab	<input type="checkbox"/>
nimmt die Länge der Pasterze zwischendurch zu	<input type="checkbox"/>

②	
in allen fünf Jahren einen negativen Wert annimmt	<input type="checkbox"/>
im Jahr 1995 geringer als im Jahr 1994 ist	<input type="checkbox"/>
in diesem Zeitraum annähernd konstant ist	<input type="checkbox"/>

Im nachstehenden Diagramm ist die Längenänderung der Pasterze in Metern jeweils bezogen auf die Länge im Jahr 2004 für die Jahre 2004 bis 2009 dargestellt.



2) Ergänzen Sie im obigen Diagramm die Werte für die Jahre 2010 und 2011.

Lösungserwartung

a1) mögliche Vorgehensweise:

Wert 1995: -111 m

Wert 2010: -171 m

daher: durchschnittlicher Rückgang von 4 m pro Jahr

$$171 + 4 \cdot 10 = 211$$

Im Jahr 2020 wird die Höhe der Pasterze nach diesem Modell um 211 m geringer als im Jahr 1947 sein.

a2) Der Zeitraum [1980; 1985] prognostiziert für die Zukunft die geringste Höhenänderung.

b1) mögliche Vorgehensweise:

Fläche der Pasterze 1856 : Fläche der Pasterze 2006 = 2 : 1

Daraus ergibt sich ein Verhältnis der Längen $\sqrt{2} : 1$ bzw. der Volumina $(\sqrt{2})^3 : 1 \approx 2,828 : 1$.

$$2,828 \cdot 1,7 \approx 4,81 \text{ km}^3$$

Das Eisvolumen der Pasterze im Jahr 1856 betrug dieser vereinfachten Annahme nach ca. 4,81 km³.

b2) Phasenübergang von Eis zu Wasser (bei 0 °C): Verminderung des Volumens um 8,2 %

Phasenübergang von Wasser zu Eis (bei 0 °C):

$$V_{\text{Wasser}} = 0,918 \cdot V_{\text{Eis}} \Rightarrow V_{\text{Eis}} \approx 1,089 \cdot V_{\text{Wasser}}$$

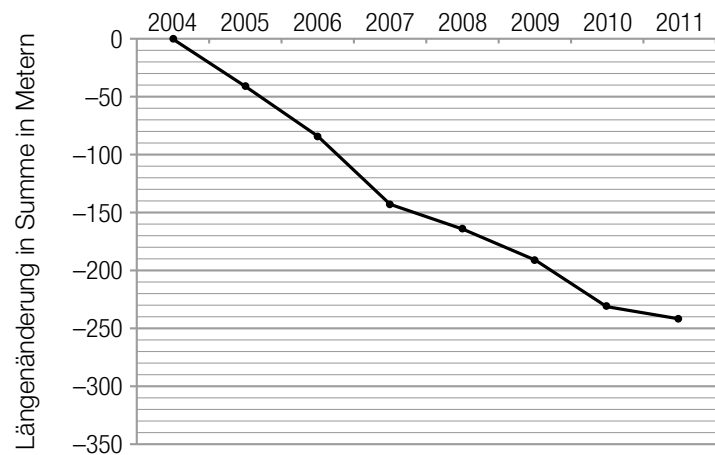
Das heißt, der Phasenübergang von Wasser zu Eis geht mit einer Vergrößerung des Volumens um ca. 8,9 % einher.

c1)

①	
nimmt die Länge der Pasterze annähernd linear ab	<input checked="" type="checkbox"/>

②	
in diesem Zeitraum annähernd konstant ist	<input checked="" type="checkbox"/>

c2)



Längenänderung der Pasterze bezogen auf ihre Länge im Jahr 2004

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angeführt sein muss.
a2) Ein Ausgleichspunkt für das richtige Intervall.
- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „km³“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [4,7 km³; 5,0 km³]
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,7 %; 9,0 %] bzw. [0,087; 0,090]
- c1) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.
c2) Ein Punkt für die Ergänzung der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für den Wert bei 2010: [-240; -220]
Toleranzintervall für den Wert bei 2011: [-260; -230]

Angebot und Nachfrage*

Aufgabennummer: 2_056

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, AN 1.3, AN 3.3

Ein Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird in der Wirtschaftswissenschaft als *Markt* bezeichnet. Gibt es auf einem Markt genau einen Anbieter für eine Ware, so ist dieser in der Lage, den Preis der Ware zu bestimmen, wobei die nachgefragte und damit absetzbare Menge der Ware vom Preis abhängt. Um bei gewissen Problemstellungen mit der Kosten-, Erlös- und/oder Gewinnfunktion arbeiten zu können, wird häufig der Preis als sogenannte Preisfunktion der Nachfrage p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x der Ware angegeben.

Die nachstehenden Aufgaben sind für die Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = 36 - x^2$ zu bearbeiten. Dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $p_N(x)$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Aufgabenstellung:

- a) Alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, für die $p_N(x) \geq 0$ gilt, liegen im Intervall $[x_0; x_n]$.
- 1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion p_N in diesem Intervall $[x_0; x_n]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf den Verkaufspreis.
 - 2) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ aus dem Intervall $(x_0; x_n)$ die Ungleichung $p_N(x_1) > p_N(x_2)$ gilt.
- b) Der Erlös durch die verkaufte Menge der Ware wird durch die Funktion E mit $E(x) = x \cdot p_N(x)$ beschrieben. Der Grenzerlös $E'(x)$ bei einer bestimmten Absatzmenge x beschreibt näherungsweise die Änderung des Erlöses bezogen auf eine zusätzlich abgesetzte Mengeneinheit.
- 1) Ermitteln Sie diejenige Menge x_E , bei der der Erlös maximal ist.
 - 2) Begründen Sie, warum der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x mit $0 < x < x_E$ positiv ist.

c) Gibt es auf einem Markt viele Anbieter einer Ware, dann werden diese in der Regel bei steigendem Preis auch eine größere Menge der Ware anbieten. Dieser Zusammenhang kann als Preisfunktion des Angebots p_A in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x beschrieben werden (mit x in ME und $p_A(x)$ in GE/ME).

Diejenige Menge der Ware, bei der der Preis für die angebotene Menge und der Preis für die nachgefragte Menge gleich groß sind, nennt man Gleichgewichtsmenge x_G . Den zugehörigen Preis nennt man Gleichgewichtspreis.

1) Ermitteln Sie für die gegebene Funktion p_N und die Funktion p_A mit $p_A(x) = 4 \cdot x + 4$ die Gleichgewichtsmenge x_G und den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Für eine Ware wird ein Preis p_M festgelegt, der um 2 GE/ME größer als der ermittelte Gleichgewichtspreis ist.

2) Bestimmen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge für diesen Preis p_M und vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die verkaufte Menge der Ware.

Lösungserwartung

a1) Intervall: $x_0 = 0$ ME, $x_n = 6$ ME \Rightarrow [0 ME; 6 ME]

mittlere Änderungsrate:
$$\frac{p_N(6) - p_N(0)}{6 - 0} = \frac{0 - 36}{6} = -6$$

mögliche Deutung:

Pro zusätzlicher Mengeneinheit, die verkauft werden soll, nimmt der Verkaufspreis im Intervall [0; 6] durchschnittlich um 6 GE/ME ab.

a2) mögliche Vorgehensweise:

Die angegebene Ungleichung besagt, dass die Funktion p_N im angegebenen Definitionsbereich streng monoton fallend ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn $p_N'(x)$ negativ (oder für einzelne Stellen null) für alle $x \in (0; 6)$ ist.

Überprüfung: $p_N'(x) = -2 \cdot x$ und es gilt: $-2 \cdot x < 0$ für alle $x \in (0; 6)$

b1) $E(x) = x \cdot p_N(x) = -x^3 + 36 \cdot x$

$E'(x) = 0 \Rightarrow -3 \cdot x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{12} \quad (x_2 = -\sqrt{12}) \Rightarrow x_E \approx 3,46$ ME

b2) mögliche Begründung:

Die Funktion E' ist eine nach unten offene Parabel, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert $E'(0) = 36$ hat und an der Stelle $x_E = \sqrt{12}$ eine Nullstelle hat. Also sind sämtliche Funktionswerte von E' (und damit der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x) im Intervall $(0; x_E)$ positiv.

c1) $p_A(x) = p_N(x) \Rightarrow 4 \cdot x + 4 = -x^2 + 36 \Rightarrow x_G = 4$ ME

Gleichgewichtspreis = $p_A(4) = p_N(4) = 20$

Bei der Gleichgewichtsmenge von $x_G = 4$ ME beträgt der zugehörige Gleichgewichtspreis 20 GE/ME.

c2) $p_M = 22$ GE/ME

angebotene Menge: $22 = 4 \cdot x + 4 \Rightarrow x = 4,5$ ME

nachgefragte Menge: $22 = -x^2 + 36 \Rightarrow x_1 = \sqrt{14} \quad (x_2 = -\sqrt{14}) \Rightarrow x \approx 3,74$ ME

möglicher Vergleich:

Die nachgefragte Menge ist kleiner als die angebotene Menge, d. h., die Ware wird nicht zur Gänze verkauft.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.
- a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis mithilfe der Differentialrechnung.

- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung. Andere richtige Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

- c1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen, und für einen richtigen Vergleich.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Einsatz von Antibiotika*

Aufgabennummer: 2_057

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 2.4, FA 3.4, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3

Die Entwicklung einer Bakterienpopulation kann durch die Zufuhr von Antibiotika beeinflusst werden, was letztlich durch die Giftwirkung von Antibiotika zum Aussterben der Bakterienpopulation führen soll.

In bestimmten Fällen kann diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion $B: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden:

$$B(t) = b \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2} \quad \text{mit } b, c, k \in \mathbb{R}^+$$

t ... Zeit in Stunden

$B(t)$... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt t

b ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt $t = 0$

k ... Konstante

c ... Parameter für die Giftwirkung

Aufgabenstellung:

- a) Die Funktion B hat genau eine positive Extremstelle t_1 .
- 1) Bestimmen Sie t_1 in Abhängigkeit von k und c .
 - 2) Geben Sie an, welche Auswirkungen eine Vergrößerung von c bei gegebenem k auf die Lage der Extremstelle t_1 der Funktion B hat.
- b) Die Funktion $B_1: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B_1(t) = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer bestimmten Bakterienpopulation in Millionen in Abhängigkeit von der Zeit t .
- Zum Zeitpunkt $t_2 \neq 0$ erreicht die Bakterienpopulation ihre ursprüngliche Anzahl von 20 Millionen.
- 1) Geben Sie t_2 an.
 - 2) Deuten Sie $B_1'(t_2)$ im vorliegenden Kontext unter Verwendung der entsprechenden Einheit.

- c) Die Funktion $B_2: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B_2(t) = 5 \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer anderen Bakterienpopulation in Millionen, die zum Zeitpunkt $t = 4$ ihr Maximum aufweist.
- 1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_3 , zu dem die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation stattfindet.
 - 2) Geben Sie an, wie viel Prozent der maximalen Anzahl an Bakterien zum Zeitpunkt t_3 noch vorhanden sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$$

$$B'(t_1) = 0$$

$$k - c \cdot t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{k}{c}$$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2}$$

$$1 = e^{2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2}$$

$$0 = 2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2 \Rightarrow t_2 = 4,4 \text{ h}$$

b2) mögliche Deutung:

$B'_1(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$B_2'''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$$

$$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = 3; t_2 = 5$$

Es gilt:

$$B_2'(3) > 0$$

und

$$B_2'(5) < 0$$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

c2) $\frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0,60653... \approx 0,6065$

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.

Toleranzintervall: [4,4 h; 4,5 h]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,60; 0,61]

Tennis*

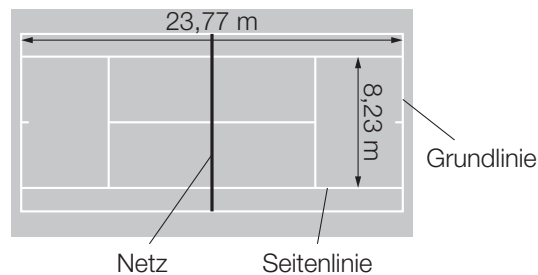
Aufgabennummer: 2_058

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0,0007 \cdot x^3 + 0,005 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x + 0,4$ beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt x die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und $f(x)$ die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an (x und $f(x)$ in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

- 1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: _____ m

- 2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

- b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient r ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt: $r = \frac{v_2}{v_1}$, wobei v_1 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und v_2 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch:

$$\Delta v = v_2 - (-v_1).$$

- 1) Geben Sie Δv in Abhängigkeit von v_1 und r an.

$$\Delta v = \underline{\hspace{10cm}}$$

Ein Tennisball trifft mit der Geschwindigkeit $v_1 = 4,4 \text{ m/s}$ lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball $r = 0,6$. Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt $0,01 \text{ s}$.

- 2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung a (in m/s^2) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

$$a = \underline{\hspace{10cm}} \text{ m/s}^2$$

- c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten m für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

p	m
0,5	0,5
0,51	0,6302
0,55	0,9512
0,6	0,9995
0,7	1,000

Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler B ein Game gewinnt.

- 1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler B .

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler C hat Spieler A einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

- 2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler C gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als bei einem Fünf-Satz-Match gegen B .

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$$f'(x) = 0$$

$$-0,0021 \cdot x^2 + 0,01 \cdot x + 0,2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12,42... \quad (x_2 = -7,66...)$$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 21,597... \quad (x_2 = -2,15..., x_3 = -12,30...)$

Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21,6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

b) Lösungserwartung:

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4,4 \cdot (1 + 0,6) = 7,04$$

$$a = 7,04 : 0,01 = 704$$

$$a = 704 \text{ m/s}^2$$

c) Lösungserwartung:

c1) $0,6302 - 0,3698 = 0,2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gegen Spieler C gewinnt:

$$0,9512$$

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gegen Spieler B gewinnt:

$$0,6302$$

$$\frac{0,9512}{0,6302} = 1,50936... \approx 1,5094$$

\Rightarrow 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel

- a1)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- a2)** Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
- b1)** Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b2)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für a : [700 m/s²; 710 m/s²]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c1)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]
- c2)** Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufzugsfahrt*

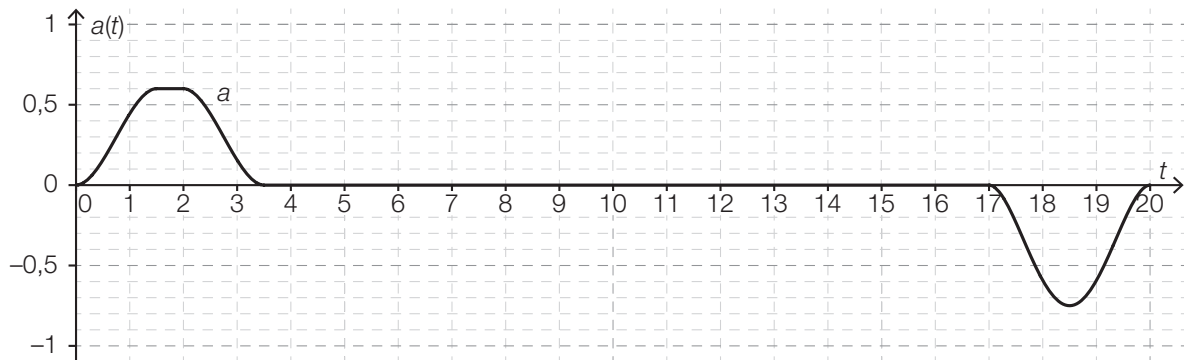
Aufgabennummer: 2_059

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 1.7, AN 1.3, AN 4.3

Die Geschwindigkeiten von Personenaufzügen können sich je nach Bauart und Gebäudehöhe sehr stark unterscheiden.

Die nachstehende Abbildung zeigt das Zeit-Beschleunigung-Diagramm für eine 20 s dauernde Aufzugsfahrt. Zu Beginn und am Ende der Fahrt steht der Aufzug still. Die Zeit t wird in Sekunden, die Beschleunigung $a(t)$ in m/s^2 angegeben. Die Beschleunigungswerte wurden mithilfe eines Sensors ermittelt und der Verlauf der Beschleunigung wurde mit einer differenzierbaren Funktion a modelliert.



Aufgabenstellung:

- a) 1) Geben Sie für jeden im Folgenden genannten Abschnitt der dargestellten Aufzugsfahrt das entsprechende Zeitintervall an.

Aufzug bremst ab: _____

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: _____

Kim behauptet, dass die Geschwindigkeit des Aufzugs im Zeitintervall $[1,5 \text{ s}; 2 \text{ s}]$ konstant bleibt.

- 2) Geben Sie an, ob Kim recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- b) 1) Ermitteln Sie anhand der gegebenen Abbildung näherungsweise die Höchstgeschwindigkeit v_{\max} während der dargestellten Aufzugsfahrt.

Der Graph der Funktion a schließt mit der t -Achse in den Zeitintervallen $[0; 3,5]$ und $[17; 20]$ jeweils ein Flächenstück ein.

- 2) Begründen Sie, warum im gegebenen Kontext die Inhalte dieser beiden Flächenstücke gleich groß sein müssen.

- c) Ein Produzent von Aufzugsanlagen plant die Herstellung eines neuen Aufzugs. Die Beschleunigung dieses Aufzugs wird in den ersten 3 Sekunden durch die differenzierbare Funktion $a_1: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$a_1(t) = \begin{cases} 0,6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0,6 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0,6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3) & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

beschrieben (t in s, $a_1(t)$ in m/s^2).

- 1) Berechnen Sie die Geschwindigkeitszunahme dieses Aufzugs im Zeitintervall $[0; 3]$.

Für den Verlauf der Fahrt müssen bestimmte Bedingungen für die Beschleunigung eingehalten werden. Der sogenannte *Ruck*, die momentane Änderungsrate der Beschleunigung, soll bei einer Fahrt mit einem Aufzug Werte zwischen -1 m/s^3 und 1 m/s^3 annehmen.

- 2) Überprüfen Sie, ob dieser Aufzug bei $t = 1$ die angeführten Bedingungen für den Ruck einhält.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) Aufzug bremst ab: [17 s; 20 s]

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: [3,5 s; 17 s]

a2) Kim hat nicht recht, da die Beschleunigung in diesem Zeitintervall konstant und positiv ist und somit die Geschwindigkeit gleichmäßig (linear) zunimmt.

b) Lösungserwartung:

b1) $\frac{3,5 + 0,5}{2} \cdot 0,6 = 1,2 \Rightarrow v_{\max} \approx 1,2 \text{ m/s}$

b2) Die Inhalte der beiden Flächenstücke müssen gleich groß sein, da die Geschwindigkeitszunahme während der Beschleunigungsphase gleich groß wie die Geschwindigkeitsabnahme während des Abbremsvorgangs sein muss.

c) Lösungserwartung:

c1) $\int_0^1 0,6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) dt + \int_1^2 0,6 dt + \int_2^3 0,6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3) dt = 1,2$
Im Zeitintervall [0; 3] beträgt die Geschwindigkeitszunahme 1,2 m/s.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$$a_1'(t) = 0 \text{ für alle } t \in [1; 2) \Rightarrow a_1'(1) = 0$$

Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Beschleunigung 0 m/s^3 . Die angeführten Bedingungen sind bei $t = 1$ eingehalten.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Zeitintervalle.
Abweichungen von bis zu $\pm 0,3$ s bei den Intervallgrenzen sind als richtig zu werten.
- a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.
- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1 m/s; 1,4 m/s]
- b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.
- c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1,1; 1,3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

E-Book*

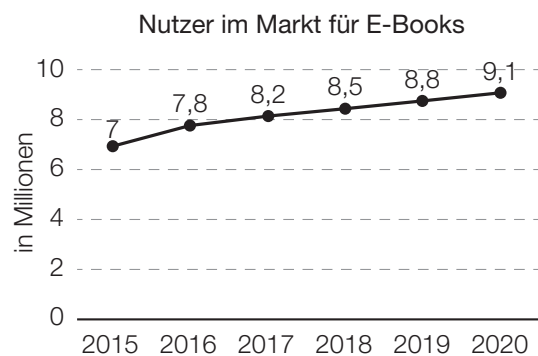
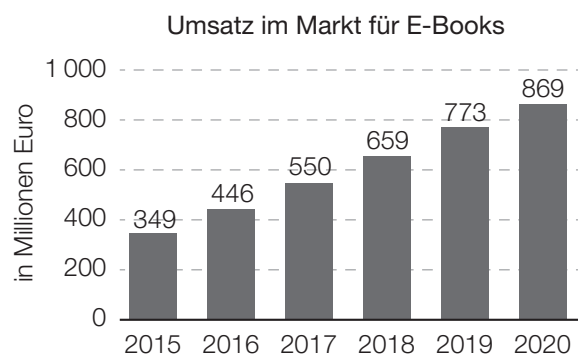
Aufgabennummer: 2_060

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 5.2, WS 2.2, WS 3.2

Ein Buch in digitaler Form wird als *E-Book* (von engl. *electronic book*) bezeichnet.

Die beiden folgenden auf Deutschland bezogenen Grafiken stellen Schätzwerte für die Entwicklung des Markts für E-Books dar:



Quelle: <http://www.e-book-news.de/20-prozent-wachstum-pro-jahr-statista-sieht-deutschen-e-book-markt-im-aufwind/>
[19.06.2019] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

- a) 1) Berechnen Sie für den geschätzten Umsatz pro Nutzer in Deutschland die absolute und die relative Änderung für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

absolute Änderung: € _____

relative Änderung: _____

- 2) Berechnen Sie den Differenzenquotienten des geschätzten Umsatzes pro Nutzer in Deutschland für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

- b) Die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wird in der oben angeführten Quelle wie folgt beschrieben:

„20 Prozent Wachstum pro Jahr“

- 1) Geben Sie an, wie die Umsatzschätzung $U(2017)$ für das Jahr 2017 hätte lauten müssen, wenn der Umsatz ausgehend vom Schätzwert von 2015 tatsächlich jährlich um 20 % zugenommen hätte.

$U(2017) =$ _____ Millionen Euro

Jemand beschreibt die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wie folgt:

„ a Millionen Euro Wachstum pro Jahr“

- 2) Berechnen Sie a .

c) Im Jahr 2015 betrug die Einwohnerzahl von Deutschland ungefähr 82,18 Millionen, jene von Österreich ungefähr 8,58 Millionen. Jemand stellt sich die folgende Frage: „Wie groß ist die Anzahl der Personen aus Österreich, die im Jahr 2015 schon E-Book-Nutzer waren?“

- 1) Beantworten Sie diese Frage unter der Annahme, dass Österreich im Jahr 2015 den gleichen (geschätzten) Anteil an E-Book-Nutzern wie Deutschland hatte.

Anzahl: _____ Personen

Im Jahr 2020 werden 500 Personen aus Österreich zufällig ausgewählt. Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen aus dieser Auswahl an, die E-Book-Nutzer sind. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person E-Book-Nutzer ist, mit 12 % angenommen.

- 2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 50 E-Book-Nutzer in dieser Auswahl sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

- a1) Umsatz pro Nutzer 2015: rund € 49,86
Umsatz pro Nutzer 2020: rund € 95,49

absolute Änderung: € 45,63
relative Änderung: 0,9155

- a2) Differenzenquotient für das Intervall [2015; 2020]: rund € 9,13 pro Jahr

b) Lösungserwartung:

- b1) $U(2017) = U(2015) \cdot 1,2^2$
 $U(2017) = 502,56$ Millionen Euro

b2) $a = \frac{869 - 349}{5} = 104$

c) Lösungserwartung:

- c1) mögliche Vorgehensweise:
 $8,58 \cdot \frac{7}{82,18} = 0,7308347... \approx 0,730835$
Anzahl: 730 835 Personen

- c2) mögliche Vorgehensweise:
 $n = 500; p = 0,12$
 $P(X \geq 50) = 0,9287... \approx 0,929$

Lösungsschlüssel

- a1)** Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [44; 47]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [0,88; 0,95]
- a2)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,90; 9,40]
- b1)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [502 Millionen Euro; 503 Millionen Euro]
- b2)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
- c1)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [720 000; 780 000]
- c2)** Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,90; 0,95]

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: 2_061

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, AN 1.1, AN 1.3, AN 4.3

Bei einem Fallschirmsprung aus einer Höhe von 4 000 m über Grund wird 30 s nach dem Absprung der Fallschirm geöffnet.

Für $t \in [0; 30]$ gibt die Funktion v_1 mit $v_1(t) = 56 - 56 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t an (t in s nach dem Absprung, $v_1(t)$ in m/s).

Für $t \geq 30$ gibt die Funktion v_2 mit $v_2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \cdot e^{-7,5}$ die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt der Landung an (t in s nach dem Absprung, $v_2(t)$ in m/s).

Modellhaft wird angenommen, dass der Fallschirmsprung lotrecht ist.

Aufgabenstellung:

a) 1) Deuten Sie $w = \frac{v_1(10) - v_1(5)}{10 - 5}$ im gegebenen Kontext.

Für ein $t_1 \in [0; 30]$ gilt: $v_1'(t_1) = w$.

2) Deuten Sie t_1 im gegebenen Kontext.

b) 1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion v_1 , in welcher Höhe der Fallschirm geöffnet wird.

2) Berechnen Sie die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs vom Absprung bis zur Landung.

- c) Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands hätte der Fallschirmspringer eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s und im Zeitintervall $[0; 30]$ eine konstante Beschleunigung von $9,81 \text{ m/s}^2$. Die Fallgeschwindigkeit 9 s nach dem Absprung beträgt dann v^* .
- 1) Berechnen Sie, um wie viel $v_1(9)$ kleiner ist als v^* .
 - 2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent 9 s nach dem Absprung die Beschleunigung des Fallschirmspringers geringer ist als bei einem Sprung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Deutungen:

Im Zeitintervall $[5; 10]$ nimmt die Fallgeschwindigkeit (in m/s) des Fallschirmspringers pro Sekunde durchschnittlich um w zu.

oder:

Die mittlere Beschleunigung des Fallschirmspringers im Zeitintervall $[5; 10]$ beträgt w (in m/s^2).

a2) mögliche Deutung:

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Momentanbeschleunigung genauso hoch wie die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall $[5; 10]$.

b) Lösungserwartung:

$$\text{b1) } 4000 - \int_0^{30} v_1(t) dt = 2543,8... \approx 2544$$

Der Fallschirm wird in einer Höhe von ca. 2544 m geöffnet.

$$\text{b2) } \int_{30}^x v_2(t) dt = 2543,8... \\ x = 531,7... \approx 532$$

Die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs beträgt ca. 532 s.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$9,81 \cdot 9 - v_1(9) = 38,192... \approx 38,19$$

$v_1(9)$ ist um ca. 38,19 m/s kleiner als v^* .

c2) mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{9,81 - v_1'(9)}{9,81} = 0,84958... \approx 0,8496$$

Die Beschleunigung unter Berücksichtigung des Luftwiderstands ist um ca. 84,96 % geringer als jene ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für eine richtige Deutung.
- a2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
- b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

- c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angegeben sein muss.
- c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Wachstumsprozesse*

Aufgabennummer: 2_062

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.5, FA 1.7, FA 5.2, FA 5.5, AN 1.4

Im Folgenden werden Wachstumsmodelle betrachtet.

Die nachstehende Differenzengleichung beschreibt ein Wachstum.

$$N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$$

N_t ... Bestand zum Zeitpunkt t

r ... Wachstumskonstante, $r \in \mathbb{R}^+$

S ... (obere) Kapazitätsgrenze

Aufgabenstellung:

- a) Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2000 Passagieren erkranken ab dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem noch kein Passagier erkrankt ist, jeden Tag 5 % der noch nicht erkrankten Passagiere. Dabei ist N_t die Anzahl der erkrankten Passagiere zum Zeitpunkt t mit t in Tagen.
- 1) Geben Sie eine Differenzengleichung für N_{t+1} an.
 - 2) Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt sind.

b) Die Differenzengleichung $N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$ lässt sich in der Form $N_{t+1} = a \cdot N_t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen.

1) Drücken Sie r und S durch a und b aus.

$$r = \underline{\hspace{15em}}$$

$$S = \underline{\hspace{15em}}$$

Zur Entwicklung eines neuen Impfstoffs wird das Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale untersucht.

In der nachstehenden Tabelle ist der Inhalt N_t (in cm^2) derjenigen Fläche angeführt, die von der Bakterienkultur zum Zeitpunkt t (in h) bedeckt wird.

t in h	N_t in cm^2
0	5,00
1	9,80
2	14,41

2) Ermitteln Sie a und b mithilfe der in der obigen Tabelle angegebenen Werte.

c) Ein Pharmaunternehmen bringt einen neuen Impfstoff auf den Markt. In der ersten Woche nach der Markteinführung haben bereits 15000 Personen den Impfstoff gekauft.

Die Anzahl $f(t)$ derjenigen Personen, die den Impfstoff innerhalb von t Wochen nach der Markteinführung gekauft haben, lässt sich modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ beschreiben ($k \in \mathbb{R}^+$).

1) Berechnen Sie k .

2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_0 , zu dem erstmals 500000 Personen diesen Impfstoff gekauft haben.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

$$\text{a1) } N_{t+1} - N_t = 0,05 \cdot (2000 - N_t) \text{ mit } N_0 = 0$$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$$N_{t+1} = N_t + 0,05 \cdot (2000 - N_t) = 0,95 \cdot N_t + 100$$

⇒ Für $N_0 = 0$ ist $N_6 > 500$.

Nach 6 Tagen sind erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt.

b) Lösungserwartung:

$$\text{b1) } N_{t+1} = (1 - r) \cdot N_t + r \cdot S \Rightarrow a = 1 - r \text{ und } b = r \cdot S$$

$$r = 1 - a$$

$$S = \frac{b}{r} = \frac{b}{1 - a}$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$\text{I: } 9,8 = 5 \cdot a + b$$

$$\text{II: } 14,41 = 9,8 \cdot a + b$$

$$a = 0,960\dots \approx 0,96 \text{ und } b = 4,997\dots \approx 5,00$$

c) Lösungserwartung:

$$\text{c1) } 15000 = 1000000 \cdot (1 - e^{-k \cdot 1}) \Rightarrow k = 0,01511\dots \Rightarrow k \approx 0,0151 \text{ pro Woche}$$

$$\text{c2) } 500000 = 1000000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t_0}) \Rightarrow t_0 = 45,8\dots \Rightarrow t_0 \approx 46 \text{ Wochen}$$

Lösungsschlüssel

- a1)** Ein Punkt für eine richtige Differenzengleichung, wobei „ $N_0 = 0$ “ nicht angegeben sein muss. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- a2)** Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [5; 6]
- b1)** Ein Punkt für die beiden richtigen Lösungen. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b2)** Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
- c1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „pro Woche“ nicht angegeben sein muss.
- c2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Woche“ nicht angegeben sein muss. (Die Lösung kann je nach Rundung von k von der angegebenen Lösung abweichen.)

Quiz mit Spielbrett*

Aufgabennummer: 2_063

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 4.1

Bei einem Quiz werden hintereinander mehrere Fragen gestellt, die jeweils mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden. Auf einem Spielbrett steht eine Spielfigur zu Beginn eines jeden Spieldurchgangs auf dem Feld mit der Zahl 0. Bei jeder richtigen Antwort wird diese Spielfigur um ein Feld nach rechts, bei jeder falschen Antwort um ein Feld nach links gezogen. Die Felder des Spielbretts sind mit ganzen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge beschriftet (siehe nachstehende Abbildung). Das Spielbrett kann auf beiden Seiten beliebig verlängert werden.



Maria und Tom spielen dieses Quiz. Tom befragt Maria.

Aufgabenstellung:

- a) Bei einem Spieldurchgang ist das Quiz zu Ende, wenn die Spielfigur auf dem Feld mit der Zahl 2 zu stehen kommt.

Mit A wird das Ereignis bezeichnet, dass die Spielfigur nach höchstens 4 Fragen auf dem Feld mit der Zahl 2 steht.

Maria beantwortet jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p richtig.

- 1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ in Abhängigkeit von p an.

$$P(A) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Wird p erhöht, so vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

- 2) Geben Sie dasjenige $p \in [0; 1]$ an, bei dem die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ am stärksten wächst (also die lokale Änderungsrate von $P(A)$ am größten ist).

- b) Bei einem anderen Spieldurchgang werden Maria genau 100 Fragen gestellt. Sie beantwortet dabei jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 richtig. Die Zufallsvariable Y gibt die Zahl desjenigen Feldes an, auf dem die Spielfigur nach der Beantwortung der 100 Fragen steht.

- 1) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$.

$$E(Y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Die Zufallsvariable Y wird durch eine normalverteilte Zufallsvariable Z angenähert. Dabei gilt: $E(Y) = E(Z)$ und die Standardabweichung σ von Z ist 8.

- 2) Ermitteln Sie das um den Erwartungswert $E(Z)$ symmetrische Intervall $[z_1; z_2]$, für das $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 95,4 \%$ gilt.

- c) Bei einem anderen Spieldurchgang beantwortet Maria alle Fragen durch Raten. Sie beantwortet somit jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 richtig.

Für jede gerade Anzahl n an Fragen mit $n \geq 2$ gilt:

$$M(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0,5^n$$

- 1) Interpretieren Sie $M(n)$ im gegebenen Kontext.

Für jede gerade Anzahl n an Fragen mit $n \geq 10$ kann $M(n)$ durch $\tilde{M}(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$ näherungsweise berechnet werden.

Für jedes gerade $n \geq 10$ gibt es ein n^* , sodass gilt: $\tilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \tilde{M}(n)$.

- 2) Bestimmen Sie n^* in Abhängigkeit von n .

$$n^* = \underline{\hspace{10cm}}$$

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $P(A) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$$f(p) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$$

$$f'(p) = 2 \cdot p + 6 \cdot p^2 - 8 \cdot p^3$$

$$f''(p) = 2 + 12 \cdot p - 24 \cdot p^2$$

$$f''(p) = 0 \Rightarrow p_1 = 0,6318... \approx 0,632 \quad (p_2 = -0,1318...)$$

$$(f'''(0,6318...) \neq 0)$$

Bei $p \approx 0,632$ wächst die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ am stärksten.

b) Lösungserwartung:

b1) $E(Y) = 100 \cdot 0,8 - 100 \cdot 0,2 = 60$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$E(Z) = 60$$

$$\sigma = 8$$

$$\text{Es gilt: } P(E(Z) - 2 \cdot \sigma \leq Z \leq E(Z) + 2 \cdot \sigma) \approx 0,954 \Rightarrow z_1 \approx 44, z_2 \approx 76 \Rightarrow [44; 76]$$

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Interpretation:

$M(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Maria genau die Hälfte der Fragen richtig beantwortet.

oder:

$M(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Spielfigur nach n Fragen auf dem Feld mit der Zahl 0 steht.

c2) $\tilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n^*}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}} \Rightarrow n^* = 4 \cdot n$$

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
- a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
- b2) Ein Punkt für ein richtiges Intervall, wobei die Angabe der beiden richtigen Werte ohne Intervallschreibweise als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall für z_1 : [44; 45]
Toleranzintervall für z_2 : [75; 76]

- c1) Ein Punkt für eine richtige Interpretation.
- c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Ozonmessungen*

Aufgabennummer: 2_064

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 3.4, FA 4.3, AN 4.3

Das Gas Ozon hat Auswirkungen auf unsere Gesundheit. Aus diesem Grund werden in Messstationen und mithilfe von Wetterballons die jeweiligen Ozonkonzentrationen in unterschiedlichen Atmosphärenschichten gemessen.

Aufgabenstellung:

- a) Auf der Hohen Warte in Wien befindet sich in 220 m Seehöhe eine Wetterstation. Hier wird für eine Messreihe ein Wetterballon mit einem Ozonmessgerät gestartet. Das Ozonmessgerät beginnt mit seinen Aufzeichnungen, wenn der Wetterballon eine Seehöhe von 2 km erreicht hat.

Nehmen Sie an, dass der Wetterballon (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s) lotrecht in die Höhe steigt und dabei gleichmäßig mit $0,125 \text{ m/s}^2$ beschleunigt, bis er zu einem Zeitpunkt t_1 eine Geschwindigkeit von 6 m/s erreicht. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Seehöhe in Metern gemessen.

- 1) Ermitteln Sie die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 .

Ab dem Zeitpunkt t_1 steigt der Wetterballon mit der konstanten Geschwindigkeit von 6 m/s lotrecht weiter.

- 2) Ermitteln Sie, wie viele Sekunden nach dem Start das Messgerät mit seinen Aufzeichnungen beginnt.

- b) Ein Wetterballon hat bei einem Luftdruck von 1 013,25 hPa ein Volumen von 6,3 m³. Durch die Abnahme des Luftdrucks während des Aufstiegs dehnt sich der Wetterballon immer weiter aus und wird näherungsweise kugelförmig. Bei einem Durchmesser von d Metern zerplatzt er.

Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Seehöhe h durch eine Funktion p modelliert werden. Dabei ordnet die Funktion p der Seehöhe h den Luftdruck $p(h)$ zu.

Es gilt: $p(h) = 1\,013,25 \cdot \left(1 - \frac{0,0065 \cdot h}{288,15}\right)^{5,255}$ mit h in m, $p(h)$ in hPa

Gehen Sie davon aus, dass der Luftdruck $p(h)$ und das Volumen $V(h)$ des Wetterballons indirekt proportional zueinander sind. Dabei ist $V(h)$ das Volumen des Wetterballons in der Seehöhe h .

- 1) Drücken Sie das Volumen $V(h)$ durch die Seehöhe h aus.

$V(h) =$ _____ mit h in m, $V(h)$ in m³

Der Wetterballon zerplatzt in einer Seehöhe von $h = 27\,873,6$ m.

- 2) Berechnen Sie den Durchmesser d des Wetterballons in Metern, bei dem dieser zerplatzt.

c) Das sogenannte *Gesamtozon* ist ein Maß für die Dicke der Ozonschicht und wird in sogenannten *Dobson-Einheiten* (DU) angegeben.

Die von einem Wetterballon aufgezeichneten Messdaten können modellhaft durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Dabei ordnet f der Höhe h die Gesamt-ozondichte $f(h)$ zu (h in km, $f(h)$ in DU/km).

Der höchste Wert von 36 DU/km wird in einer Seehöhe von 22 km gemessen. In einer Seehöhe von 37 km beträgt der gemessene Wert 1 DU/km.

1) Ermitteln Sie $f(h)$.

$$f(h) = \underline{\hspace{15cm}}$$

In der Erdatmosphäre entspricht 1 DU einer 0,01 mm dicken Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche. Die Dicke derjenigen Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche, die dem Gesamtozon zwischen 7 km und 37 km Seehöhe entspricht, ist $\int_7^{37} f(h) dh$.

2) Berechnen Sie die Dicke dieser Schicht.

Dicke dieser Schicht: $\underline{\hspace{15cm}}$ mm

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$$v(t) = 0,125 \cdot t$$

t ... Zeit in s

$v(t)$... Geschwindigkeit des Wetterballons in m/s zum Zeitpunkt t

$$v(t_1) = 6 \Rightarrow t_1 = \frac{6}{0,125} = 48$$

$$\int_0^{48} v(t) dt = 144$$

Die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 beträgt 144 m.

a2) mögliche Vorgehensweise:

verbleibende senkrechte Strecke bis zum Start der Messung:

$$2000 - 220 - 144 = 1636$$

$$\frac{1636}{6} + 48 = 320,6$$

Das Messgerät beginnt seine Aufzeichnungen ca. 321 s nach dem Start.

b) Lösungserwartung:

$$\text{b1) } V(h) = \frac{6,3}{\left(1 - \frac{0,0065 \cdot h}{288,15}\right)^{5,255}} \text{ mit } h \text{ in m, } V(h) \text{ in m}^3$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$V(27873,6) = 1150,351\dots$$

$$\frac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = 1150,351\dots \Rightarrow d = 13,0\dots \approx 13$$

Der Durchmesser des Wetterballons, bei dem dieser zerplatzt, beträgt ca. 13 m.

c) Lösungserwartung:**c1) mögliche Vorgehensweise:**

$$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$$

$$f(37) = 1$$

$$f(22) = 36$$

$$f'(22) = 0$$

$$f(h) = -\frac{7}{45} \cdot h^2 + \frac{308}{45} \cdot h - \frac{1768}{45}$$

c2) $\int_7^{37} f(h) dh = 730$

$$730 \cdot 0,01 = 7,3$$

Dicke dieser Schicht: 7,3 mm

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.**a2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.**b1)** Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.**b2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.**c1)** Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.**c2)** Ein Punkt für die richtige Lösung.

Solarthermie-Anlagen*

Aufgabennummer: 2_074

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, AN 4.3

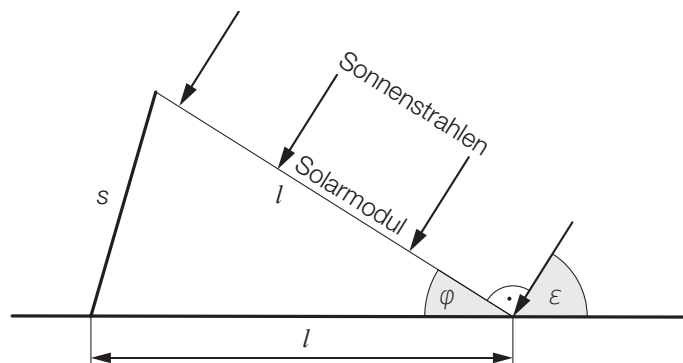
Bei Solarthermie-Anlagen wird die Sonnenstrahlung von sogenannten *Solarmodulen* in Wärme umgewandelt. Diese Wärme kann beispielsweise zur Warmwassererzeugung oder zur Heizung von Gebäuden verwendet werden.

Aufgabenstellung:

- a) Ein Solarmodul einer Solarthermie-Anlage mit der Länge l schließt mit dem waagrechten Erdboden den Winkel φ ein. Dieser Winkel φ wird durch eine Stütze mit variabler Länge s so verändert, dass das Solarmodul mit den Sonnenstrahlen einen rechten Winkel einschließt.

Die Sonnenstrahlen treffen unter dem Winkel ε auf den Erdboden auf.

Die Situation ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt.



- 1) Geben Sie eine Formel an, mit der s unter Verwendung von l und ε berechnet werden kann.

$s =$ _____

Das oben abgebildete Solarmodul hat die Länge $l = 1\,666$ mm. Bei diesem Solarmodul nimmt der Winkel ε im Laufe eines bestimmten Tages Werte von 14° bis 65° an.

- 2) Geben Sie den maximalen Wert von s an.

maximaler Wert von s : _____ mm

- b) Die Leistung einer bestimmten Solarthermie-Anlage an einem wolkenfreien Tag wird durch die Funktion P modelliert. Dabei gilt:

$$P(t) = 0,0136 \cdot a^3 \cdot t^4 - 0,272 \cdot a^2 \cdot t^3 + 1,36 \cdot a \cdot t^2$$

t ... Zeit in h, die seit dem Sonnenaufgang ($t = 0$) vergangen ist

$P(t)$... Leistung in kW zur Zeit t

a ... Parameter

Beim Sonnenaufgang und beim Sonnenuntergang beträgt die Leistung der Solarthermie-Anlage 0 kW. Zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang nimmt die Funktion P positive Werte an.

- 1) Ermitteln Sie für diese Solarthermie-Anlage den Wert des Parameters a für einen bestimmten wolkenfreien Tag, an dem die Sonne um 7:08 Uhr aufgeht und um 18:38 Uhr untergeht.

Die Arbeit, die von der Solarthermie-Anlage zwischen den zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 verrichtet wird, ist $\int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$.

- 2) Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit (in kWh).

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

$$a1) s = 2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{90^\circ - \varepsilon}{2}\right)$$

$$a2) 2 \cdot 1\,666 \cdot \sin\left(\frac{90^\circ - 14^\circ}{2}\right) = 2\,051,3\dots \approx 2\,051$$

maximaler Wert von s: ca. 2051 mm

b) Lösungserwartung:

b1) Mit $P(11,5) = 0$ erhält man den Parameter $a = \frac{20}{23}$.

$$b2) \int_0^{11,5} P(t) dt = 59,9\dots \approx 60$$

Die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit beträgt ca. 60 kWh.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „kWh“ nicht angegeben sein muss.

Benzinverbrauch*

Aufgabennummer: 2_075

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 1.1, AN 3.3

Der Benzinverbrauch eines bestimmten Kleinwagens kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit modellhaft durch die Funktion B beschrieben werden.

$$B(v) = 0,000483 \cdot v^2 - 0,0326 \cdot v + 2,1714 + \frac{66}{v} \quad \text{mit } 20 < v < 150$$

v ... Geschwindigkeit in km/h

$B(v)$... Benzinverbrauch in Litern pro 100 km (L/100 km) bei der Geschwindigkeit v

Aufgabenstellung:

- a) 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h höher als bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h ist.

_____ %

Der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ist um 25 % geringer als der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit v_1 mit $20 < v_1 < 40$.

- 2) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1 .

$v_1 =$ _____ km/h

- b) Für hohe Geschwindigkeiten soll die Funktion B durch eine lineare Funktion f mit $f(v) = k \cdot v + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ angenähert werden, sodass gilt:

$$f(100) = B(100)$$

$$f(130) = B(130)$$

- 1) A Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Funktion f .

$f(v) =$ _____

Diese Näherung kann verwendet werden, wenn die Abweichung zwischen den Funktionswerten von f und B höchstens 0,3 L/100 km beträgt.

- 2) Geben Sie das größtmögliche Intervall für die Geschwindigkeit an, in dem die Funktion f als Näherung verwendet werden kann.

- c) 1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion B diejenige Geschwindigkeit v_{\min} , bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist, sowie den zugehörigen Benzinverbrauch B_{\min} .

$$v_{\min} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km/h}$$

$$B_{\min} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ L/100 km}$$

Der Benzinverbrauch hängt auch vom Reifendruck ab.

Die Funktion g beschreibt den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck.

Dabei gilt: $g(v) = 1,02 \cdot B(v)$

- 2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g , bei welchen beiden Geschwindigkeiten der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{\min} ist.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

$$\text{a1) } \frac{B(90) - B(70)}{B(70)} = 0,2138... \approx 21,4 \%$$

$$\text{a2) } B(v_1) \cdot 0,75 = B(40) \\ v_1 = 24,24... \text{ km/h}$$

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$f(100) = B(100) = 4,40...$$

$$f(130) = B(130) = 6,60...$$

$$f(v) = 0,0734... \cdot v - 2,9399...$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$D(v) = B(v) - f(v)$$

$$D(v) = 0,3$$

$$(v_1 = -10,94...)$$

$$v_2 = 87,08...$$

$$v_3 = 143,34...$$

Da die Funktion D an der Stelle $v = 114,91... \text{ km/h}$ eine Minimumstelle mit dem Funktionswert $-0,1 > -0,3$ hat, erhält man das Intervall $[87,1 \text{ km/h}; 143,3 \text{ km/h}]$.

c) Lösungserwartung:

$$\text{c1) } v_{\min} = 55,73... \text{ km/h} \\ B_{\min} = 3,03... \text{ L/100 km}$$

$$\text{c2) } g(v) = B_{\min} + 2 \\ v_1 = 20,41... \text{ km/h} \\ v_2 = 108,67... \text{ km/h}$$

Bei Geschwindigkeiten von ca. 20,4 km/h und ca. 108,7 km/h ist der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{\min} .

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
- a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

- b1) Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm. Äquivalente Funktionsterme sind als richtig zu werten.
- b2) Ein Punkt für das richtige Intervall, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

- c1) Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
- c2) Ein Punkt für die beiden richtigen Geschwindigkeiten, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

Bevölkerungswachstum in Afrika*

Aufgabennummer: 2_083

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

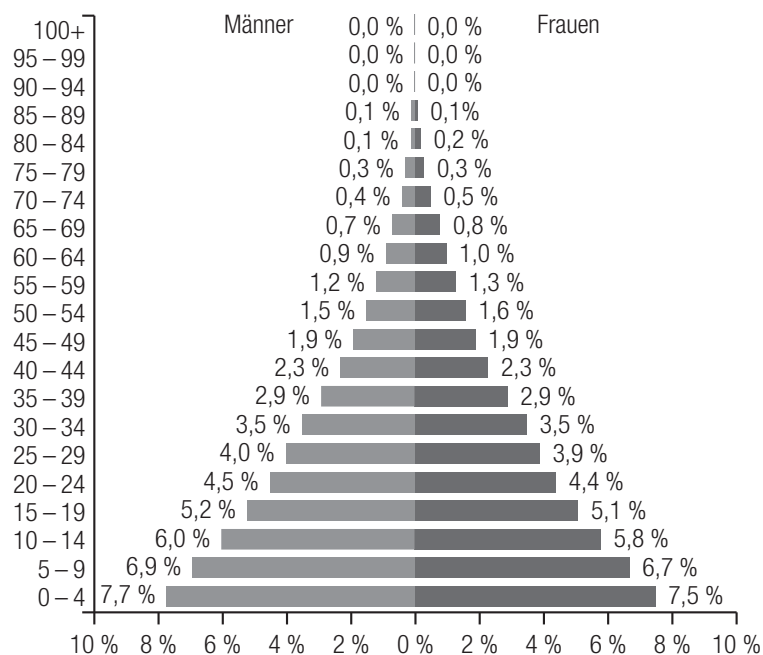
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.5, AN 1.1, AN 1.3, WS 1.1, WS 1.3

Afrika hatte Ende 2018 eine Bevölkerung von ca. 1,3 Milliarden Menschen und verzeichnet derzeit das stärkste Bevölkerungswachstum aller Kontinente.

Aufgabenstellung:

- a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Alterspyramide der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.

Der Alterspyramide ist z. B. zu entnehmen, dass im Kalenderjahr 2018 galt: 4,5 % der afrikanischen Bevölkerung sind Männer mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren und 4,4 % der afrikanischen Bevölkerung sind Frauen mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren. Unter *Lebensalter* versteht man die Anzahl vollendeter Lebensjahre.



Datenquelle: <https://www.populationpyramid.net/de/afrika/2018> [10.05.2019].

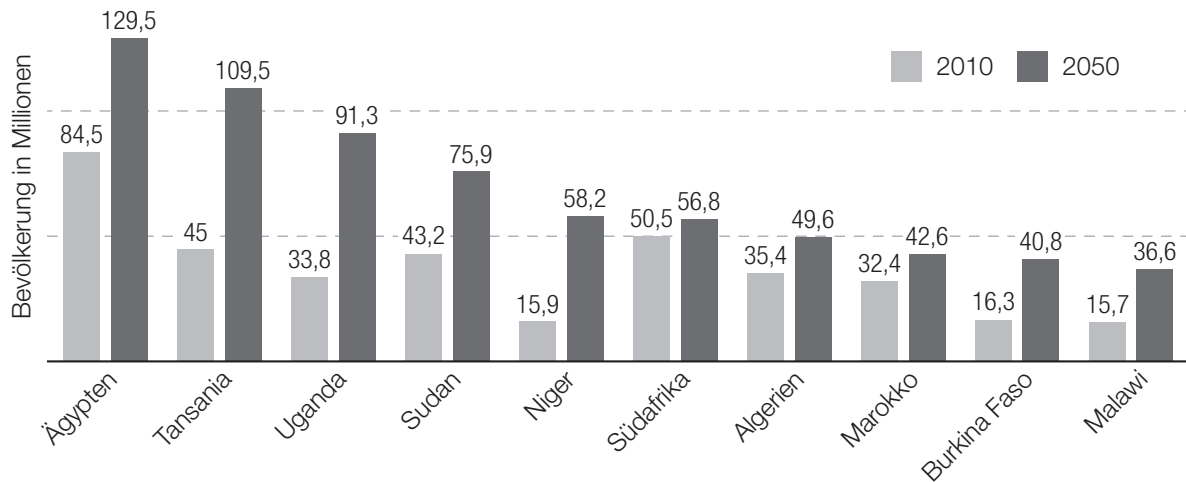
Nehmen Sie modellhaft an, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten.

- 1) Bestimmen Sie anhand der Alterspyramide den Median m des Lebensalters der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.

$m =$ _____ Jahre

- 2) Geben Sie die Anzahl an Afrikanerinnen und Afrikanern an, die im Kalenderjahr 2018 jünger als m Jahre waren.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die prognostizierte Bevölkerungsentwicklung (Angaben in Millionen) im Zeitraum von 2010 bis 2050 in ausgewählten afrikanischen Ländern.



Datenquelle: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/159204/umfrage/prognose-zur-bevoelkerungsentwicklung-in-afrika-bis-2050/> [10.05.2019].

- 1) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, das laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 am stärksten zum absoluten Bevölkerungswachstum in Afrika beitragen wird.
- 2) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, in dem laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 das stärkste relative Bevölkerungswachstum erfolgt.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Nigeria im Zeitraum von 1980 bis 2010.

Kalenderjahr	1980	1990	2000	2010
Bevölkerungszahl in Millionen	73,5	95,3	122,4	158,6

- 1) Zeigen Sie anhand der Tabelle, dass die Bevölkerungszahl im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd exponentiell zugenommen hat.

Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungszahl von Nigeria weiterhin in dieser Art exponentiell wachsen wird.

- 2) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den beiden Kalenderjahren 2000 und 2010 an, in welchem Kalenderjahr die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen wird.

- d) Die nachstehende Tabelle zeigt, wie sich die durchschnittliche Lebenserwartung der afrikanischen Bevölkerung seit 1953 entwickelt hat.

Kalenderjahr	durchschnittliche Lebenserwartung in Jahren
1953	37,5
1958	40,0
1963	42,3
1968	44,4
1973	46,6
1978	48,7
1983	50,5
1988	51,7
1993	51,7
1998	52,3
2003	53,7
2008	57,0
2013	60,2
2018	62,4

- 1) Berechnen Sie die mittlere jährliche Zunahme k der durchschnittlichen Lebenserwartung im Zeitraum von 1953 bis 2018.

Es wird angenommen, dass die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika nach dem Kalenderjahr 2018 konstant pro Jahr um den berechneten Wert k zunimmt. Im Kalenderjahr 2018 betrug die durchschnittliche Lebenserwartung in Europa 78,5 Jahre.

- 2) Geben Sie an, in welchem Kalenderjahr die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika unter dieser Annahme den Wert für Europa im Kalenderjahr 2018 erreichen würde.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $m = 19$ Jahre

a2) Aufgrund der Annahme, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten, sind 4,16 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Männer im Alter von 15 bis 18 Jahren und 4,08 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Frauen im Alter von 15 bis 18 Jahren.

$$7,7 \% + 7,5 \% + 6,9 \% + 6,7 \% + 6,0 \% + 5,8 \% + 4,16 \% + 4,08 \% = 48,84 \%$$

$$1,3 \cdot 10^9 \cdot 0,4884 = 6,3492 \cdot 10^8 \approx 635 \text{ Millionen Menschen}$$

b) Lösungserwartung:

b1) Tansania

b2) Niger

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Begründungen:

Die (mittleren) jährlichen Wachstumsraten sind im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd konstant:

1980 bis 1990: ca. 2,6 %

1990 bis 2000: ca. 2,5 %

2000 bis 2010: ca. 2,6 %

oder:

Die prozentuellen Wachstumsraten sind in den 10-Jahres-Zeiträumen von 1980 bis 2010 annähernd konstant:

1980 bis 1990: ca. 30 %

1990 bis 2000: ca. 28 %

2000 bis 2010: ca. 30 %

oder:

Die gegebenen Daten können gut mit einer Exponentialfunktion N mit der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot 1,026^t$ beschrieben werden. Die Funktionswerte weichen nur geringfügig von den Tabellenwerten ab.

c2) $360 = 122,4 \cdot 1,0262\dots^t \Rightarrow t = 41,6\dots \approx 42$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2042 die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen.

d) Lösungserwartung:

$$\text{d1) } k = \frac{62,4 - 37,5}{65} = 0,3830... \Rightarrow k \approx 0,383 \text{ Lebensjahre pro Kalenderjahr}$$

$$\text{d2) } 62,4 + t \cdot 0,3830... = 78,5$$
$$t = 42,028... \approx 42,03$$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2060 in Afrika die durchschnittliche Lebenserwartung den Wert 78,5 Jahre erreichen.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

c1) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch das Kalenderjahr 2041 als richtig zu werten ist.

d1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Lebensjahre pro Kalenderjahr“ nicht angegeben sein muss.

d2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Kalenderjahrs, wobei auch die Kalenderjahre 2058, 2059 und 2061 als richtig zu werten sind.

Sicherheitskontrolle*

Aufgabennummer: 2_096

Aufgabentyp: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, FA 1.5, AN 4.3

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

Aufgabenstellung:

- a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Dauer d (in s) der Sicherheitskontrolle bei einer Person. Wartezeiten, die eventuell auftreten können, werden nicht berücksichtigt.
- 1) Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X .

d			
$P(X = d)$			

- 2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.
- b) Der Wert p gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person einen unzulässigen Gegenstand mit sich führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen beide einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen, beträgt 10 %.
- 1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p .
- 2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen mindestens 5 Personen einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

- c) Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion kann mithilfe der Funktion A mit $A(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 90$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Einlass ins Stadion beginnt (t in Minuten, $A(t)$ in Personen pro Minute).

Zum Zeitpunkt $t = 0$ kommt keine Person ins Stadion, 45 min nach Einlassbeginn kommen 15 Personen pro Minute ins Stadion. Zu diesem Zeitpunkt ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der ins Stadion kommenden Personen pro Minute am größten.

- 1) Berechnen Sie die Werte von a , b und c .
- 2) Geben Sie die Anzahl der Personen an, die insgesamt bis zum Zeitpunkt $t = 90$ ins Stadion gekommen sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1)

d	15	30	330
$P(X = d)$	0,9	$0,1 \cdot 0,6 = 0,06$	$0,1 \cdot 0,4 = 0,04$

a2) $E(X) = 15 \cdot 0,9 + 30 \cdot 0,06 + 330 \cdot 0,04 = 28,5$

b) Lösungserwartung:

b1) $p^2 = 0,1 \Rightarrow p = 0,31622... \approx 0,3162$

b2) Y ... Anzahl der Personen, die einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen
 Y ist binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0,31622...$

$P(Y \geq 5) = 0,1794... \approx 0,179$

c) Lösungserwartung:

c1) $A(0) = 0$, $A(45) = 15$, $A'(45) = 0$

$a = -\frac{1}{135}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 0$

c2) $\int_0^{90} A(t) dt = 900$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Ergänzung der richtigen Werte in der Tabelle.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der drei richtigen Werte.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 2_002

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Eine Universität führt für die angemeldeten Bewerber/innen einen Aufnahmetest durch. Dabei werden zehn Multiple-Choice-Fragen gestellt, wobei jede Frage vier Antwortmöglichkeiten hat. Nur eine davon ist richtig. Wer mindestens acht Fragen richtig beantwortet, wird sicher aufgenommen. Wer alle zehn Fragen richtig beantwortet, erhält zusätzlich ein Leistungsstipendium. Die Ersteller/innen dieses Tests geben die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Ankreuzen aller Fragen aufgenommen zu werden, mit 0,04158 % an. Nehmen Sie an, dass Kandidat K alle Antworten völlig zufällig ankreuzt.

Aufgabenstellung:

- a) Nennen Sie zwei Gründe, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt ist!
Geben Sie einen möglichen Grund an, warum in der Realität das Modell der Binomialverteilung hier eigentlich nicht anwendbar ist!
- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält!

Möglicher Lösungsweg

- a) Dieser Aufgabenteil ist durch sinngemäßes Angeben von mindestens zwei der vier angeführten Gründe richtig gelöst:

Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Angaben binomialverteilt, weil

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet“ und „falsch beantwortet“ gibt
- das Experiment unabhängig mit $n = 10$ Mal wiederholt wird
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt
- es sich dabei um ein „Bernoulli-Experiment“ handelt

Der zweite Aufgabenteil ist korrekt gelöst, wenn ein Grund (sinngemäß) angeführt wird, z. B.:

- Eine Bewerberin/ein Bewerber, die/der sich für ein Studium interessiert, wird sicher nicht beim Aufnahmetest zufällig ankreuzen.
- Sobald Kandidat K auch nur eine Antwortmöglichkeit einer Frage ausschließen kann, wäre die Voraussetzung für die Binomialverteilung verletzt. Genau aus diesem Grund wird die Universität mit zehn Multiple-Choice-Fragen nicht das Auslangen finden, da die Erfolgswahrscheinlichkeit für kompetenzbasiertes Antworten sicher wesentlich höher ist als 0,25.
- Die Unabhängigkeit der Wiederholung des Zufallsexperiments ist sicher dadurch verletzt, dass die einzelnen Kandidatinnen und Kandidaten aufgrund ihrer Vorbildung unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten für die Beantwortung der einzelnen Fragen aufweisen. Somit kann unter diesen Voraussetzungen niemals von einer unabhängigen Wiederholung mit Zählen der Anzahl der Erfolge im Sinne eines Bernoulli-Experiments gesprochen werden.

Es sind auch weitere eigenständige Lösungen denkbar.

- b) Für die Lösung ist keine Binomialverteilung nötig, da das gesuchte Ereignis das Gegenereignis zur „Aufnahme“ darstellt. Somit beträgt die (von den Testautorinnen und Testautoren) angegebene Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Ablehnung}) = 1 - P(\text{Aufnahme}) = 1 - 0,0004158 = 0,9995842$$

Die Ablehnung des Kandidaten K ist somit praktisch sicher.

Auch hier ist keine Binomialverteilung nötig, da ein Zufallsexperiment mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,25 zehnmal unabhängig wiederholt wird, wobei bei jeder Wiederholung ein „Erfolg“ eintritt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit $P(\text{Leistungsstipendium}) = 0,25^{10} \approx 0$.

Section Control

Aufgabennummer: 2_003

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: WS 1.1, WS 1.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 3.3

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

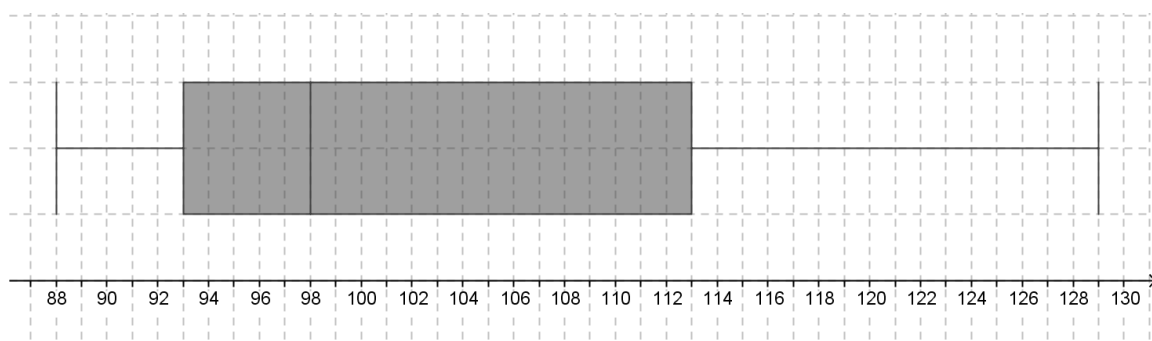
besondere Technologie erforderlich

Der Begriff *Section Control* (Abschnittskontrolle) bezeichnet ein System zur Überwachung von Tempolimits im Straßenverkehr, bei dem nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen wird, sondern die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine längere Strecke. Dies geschieht mithilfe von zwei Überkopfkontrollpunkten, die mit Kameras ausgestattet sind. Das Fahrzeug wird sowohl beim ersten als auch beim zweiten Kontrollpunkt fotografiert.

Die zulässige Höchstgeschwindigkeit bei einer bestimmten Abschnittskontrolle beträgt 100 km/h. Da die Polizei eine Toleranz kleiner 3 km/h gewährt, löst die *Section Control* bei 103 km/h aus. Lenker/innen von Fahrzeugen, die dieses Limit erreichen oder überschreiten, machen sich strafbar und werden im Folgenden als „Temposünder“ bezeichnet.

Eine Stichprobe der Durchschnittsgeschwindigkeiten von zehn Fahrzeugen ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet und im abgebildeten Boxplot dargestellt.

v in km/h	88	113	93	98	121	98	90	98	105	129
-----------	----	-----	----	----	-----	----	----	----	-----	-----



Aufgabenstellung:

- a) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert \bar{x} und die empirische Standardabweichung s der Durchschnittsgeschwindigkeiten in der Stichprobe!

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) zur Standardabweichung an!

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	<input type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	<input type="checkbox"/>
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	<input type="checkbox"/>
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	<input type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von \bar{x} .	<input type="checkbox"/>

- b) Bestimmen Sie aus dem Boxplot (Kastenschaubild) der Stichprobe den Median sowie das obere und untere Quartil! Geben Sie an, welche zwei Streumaße aus dem Boxplot ablesbar sind! Bestimmen Sie auch deren Werte!
- c) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens 103 km/h zu erfassen, 14 % beträgt. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Temposünder unter fünfzig zufällig ausgewählten Fahrzeugenkern! Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der Temposünder unter fünfzig Fahrzeugenkern innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert, d. h. im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt!

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = 103,3 \text{ km/h}$
 $s = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 13,6 \text{ km/h}$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung um den arithmetischen Mittelwert.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist immer ca. ein Zehntel des arithmetischen Mittelwerts.	<input type="checkbox"/>
Die Varianz ist die quadrierte Standardabweichung.	<input checked="" type="checkbox"/>
Im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ der obigen Stichprobe liegen ca. 60 % bis 80 % der Werte.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Standardabweichung ist der arithmetische Mittelwert der Abweichungen von \bar{x} .	<input type="checkbox"/>

b) Daten aus dem Boxplot: Median ... 98 km/h; unteres Quartil ... 93 km/h;
 oberes Quartil ... 113 km/h; Spannweite ... 41 km/h;
 Quartilsabstand ... 20 km/h

c) Lösung mittels Binomialverteilung

$$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,14 = 7$$

$$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 2,45$$

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(5 \leq X \leq 9) = \\ &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = \\ &= 0,1286 + 0,1570 + 0,1606 + 0,1406 + 0,1068 = 0,6936 = 69,36 \% \end{aligned}$$

Wachstum einer Pflanze

Aufgabennummer: 2_004

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.3, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

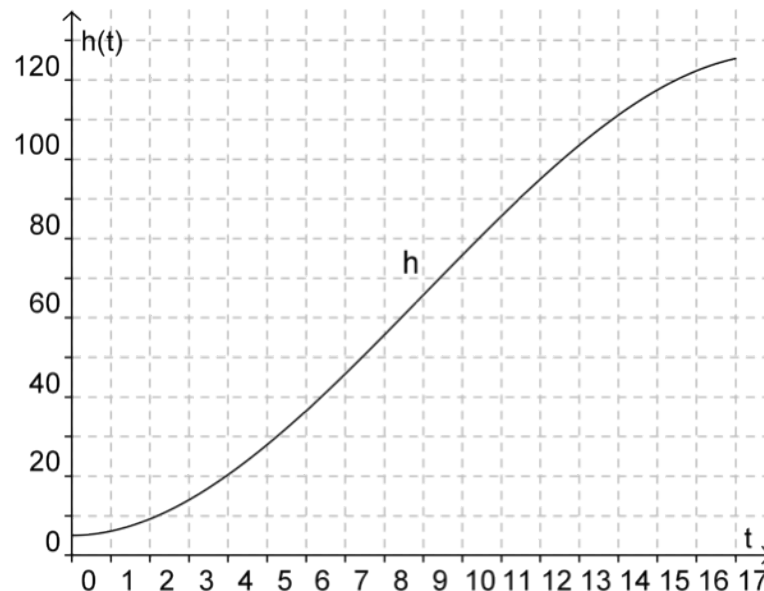
besondere Technologie
erforderlich

Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die endgültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m.

In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe h dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit

$h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27t^2 + 120)$ modelliert. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen seit der

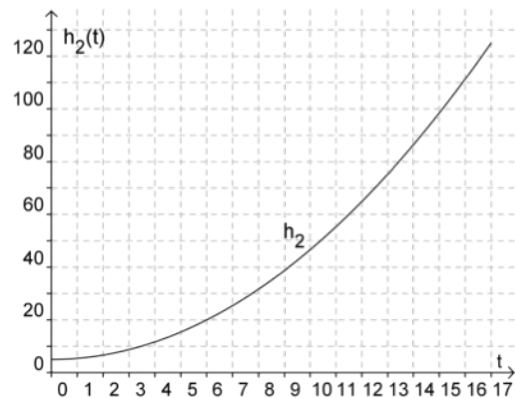
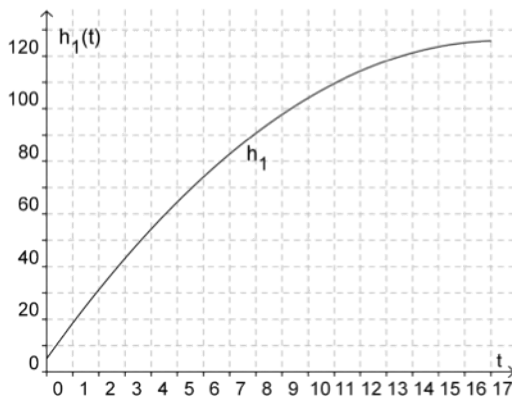
Pflanzung und $h(t)$ die Höhe zum Zeitpunkt t in Zentimetern. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum $[0; 17]$.



Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie den Wert des Quotienten $\frac{h(13) - h(9)}{4}$ und den Wert von $h'(9)$! Geben Sie an, welche Bedeutung die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext haben!

- b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion h im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt hat! Begründen Sie Ihre Rechenschritte!
- c) Für das Wachstum der beobachteten Pflanze ist auch die entsprechende Düngung von Bedeutung. Im gegebenen Fall wurde die Pflanze zwei Wochen vor dem Zeitpunkt des stärksten Wachstums gedüngt. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt durch Rechnung! Begründen Sie Ihre Überlegungen!
- d) Im selben Zeitraum wurde das Höhenwachstum von zwei weiteren Pflanzen der gleichen Sorte beobachtet und modelliert. Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen der entsprechenden Funktionen h_1 und h_2 .



Vergleichen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen h , h_1 und h_2 im Intervall $[0; 17]$ und interpretieren Sie es im Hinblick auf das Wachstum der drei Pflanzen!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{h(13) - h(9)}{4} \approx 9,47$

$$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$$

$$h'(9) \approx 10,13$$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall [9; 13] beträgt rund 9,5 cm pro Woche. Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 9$, d. h. nach 9 Wochen, beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

- b) In einem lokalen Hochpunkt muss die Tangente an den Graphen horizontal sein, d. h., die 1. Ableitung muss den Wert 0 haben.

$$h'(t) = \frac{1}{24} \cdot (-3t^2 + 54t) = \frac{1}{8} \cdot (-t^2 + 18t)$$

$$t \cdot (-t + 18) = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 18$$

Die Funktion hat an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum und an der Stelle $t = 18$ ein lokales Maximum. Der Wert $t = 18$ liegt nicht im Beobachtungsintervall, d. h., die Funktion hat im gegebenen Intervall keinen lokalen Hochpunkt.

c) $h''(t) = \frac{1}{4} \cdot (-t + 9)$

Die Kurve ist für $t < 9$ linksgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt zu. Die Kurve ist für $t > 9$ rechtsgekrümmt, d. h., die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt ab. Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 9 Wochen am größten. Die Pflanze wurde also am Beginn der 8. Woche gedüngt.

Ein weiterer Lösungsansatz wäre, das Maximum der Wachstumsfunktion (also von h') zu bestimmen.

- d) Die Funktion h_1 ist rechtsgekrümmt, die Funktion h_2 ist linksgekrümmt, das Krümmungsverhalten der Funktion h ändert sich. Das bedeutet, die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_1 beschrieben wird, wird immer kleiner (sie wächst immer langsamer) und die Wachstumsgeschwindigkeit derjenigen Pflanze, die durch h_2 beschrieben wird, wird immer größer (sie wächst immer schneller).

Im Vergleich dazu ändert sich das Monotonieverhalten der Wachstumsgeschwindigkeit bei derjenigen Pflanze, die durch h beschrieben wird, an der Stelle $t = 9$ [vgl. c)].

Mathematikschularbeiten

Aufgabennummer: 2_005

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: WS 2.2, WS 3.1, WS 3.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Wenn in der Oberstufe in einem Semester höchstens zwei Mathematikschularbeiten vorgesehen sind, muss jede versäumte Schularbeit nachgeholt werden.

Ein Mathematiklehrer hat auf Basis seiner langjährigen Erfahrung die untenstehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	> 7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie an, mit wie vielen Fehlenden der Mathematiklehrer im Durchschnitt bei jeder Schularbeit rechnen muss!

Lässt sich aus dem errechneten Durchschnittswert mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt? Begründen Sie Ihre Antwort!

- b) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	<input type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	<input type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	<input type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	<input type="checkbox"/>
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	<input type="checkbox"/>

In einer bestimmten Klasse werden im kommenden Schuljahr vier Schularbeiten (zwei pro Semester) geschrieben.

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Mathematikschularbeiten dieser Klasse, die aufgrund fehlender Schüler/innen nachgeholt werden müssen, berechnet werden kann!

$$P(X = k) = \dots\dots\dots \text{ mit } k = \dots\dots\dots$$

Möglicher Lösungsweg

- a) Im Durchschnitt muss der Mathematiklehrer mit 2,42 Fehlenden rechnen.

Eine auf ganze Zahlen gerundete Antwort ist nicht korrekt, da der Erwartungswert nur statistische Aussagekraft hat und somit die Rundung die Aussage verändert.

Daraus lässt sich aber nicht mit Sicherheit behaupten, dass bei jeder Mathematikschularbeit jemand fehlt, da es sich dabei um eine statistische Kenngröße handelt, die keine konkrete Aussage über die einzelne Schularbeit erlaubt.

Eine Schülerantwort, die darauf abzielt, dass es entsprechend der empirischen Häufigkeitsverteilung mit 15%iger Häufigkeit zu keinem Fehlen kommt, ist als nicht korrekt zu bewerten, da in der Aufgabenstellung verlangt wird, den Erwartungswert zu interpretieren.

b)

Es kann nie passieren, dass acht Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mathematikschularbeit niemand fehlt, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin/ein Schüler fehlt.	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Mathematikschularbeit fehlen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei oder mindestens vier Schüler/innen fehlen.	
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schularbeit nachgeholt werden muss, weil mindestens eine Schülerin/ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	<input checked="" type="checkbox"/>
Im Durchschnitt muss eine von vier Schularbeiten pro Jahr nicht nachgeholt werden.	

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0,85^k \cdot 0,15^{4-k} \text{ mit } k = 0, 1, \dots, 4$$

Ärztliche Untersuchung an einer Schule

Aufgabennummer: 2_006

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

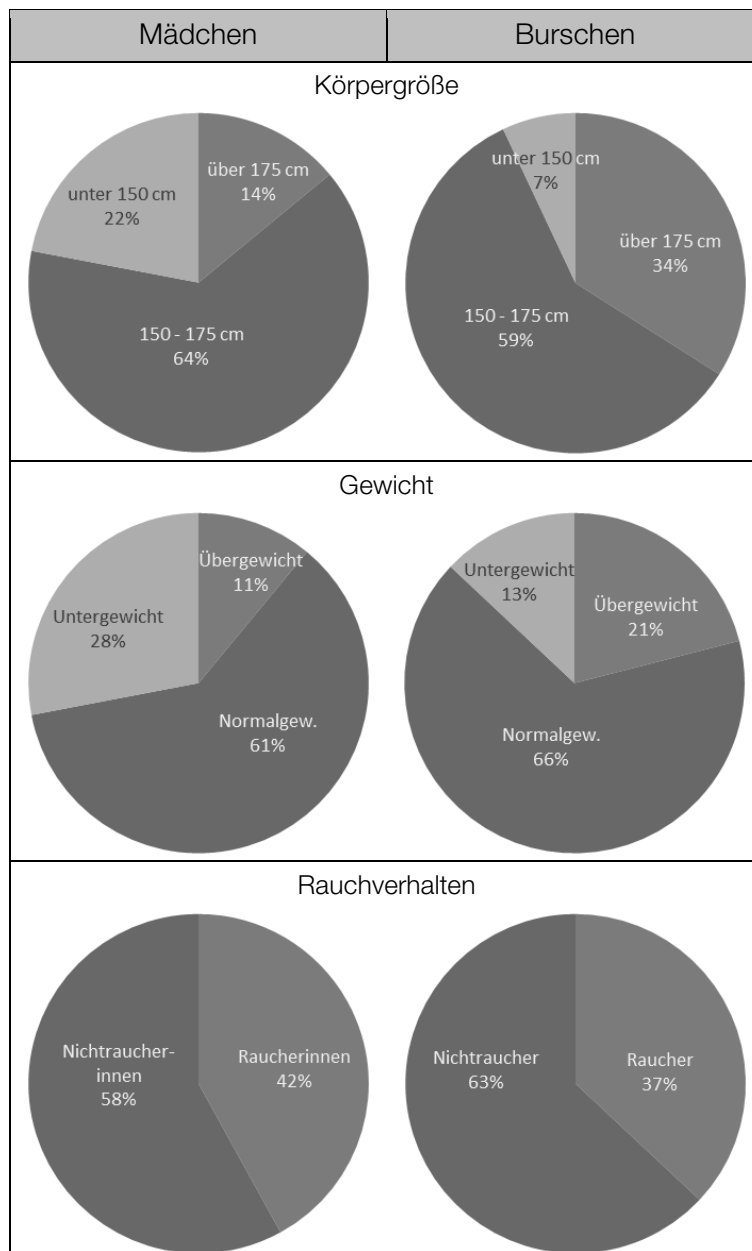
Grundkompetenzen: WS 2.2, WS 3.1, WS 3.2

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

Eine Schulärztin hat die Untersuchung der Oberstufenschüler/innen einer Schule abgeschlossen. Die Auswertung der Ergebnisse ist in den nachstehenden Abbildungen grafisch dargestellt.



Von den einzelnen Klassen wurde dabei folgende Schüleranzahl erfasst:

Klasse	5A	5B	6A	6B	7A	7B	8A	8B
weiblich	18	22	20	16	16	15	12	18
männlich	14	9	7	9	10	11	13	8
gesamt	32	31	27	25	26	26	25	26

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie auf Basis der erhobenen Daten einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis an, wobei angenommen wird, dass die angegebenen Prozentsätze unabhängig von der Schulstufe sind:

„In den 5. Klassen gibt es höchstens 2 Raucherinnen.“

In dieser Schule wurden die Schüler/innen nicht nach Klassen geordnet untersucht, sondern jede/r entschied selbst, wann sie/er zur Schulärztin ging (zufällige Reihenfolge angenommen).

Wie viele Schüler/innen musste die Schulärztin untersuchen, um mit absoluter Sicherheit mindestens eine Raucherin/einen Raucher aus den 5. Klassen zu finden, wenn sie weiß, dass es in den 5. Klassen mindestens eine/n davon gibt?

- b) Auf Basis der oben angeführten Daten wurde für die Burschen eines Jahrgangs der folgende statistische Kennwert ermittelt:

$$\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0,34 = 7,82$$

Was drückt dieser Kennwert aus? Interpretieren Sie diesen Kennwert im gegebenen Zusammenhang und nutzen Sie dabei sowohl die grafische Abbildung der Untersuchungsergebnisse als auch die tabellarische Übersicht über die Klassenschülerzahlen.

Ist der so errechnete Kennwert aussagekräftig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Möglicher Lösungsweg

a) X ... Anzahl der Raucherinnen aus allen 5. Klassen

X ... Binomialverteilung mit $n = 40$, $p = 0,42$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{40}{0} \cdot 0,42^0 \cdot 0,58^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0,42^1 \cdot 0,58^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0,42^2 \cdot 0,58^{38}$$

Da in der Angabe nur statistische Aussagen gemacht werden, aufgrund derer nicht mit Sicherheit behauptet werden kann, ob es mehr als eine Raucherin/einen Raucher in den 5. Klassen gibt, müssen alle Schüler/innen untersucht werden, um mit Sicherheit eine Raucherin/einen Raucher in der 5. Klasse zu finden.

b) In allen 5. Klassen zusammen gibt es 23 Burschen. Der Prozentsatz der Burschen mit einer Körpergröße von über 175 cm beträgt 34 %.

Somit drückt der berechnete Wert $\mu = n \cdot p = 23 \cdot 0,34 = 7,82$ die Anzahl der zu erwartenden Burschen in den 5. Klassen mit einer Körpergröße von über 175 cm aus.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort sind:

- sinngemäße Formulierung für „Erwartungswert“
- Burschen aus 5. Klassen mit über 175 cm Körpergröße

Eine Rundung auf 8 ist in diesem Zusammenhang als falsch zu werten, da es sich bei μ nur um einen statistischen Kennwert und nicht um einen realen Ausgang eines Zufallsexperiments handelt.

Da die Daten für die gesamte Oberstufe ausgewertet sind und Schüler/innen während der Oberstufe noch wachsen, werden voraussichtlich weniger so große Schüler in den 5. Klassen zu finden sein. Somit ist der errechnete Erwartungswert nicht aussagekräftig bzw. sinnvoll.

Wesentlich für die Richtigkeit der Antwort ist die sinngemäße Darstellung einer der folgenden Interpretationen:

- Die unabhängige Wiederholung (im Sinne des Bernoulli-Experiments) ist nicht gegeben.
- Die verwendete Wahrscheinlichkeit (über 175 cm Körpergröße) bzw. relative Häufigkeit ist auf die beobachtete Eigenschaft (Bursch aus 5. Klassen) nicht anzuwenden.

Die Burschen/Jugendlichen wachsen im Laufe der Oberstufe, daher ist die relative Häufigkeit auf diese Gruppe nur eingeschränkt übertragbar.

Glücksrad

Aufgabennummer: 2_007

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

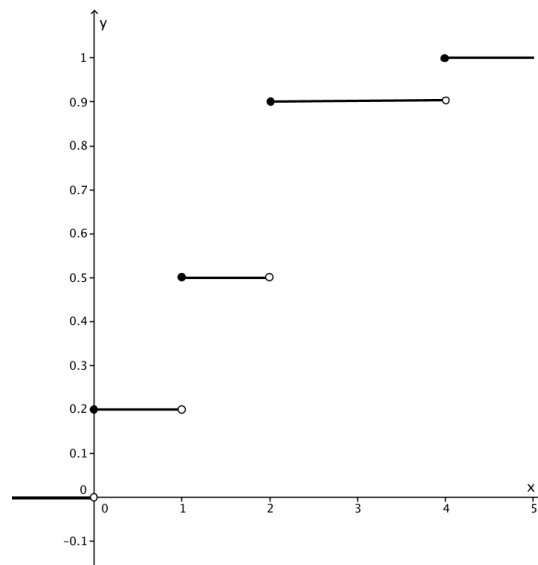
Grundkompetenzen: FA 1.4, WS 3.1

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

Auf einem Jahrmarkt werden nach dem Drehen eines Glücksrades € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt. Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr e (in €) zu entrichten. Der Spielbetreiber hat für mathematisch Interessierte den Graphen einer sogenannten kumulativen Verteilungsfunktion F mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben. Die Zufallsvariable X gibt dabei die Größe des auszahlenden Betrags an. Aus der Abbildung lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Auszahlungsbeträge ermitteln, wobei die Variable x angibt, welche Werte die Zufallsvariable X annimmt, d. h. wie groß die einzelnen auszahlenden Beträge sind. Bei diesem Spiel sind sie, wie oben angegeben, € 0, € 1, € 2 oder € 4.



Aufgabenstellung:

- a) Ermitteln Sie mithilfe der Graphik die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und tragen Sie die entsprechenden Werte in der nachstehenden Tabelle ein!

Auszahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$				

Begründen Sie, warum die Funktion F monoton steigend ist und warum das Maximum von F immer 1 sein muss!

- b) Der Erwartungswert von X beträgt bei diesem Spiel € 1,50, d. h., im Mittel beträgt der auszahlende Betrag € 1,50.
Versetzen Sie sich in die Lage des Spielbetreibers. Wie groß wählen Sie den Betrag der Spielgebühr e pro Drehung mindestens, wenn Sie die Größe des Erwartungswerts von X kennen? Geben Sie eine Begründung für Ihre Wahl an!

Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin/des Spielers an.

Welche Werte y wird der Gewinn in Abhängigkeit von e bei den bekannten Auszahlungsbeträgen € 0, € 1, € 2 oder € 4 annehmen?

Vervollständigen Sie die Tabelle und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y an!

Gewinn y in €				
$P(Y = y)$				

Möglicher Lösungsweg

a)

Auszahlungsbetrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Eine kumulierte Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da die Einzelwahrscheinlichkeiten definitionsgemäß immer größer oder gleich 0 sein müssen, ist die Funktion F monoton steigend. Das Maximum muss 1 sein, da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergeben muss.

- b) e muss größer als € 1,50 sein, da der Spielbetreiber auf lange Sicht einen Gewinn und keinen Verlust erzielen möchte, der sich aus $e - 1,5 > 0$ errechnet.

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

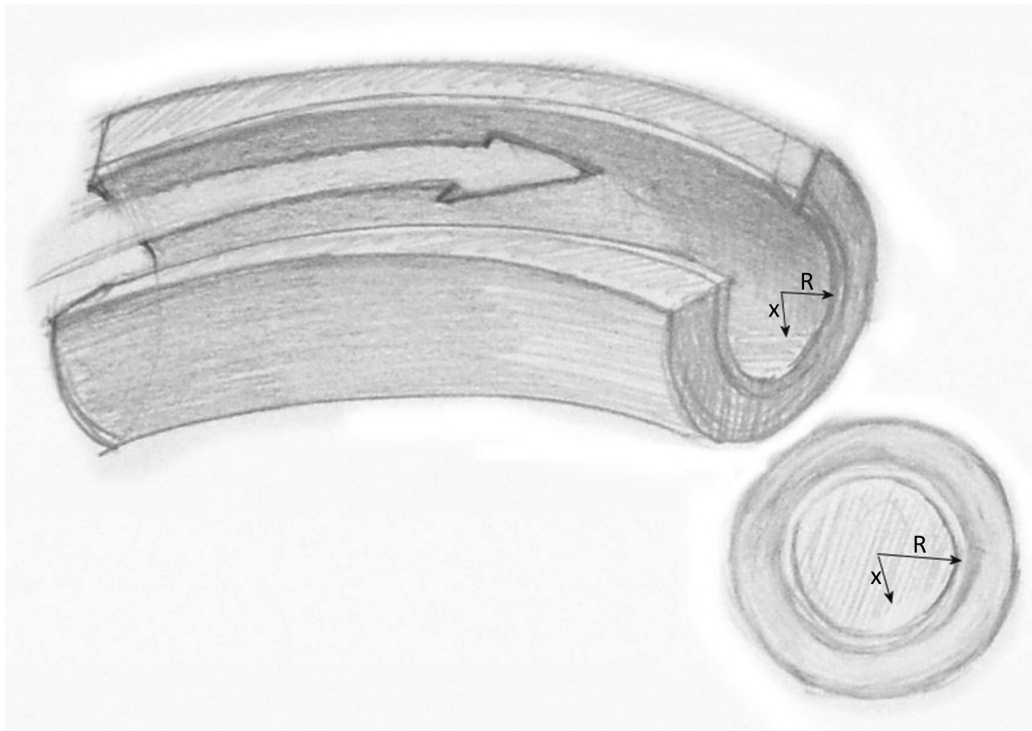
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 2.1, FA 1.7

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

In einem Blutgefäß hängt die Geschwindigkeit v des Blutes davon ab, wie groß der Abstand x zum Mittelpunkt ist. Ein gültiger Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und dem Abstand x kann mittels einer Formel $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ modelliert werden.



(Bild aus <http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php>, ergänzt durch Pfeile und Beschriftung)

Die in der Formel auftretenden Größen sind im Folgenden beschrieben:

R ... Innenradius des Blutgefäßes in mm

v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

x ... Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm

$v(x)$... Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand x vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Definitionsbereich für x an, der für das Blutgefäß sinnvoll ist, und begründen Sie, warum die Formel eine vereinfachte Beschreibung der Blutgeschwindigkeit ist!

b) In einem Lehrbuch der Medizin wird behauptet, dass beim Abstand $x = \frac{R}{2}$ die Geschwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um die Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v(x) = \frac{3}{4} v_m$ gemacht, und damit wird die Stelle x berechnet.

Führen Sie die Berechnung von der Stelle x aus und zeigen Sie, dass man mit der Berechnung des Funktionswerts $v\left(\frac{R}{2}\right)$ zum gleichen Ergebnis kommt!

c) Formen Sie die gegebene Formel für $v(x)$ so um, dass man eine Funktion $x(v)$ erhält!

Erläutern Sie, was der Funktionswert $x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ für die Blutströmung bedeutet!

d) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v (bei Veränderung von x) beim Abstand x an und geben Sie an, was das Vorzeichen der Änderungsrate über das Verhalten der Blutströmung aussagt!

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Definitionsbereich ist $[0; R]$ (Minimalanforderung: Angabe des Intervalls). Negative Abstände ($x < 0$) sind sinnlos, und $x > R$ würde bedeuten, dass das Blutkörperchen außerhalb des Blutgefäßes ist.

Die Formel ist deswegen eine Vereinfachung, weil das Blut am Innenrand des Blutgefäßes bestimmt nicht die Geschwindigkeit 0 hat.

Außerdem setzt die Formel voraus, dass das Blutgefäß an jeder Stelle einen kreisförmigen Querschnitt mit einem konstanten Radius R hat bzw. dass das Blutgefäß exakt zylindrisch ist (Venen haben auch Venenklappen).

Schließlich strömt das Blut zeitlich nicht mit konstanter Geschwindigkeit, die Blutgeschwindigkeit verändert sich periodisch.

- b) Lösungsweg 1:

$$\text{Umformen: } \frac{3}{4} v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{x^2}{R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$$

Lösungsweg 2:

$$v\left(\frac{R}{2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = v_m \cdot \frac{3}{4}$$

An der genannten Stelle ist der Funktionswert wieder 75 % von v_m .

c) $x(v) = R \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$

$x\left(\frac{v_m}{2}\right)$ ist jener Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit auf die Hälfte des Maximalwertes abgesunken ist.

d) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2x}{R^2}$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfunktion im gesamten Definitionsbereich $[0; R]$ streng monoton fallend ist. Für die Blutströmung bedeutet das, dass die Geschwindigkeit des Blutes vom Mittelpunkt der Vene bis zum Rand der Vene abnimmt. Auch eine kurze Formulierung ist als korrekt zu werten: Negatives Vorzeichen \rightarrow Geschwindigkeit nimmt ab.

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.3, FA 1.5, FA 1.8, WS 2.3, WS 3.2

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die „Königsdisziplin“ der Leichtathletik ist bei den Männern der Zehnkampf. Dabei erhält jeder Athlet in jeder der 10 Disziplinen Punkte, die für jede Disziplin nach einer eigenen Formel errechnet werden. Für den Weitsprung gilt die Formel $P = 0,14354 \cdot (x - 220)^{1,4}$. Dabei ist x die Sprungweite in cm und P die Punktezahl (auf Ganze gerundet).

Im Bewerb sind 3 Sprünge erlaubt. Gewertet wird der weiteste fehlerfreie Sprung. Als Fehlversuch gilt in erster Linie das Übertreten beim Absprungbalken. Dies passiert in ca. 1 von 20 Versuchen. Der Weltrekord im Weitsprung liegt bei 895 cm.

Der Weltrekord im Zehnkampf wurde von Roman Šebrle 2001 beim Leichtathletikmeeting in Götzis aufgestellt und liegt bei 9026 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug dabei 811 cm.

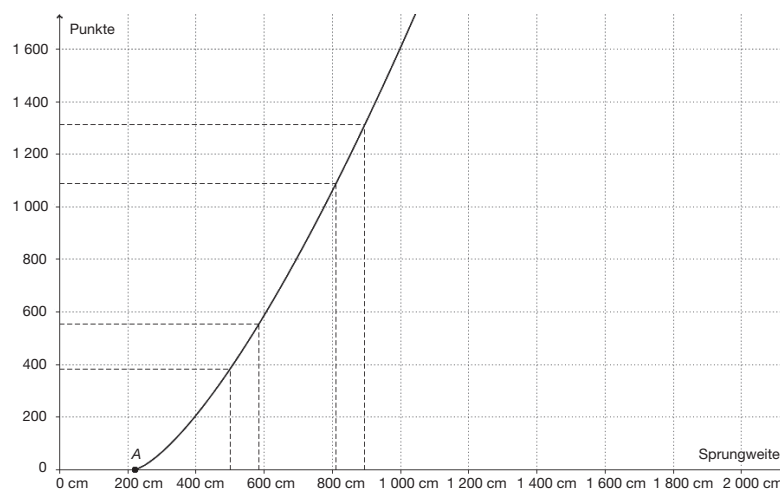
Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie, wie viele Punkte Roman Šebrle mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite gesprungen wäre!

Begründen Sie mit der Formel, warum erst Sprünge ab 220 cm einen Punktwert ergeben!

- b) Eine Sprungleistungssteigerung um 84 cm bringt nicht von jedem Ausgangswert den gleichen durchschnittlichen Punktezuwachs (in Punkten/cm). Zeigen Sie das für die Intervalle [500 cm; 584 cm] und [811 cm; 895 cm] durch Rechnung!

Begründen Sie mithilfe der untenstehenden Graphik, warum ein absolut gleicher Weitenzuwachs für größere Ausgangswerte mehr Punkte bringt als für kleinere Ausgangswerte!



- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet die Weitsprungpunkte bei seinem Zehnkampf ohne Fehlversuch erhält!

Durch bessere Trainingsmethoden kann dieser Wahrscheinlichkeitswert erhöht werden, indem die Fehlerquote von 1 : 20 gesenkt wird, etwa auf 1 : n .

Wenn unter n Sprüngen nur ein Fehlversuch dabei ist, ergibt sich eine Erfolgsquote von $\frac{n-1}{n}$. Begründen Sie damit, warum die oben genannte Wahrscheinlichkeit nie 1 sein kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $f(895) \approx 1312$

$$f(811) \approx 1089$$

Er hätte um 223 Punkte mehr erzielt.

Die Basis (der Radikand) wird erst ab 220 cm \geq null. *(oder eine sinngemäße Formulierung)*

b) $\frac{f(584) - f(500)}{584 - 500}$ bzw. $\frac{f(895) - f(811)}{895 - 811}$

im ersten Intervall: ca. 2,02 Punkte/cm

im zweiten Intervall: ca. 2,65 Punkte/cm

Begründung: f ist streng monoton wachsend und steigt im zweiten Intervall schneller.
(Jede sinngemäß formulierte Antwort ist richtig.)

c) X ... Anzahl der Fehlversuche

$$p = \frac{1}{20}$$

$$q = p - 1 = \frac{19}{20}$$

$$P(X = 0) = \dots = \left(\frac{19}{20}\right)^3 \approx 0,857$$

d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 85,7 %

Begründung: Da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, ist $\frac{n-1}{n} < 1$. Daher muss auch die 3. Potenz < 1 sein.

Oder:

Sobald die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlversuch größer als 0 ist, muss die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Sprünge ohne Fehlversuch gelingen, kleiner als 1 sein.

(Sinngemäße Argumentationen möglich!)

Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_FT004

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

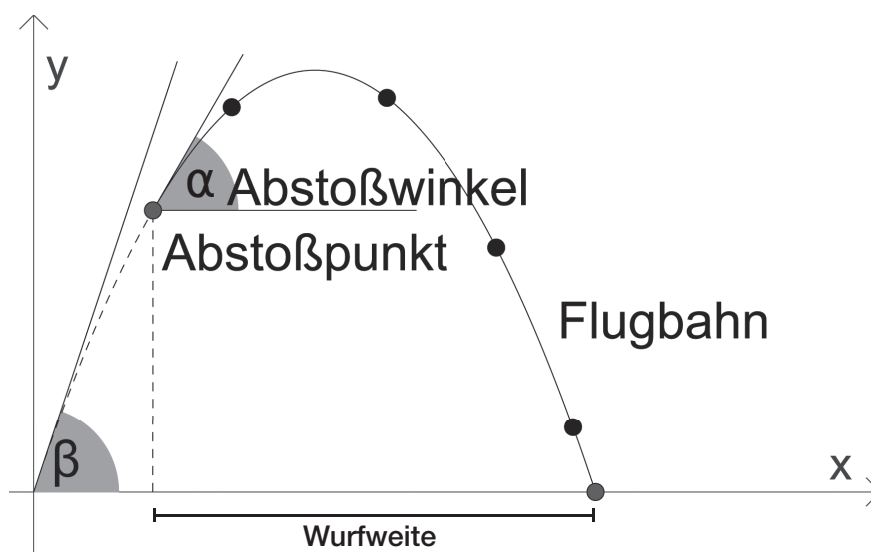
besondere Technologie
erforderlich

Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden.

Diese Gleichung lautet: $y = \tan \beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$ ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und β der Winkel, unter dem die Parabel die x-Achse schneidet.

Die größte Wurfweite wird für $\beta = 45^\circ$ erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $y = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2$. Der Abstoßpunkt der Kugel befand sich in einer Höhe von 2,1 m.

Aufgabenstellung:

- Berechnen Sie die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runden Sie auf cm!
- Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründen Sie Ihre Antwort!

- c) Berechnen Sie für die Bahnkurve $y = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2$ die Größe des Winkels β und überprüfen Sie, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat!
Erläutern Sie, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve $y = ax - bx^2$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Möglicher Lösungsweg

- a) $f: y = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2$
 Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
 $2,1 = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2 \quad x_1 \approx 3,26 \quad x_2 \approx 10,74$
- $f'(x) = 0,84 - 0,12 \cdot x \quad f'(3,26) = 0,4488 \quad \tan \alpha = 0,4488 \quad \alpha \approx 24,18^\circ$ bzw. $\alpha \approx 0,42$ rad
 $f'(x) = 0,84 - 0,12 \cdot x \quad 0 = 0,84 - 0,12 \cdot x \quad x = 7 \quad f(7) = 2,94$
 Die maximale Höhe der Kugel betrug 2,94 m.

- b) $f: y = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2$
 Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
 $2,1 = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2 \quad (x_1 \approx 3,26) \quad x_2 \approx 10,74$
- Nullstellen: $0 = 0,84 \cdot x - 0,06 \cdot x^2 \quad (x_1 = 0) \text{ und } x_2 = 14$
 $14 - 3,26 = 10,74$
 Die Wurfweite der Kugel war 10,74 m.
 Die Wurfweite wird bestimmt durch die rechte Nullstelle der Parabel:

$$0 = \tan \beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$$

$$0 = x \cdot \left(\tan \beta - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x \right)$$

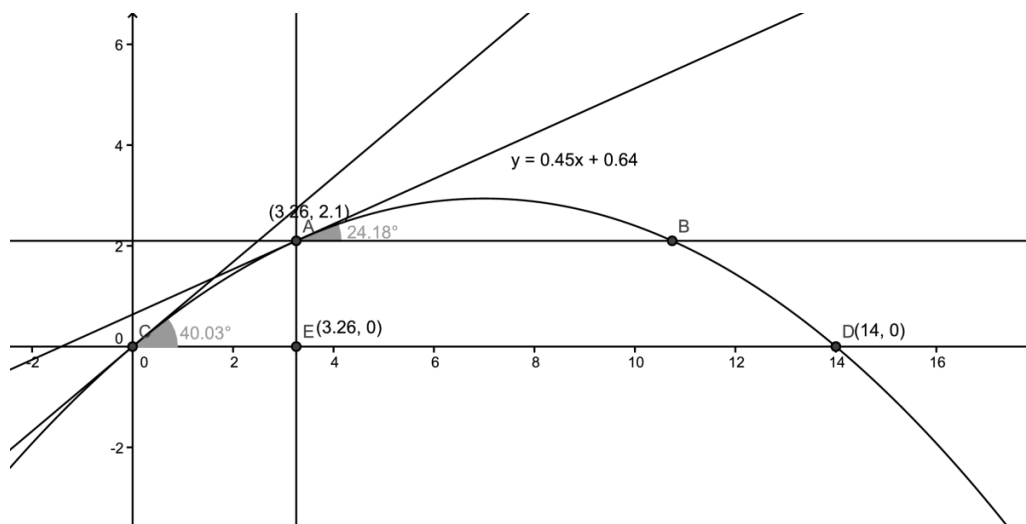
$$x = \frac{\tan \beta \cdot 2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta}{g}$$

Bei größerem g wird die Wurfweite kleiner. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor.

- c) $f'(x) = 0,84 - 0,12 \cdot x \quad f'(0) = k \quad \tan \beta = k \quad \beta \approx 40,03^\circ < 45^\circ$

Da der Winkel β ungleich 45° ist, könnte der Athlet durch Veränderung des Abstoßwinkels eine größere Wurfweite erzielen.

Oder Lösung mithilfe von Technologie:



Bevölkerungsentwicklung

Aufgabennummer: 2_FT005

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.1, FA 2.2, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie (teilweise) erforderlich

Die Weltbevölkerung ist in den vergangenen Jahrhunderten unterschiedlich stark gewachsen. Für die weitere Entwicklung bis zum Ende dieses Jahrhunderts gibt es unterschiedliche Prognosen. Abbildung 1 zeigt die Bevölkerungsentwicklung in den vergangenen 3 000 Jahren. Abbildung 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1750 bis 2000. Abbildung 3 zeigt die Bevölkerungsentwicklung von 1950 bis 2010. Die untenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.

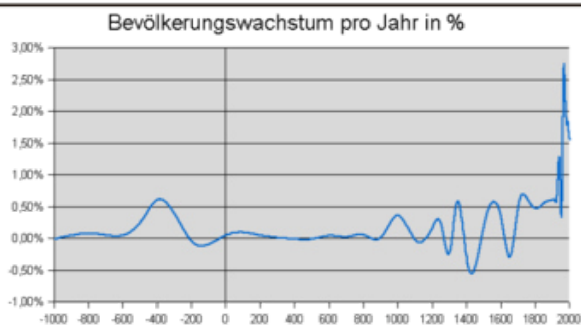
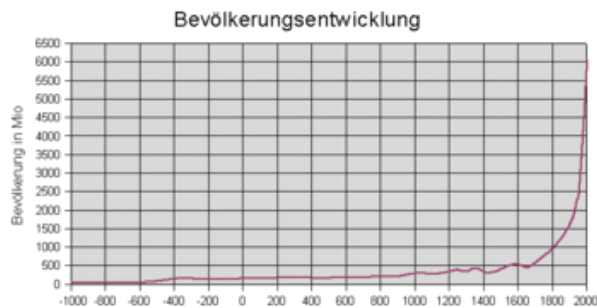
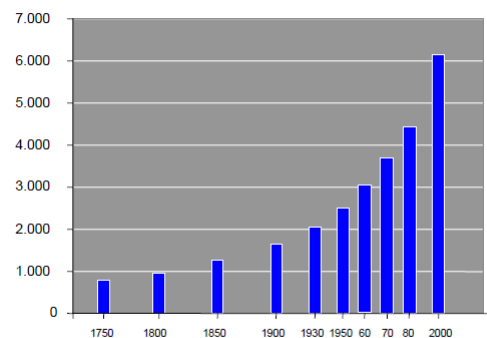


Abbildung 1

Das Wachstum der Weltbevölkerung 1750 bis 2000 [in Mio.]



Quelle: Informationen zur Politischen Bildung, Bevölkerungsentwicklung, 1988, S. 25.
 Gestaltung: Michael Wobring, 2005

Abbildung 2

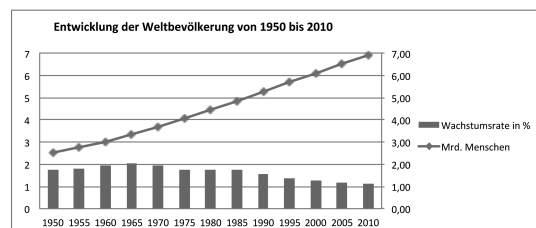


Abbildung 3

Jahr	Afrika	Asien	Europa	Lateinamerika	Nordamerika	Ozeanien
1900	133	925	430	74	82	6
1950	227	1 403	547	167	172	13
1975	419	2 379	676	323	242	21
2000	819	3 698	727	521	319	31

Aufgabenstellung:

- a) Ermitteln Sie anhand der Abbildungen, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung von 1600 bis 1800 zugenommen hat!

Nennen Sie zwei Zeiträume, in denen die Weltbevölkerung mindestens 100 Jahre lang abgenommen hat, und begründen Sie Ihre Antwort!

- b) Die Weltbevölkerung hat von 1930 bis 1980 annähernd exponentiell zugenommen. Berechnen Sie unter dieser Annahme für diesen Zeitraum die jährliche Wachstumsrate auf Zehntelprozent genau!

- c) Begründen Sie anhand der jährlichen Wachstumsraten aus Abbildung 3, warum die Entwicklung der Weltbevölkerung von 1950 bis 2010 nicht durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann!

Bei konstanter Zunahme der Bevölkerungszahl ab 2010 wird für das Jahr 2050 eine Bevölkerungszahl von 10,4 Milliarden prognostiziert.

Berechnen Sie, von welcher jährlichen Zunahme bei dieser Prognose ausgegangen wird! Geben Sie die jährliche Zunahme in Millionen Menschen an!

- d) Angenommen, die absoluten Zahlen der Bevölkerungsentwicklung der Kontinente und Subkontinente im Zeitraum von 1900 bis 2000 werden in einem Säulendiagramm mit linearer Skalierung dargestellt. Begründen Sie, warum die starke Bevölkerungszunahme in Ozeanien von 1900 bis 2000 in einem solchen Diagramm nicht erkennbar ist!

Gegeben sind fünf Aussagen zur Bevölkerungsentwicklung nach Kontinenten und Subkontinenten von 1900 bis 2000.

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	<input type="checkbox"/>
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	<input type="checkbox"/>
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	<input type="checkbox"/>
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 geringer als von 1950 bis 1975.	<input type="checkbox"/>
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a) Zunahme von 1600 bis 1800: ca. 500 Millionen Menschen

Die Weltbevölkerung hat mindestens 100 Jahre lang abgenommen in [250 v. Chr.; 50 v. Chr.] (bzw. [-250; -50]) und [1400; 1500], da in diesen Zeitintervallen das jährliche Bevölkerungswachstum in % negativ ist.

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

$$4,5 = 2 \cdot a^{50}$$

$a \approx 1,016$, d. h. Zunahme um 1,6 % pro Jahr

c) Bei einer exponentiellen Zunahme ist die jährliche Wachstumsrate konstant. Abbildung 3 zeigt, dass diese Voraussetzung im Zeitraum von 1950 bis 2010 nicht erfüllt ist.

Konstante jährliche Zunahme von 2010 bis 2050:

$$\frac{10,4 - 6,9}{40} = 0,0875 \text{ Milliarden} = 87,5 \text{ Millionen}$$

d) Da die Bevölkerungszahl Ozeaniens von 1900 bis 2000 jeweils weniger als 1 % der Bevölkerungszahl Asiens betrug, sind die entsprechenden Säulen für Ozeanien sehr niedrig (Höhe fast null).

Daher ist die Verfünffachung der Bevölkerungszahl Ozeaniens nicht erkennbar.

Die Bevölkerung Asiens hat sich im 20. Jahrhundert annähernd vervierfacht.	<input checked="" type="checkbox"/>
Seit Beginn des 20. Jahrhunderts lebten in Lateinamerika mehr Menschen als in Nordamerika.	
Im Zeitraum von 1975 bis 2000 war die relative Bevölkerungszunahme in Afrika am größten.	<input checked="" type="checkbox"/>
In Europa war die Bevölkerungszunahme von 1975 bis 2000 geringer als von 1950 bis 1975.	<input checked="" type="checkbox"/>
1950 lebten in Europa und Amerika zusammen bereits mehr als eine Milliarde Menschen.	

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, FA 1.1, FA 2.2, FA 3.1

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Die Höhe $H(t)$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit t ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $H(t)$ beschrieben werden:

$$H(t) = H_0 - a \cdot t^2 \text{ mit } a > 0, t \geq 0$$

(H wird in cm und t in Tagen gemessen, H_0 beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung)

Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

Aufgabenstellung:

- a) Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen? Geben Sie die Lösung auf zwei Dezimalstellen genau an!

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters a auf $H(t)$ aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

- b) In einem Alpendorf gilt für die Schneehöhe H (gemessen in cm) und die Zeit t (gemessen in Tagen) der folgende funktionale Zusammenhang:

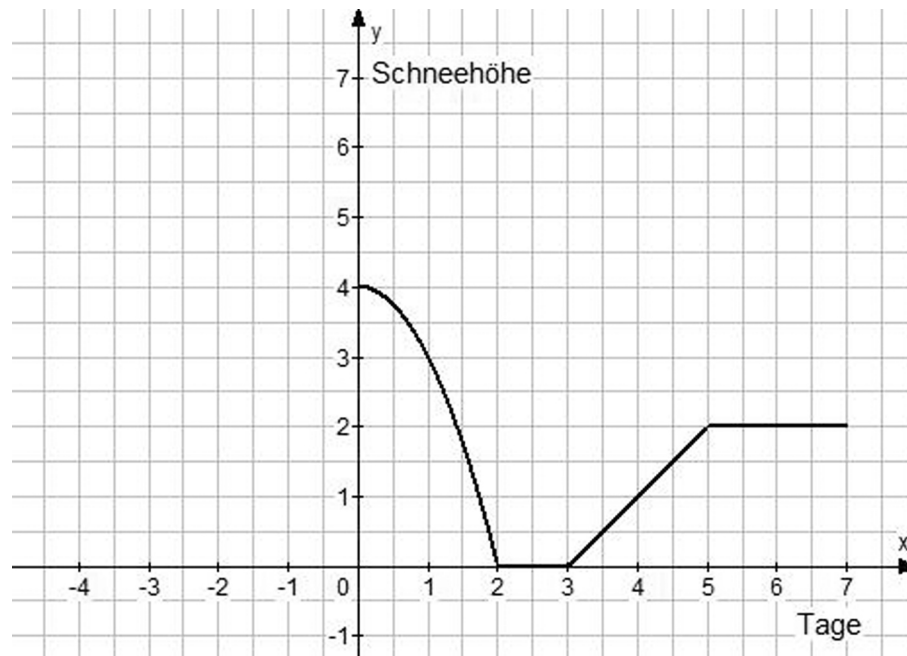
$$H(t) = 40 - 5t^2$$

Wie hoch ist die mittlere Änderungsrate der Schneehöhe innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung? Berechnen Sie diese!

Begründen Sie, warum die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall $[0; 3]$ mithilfe der angegebenen Funktion nicht sinnvoll ist, um Aussagen über den Verlauf der Höhe der Schneedecke zu machen!

- c) Berechnen Sie $H'(0,5)$ für $H(t) = H_0 - a \cdot t^2$ und $a = 3$!
 Deuten Sie das Ergebnis hinsichtlich der Entwicklung der Schneehöhe H !

- d) Der folgende Graph beschreibt idealisiert den Verlauf der Schneehöhe in Dezimetern innerhalb einer Woche in einem Alpendorf.



Handelt es sich bei diesem Graphen um eine auf $[0; 7]$ definierte Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bestimmen Sie die Gleichung $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ einer Funktion f , welche den Graphen im Intervall $[3; 5]$ beschreibt!

Möglicher Lösungsweg

a) Frage 1:

$$18 = 20 - a \cdot 0,5^2 \Rightarrow a = 8; \quad 20 - 8t^2 = 0 \Rightarrow t = 1,58 \text{ Tage}$$

Frage 2:

Je größer a , desto schneller nimmt die Schneehöhe ab!

b) Frage 1:

$$\frac{H(2) - H(0)}{2} = \frac{20 - 40}{2} = -10 \text{ cm/Tag}$$

Frage 2:

Der Anwendungsbereich (Definitionsbereich) der Formel $H(t)$ liegt im Bereich $[0; \sqrt{8}]$, wobei $\sqrt{8} \approx 2,8$ die positive Nullstelle von $H(t)$ ist.

Da $[0; 2,8]$ eine Teilmenge des Intervalls $[0; 3]$ ist, ist die Berechnung des Differenzenquotienten im Intervall $[0; 3]$ nicht sinnvoll.

Oder:

An der Stelle $t = 3$ wird der Funktionswert $H(t)$ negativ. Die Schneehöhe H kann allerdings nicht negativ sein, daher ist die Berechnung der mittleren Änderungsrate im Intervall $[0; 3]$ nicht sinnvoll.

c) Frage 1:

$$H(t) = H_0 - 3 \cdot t^2$$

$$H'(t) = -6 \cdot t$$

$$H'(0,5) = -3 \text{ cm/Tag}$$

Frage 2:

Nach $t = 0,5$ Tagen nimmt die Schneedecke mit einer Abnahmegeschwindigkeit von -3 cm/Tag ab.

d) Frage 1:

Der Graph beschreibt eine Funktion, da jedem Zeitpunkt x genau eine Schneehöhe y zugeordnet wird.

Frage 2:

$$f(3) = 0 \Rightarrow 0 = k \cdot 3 + d$$

$$f(5) = 2 \Rightarrow 2 = k \cdot 5 + d$$

$$\text{daher: } k = 1; d = -3$$

$$y = x - 3$$

Gewinnfunktion

Aufgabennummer: 2_009

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.3, FA 1.4, FA 1.6, FA 1.7, FA 2.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

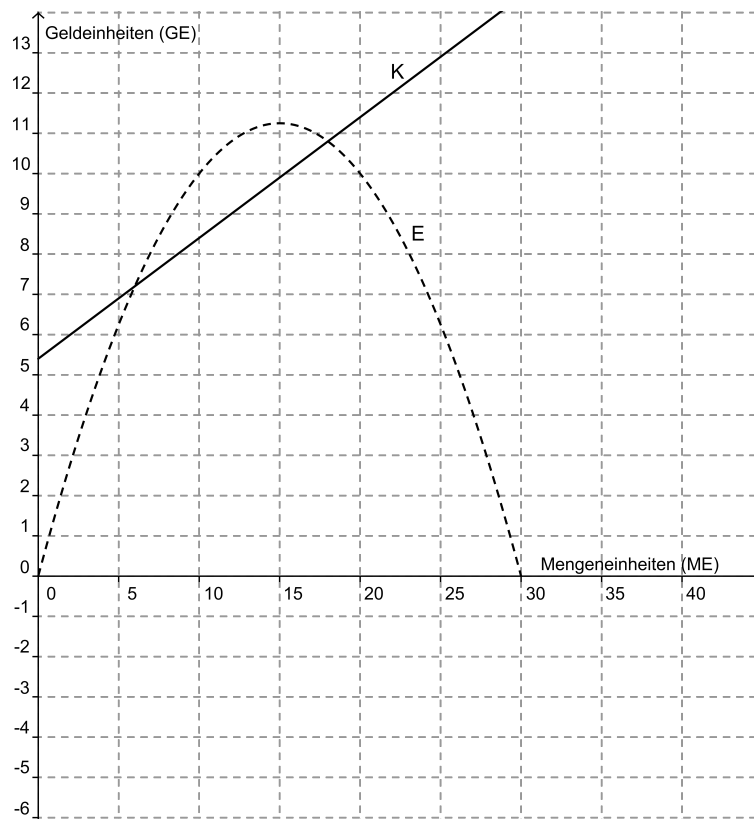
gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

In einem Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Geldeinheiten (GE) bei variabler Menge x in Mengeneinheiten (ME) beobachtet. Als Modellfunktionen werden die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0,05 \cdot x^2 + 1,5 \cdot x$ und eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0,3 \cdot x + 5,4$ angewendet. Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen abgesetzt.

Aufgabenstellung:

- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K ! Beschreiben Sie, welche Informationen die Koordinaten dieser Schnittpunkte für den Gewinn des Unternehmens liefern!
- Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion G in die untenstehende Abbildung ein! Markieren Sie in der Abbildung den Gewinn im Erlösmaximum!



- c) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden!

Bei der gegebenen Kostenfunktion K gibt der Wert 5,4 die Fixkosten an. Im Folgenden werden Aussagen getroffen, die ausschließlich die Änderung der Fixkosten in Betracht ziehen. Kreuzen Sie die für den gegebenen Sachverhalt zutreffende(n) Aussage(n) an!

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	<input type="checkbox"/>
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	<input type="checkbox"/>
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	<input type="checkbox"/>
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	<input type="checkbox"/>
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a) $-0,05 \cdot x^2 + 1,5 \cdot x = 0,3 \cdot x + 5,4$
 $-0,05 \cdot x^2 + 1,2 \cdot x - 5,4 = 0$

Die Lösung der quadratischen Gleichung führt zu den Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 18$
 $\rightarrow S_1(6|7,2)$ und $S_2(18|10,8)$.

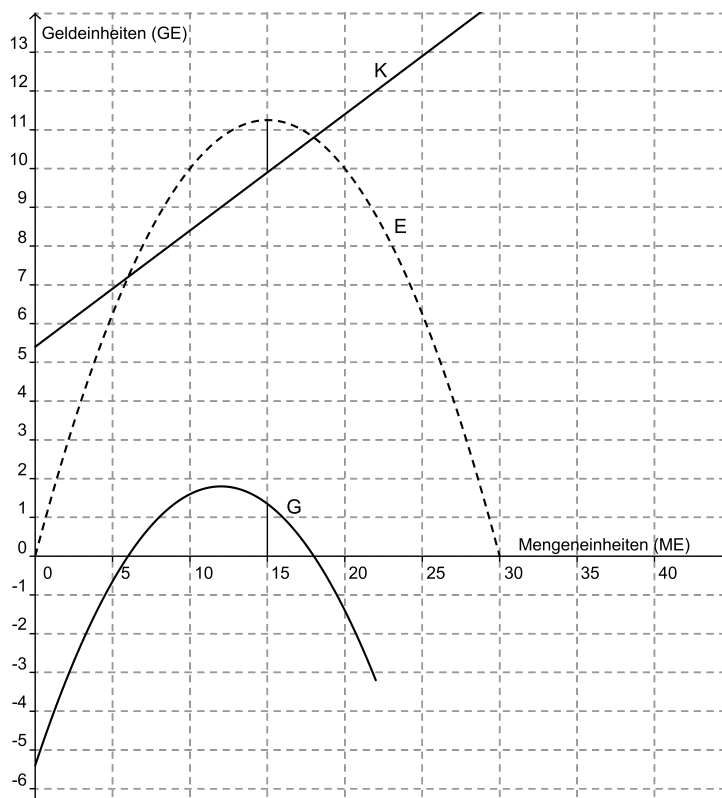
Reflexion beispielsweise:

Für die Mengen x_1 und x_2 sind Erlös und Kosten jeweils gleich groß, der Gewinn ist daher null.

Für die Stückzahlen x_1 und x_2 wird kein Gewinn erzielt.

Für den Stückzahlenbereich $(x_1; x_2)$ wird ein Gewinn erzielt.

b) *Eine der möglichen Markierungen für den Gewinn reicht in der Lösung aus.*



$G(x)$ einzeichnen

Markierung des Gewinns

c) $G(x) = -0,05 \cdot x^2 + 1,2 \cdot x - 5,4$
 $G(13) = 1,75$ GE (Geldeinheiten)

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	<input checked="" type="checkbox"/>
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	<input checked="" type="checkbox"/>
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	<input type="checkbox"/>
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	<input type="checkbox"/>
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	<input checked="" type="checkbox"/>

Kostenfunktion

Aufgabennummer: 2_012

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 3.3, AG 2.3

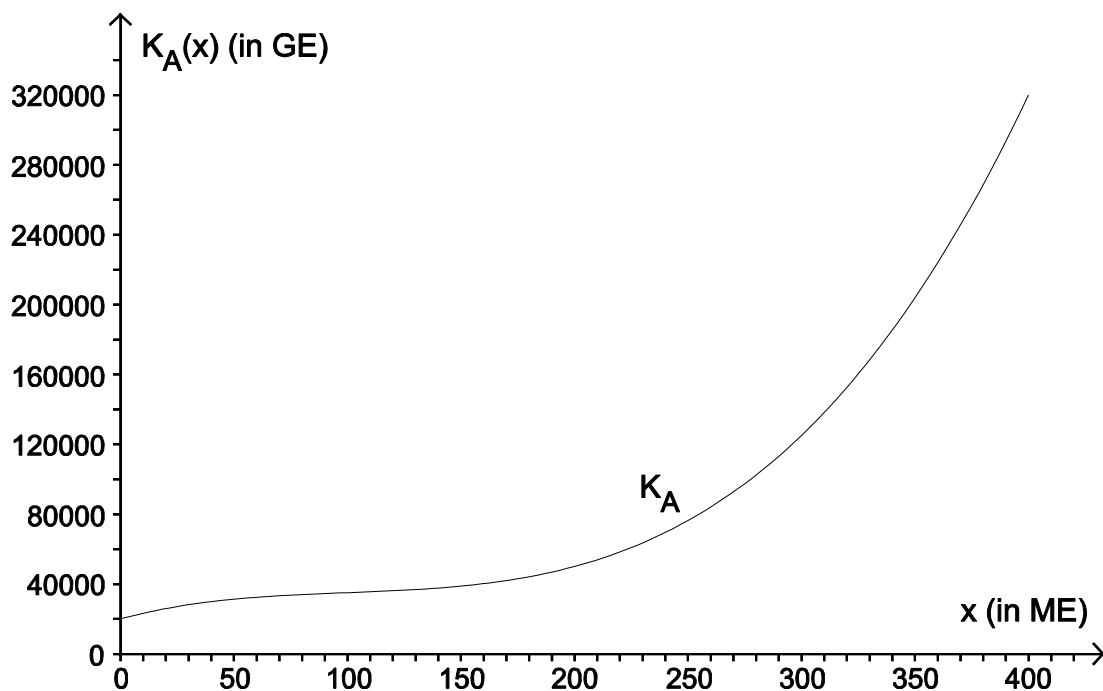
keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Im Zuge einer betriebswirtschaftlichen Analyse und Beratung werden bei zwei Firmen die Kostenverläufe in Abhängigkeit von der Produktionsmenge untersucht.

Bei Firma A wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten [ME]) und den entstehenden Produktionskosten $K_A(x)$ (in Geldeinheiten [GE]) durch die Kostenfunktion K_A mit $K_A(x) = 0,01x^3 - 3x^2 + 350x + 20\,000$ beschrieben. Firma A kann monatlich maximal 400 ME produzieren. In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K_A im Intervall $[0; 400]$ dargestellt.



Bei Firma B wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in ME) und den entstehenden Produktionskosten $K_B(x)$ (in GE) durch die Kostenfunktion K_B mit $K_B(x) = 0,5x^2 + 100x + 15\,000$ beschrieben. Firma B kann monatlich maximal 300 ME produzieren.

Aufgabenstellung:

- a) Untersuchen Sie, ob der Kostenverlauf bei Firma B progressiv oder degressiv ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Allgemein kann eine solche Kostenfunktion in Abhängigkeit von den produzierten Mengeneinheiten durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) beschrieben werden.

Für welche Werte von a liegt im streng monoton wachsenden Bereich der Funktion ein progressiver bzw. ein degressiver Kostenverlauf vor? Begründen Sie Ihre Antwort!

- b) Die erste Ableitung einer Kostenfunktion bezeichnet man als *Grenzkostenfunktion*. Diese beschreibt näherungsweise die Kostensteigerung, wenn der Produktionsumfang vergrößert wird. Berechnen Sie, um wie viel GE sich der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A unterscheidet, wenn der Produktionsumfang von 50 ME auf 51 ME erhöht wird!

Für die vorliegende Kostenfunktion gilt die Aussage: „Die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion sind immer positiv.“ Interpretieren Sie diese Aussage im Hinblick auf den Verlauf!

- c) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt den durchschnittlichen Preis pro erzeugter ME an.

Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion $\bar{K}_B(x)$ bei Firma B!

Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten sind!

Möglicher Lösungsweg

a) $K_B(x) = 0,5x^2 + 100x + 15\,000$

$$K_B'(x) = x + 100$$

$$K_B''(x) = 1 > 0$$

Da die zweite Ableitung positiv ist, ist die Funktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Andere richtige Begründungen (z. B. anhand des Graphen) sind auch zulässig.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wenn $a > 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Wenn $a < 0$ ist, ist der Graph der Kostenfunktion rechtsgekrümmt. Es liegt degressives Wachstum vor.

b) Grenzkostenfunktion $K_A'(x) = 0,03x^2 - 6x + 350$

$$K_A'(50) = 125$$

$$K_A(51) - K_A(50) = 31\,373,51 - 31\,250 = 123,51$$

Der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME unterscheidet sich vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A um 1,49 GE.

Da die Kostenfunktion $K(x)$ im angegebenen Bereich monoton steigend ist, gilt $K'(x) > 0 \rightarrow$ die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion (= Ableitungsfunktion der Kostenfunktion) sind also immer positiv.

c) $K_B(x) = 0,5x^2 + 100x + 15\,000$

$$\bar{K}_B(x) = \frac{K_B(x)}{x}$$

$$\bar{K}_B(x) = 0,5x + 100 + \frac{15\,000}{x}$$

$$\bar{K}_B'(x) = 0,5 - \frac{15\,000}{x^2}$$

$$\bar{K}_B'(x) = 0 \rightarrow 0,5x^2 = 15\,000 \rightarrow x = \sqrt{30\,000}$$

$$x \approx 173,2$$

Bei einer Produktion von ca. 173 Mengeneinheiten sind die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten.

Photovoltaikanlagen

Aufgabennummer: 2_013

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: FA 1.3, FA 1.4, FA 1.7, AG 2.1

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

Die benachbarten Familien Lux und Hell haben auf den Dächern ihrer Einfamilienhäuser zwei baugleiche Photovoltaikanlagen installiert, deren Maximalleistung jeweils 5 kW beträgt. Nicht selbst verbrauchte elektrische Energie wird zu einem Einspeisetarif ins Netz geliefert. Energie, die nicht durch die Photovoltaikanlage bereitgestellt werden kann, muss von einem Energieunternehmen zum regulären Stromtarif zugekauft werden (netzgekoppelter Betrieb). Beide Familien wollen die Wirtschaftlichkeit ihrer Anlagen durch Messungen überprüfen.

Aufgabenstellung:

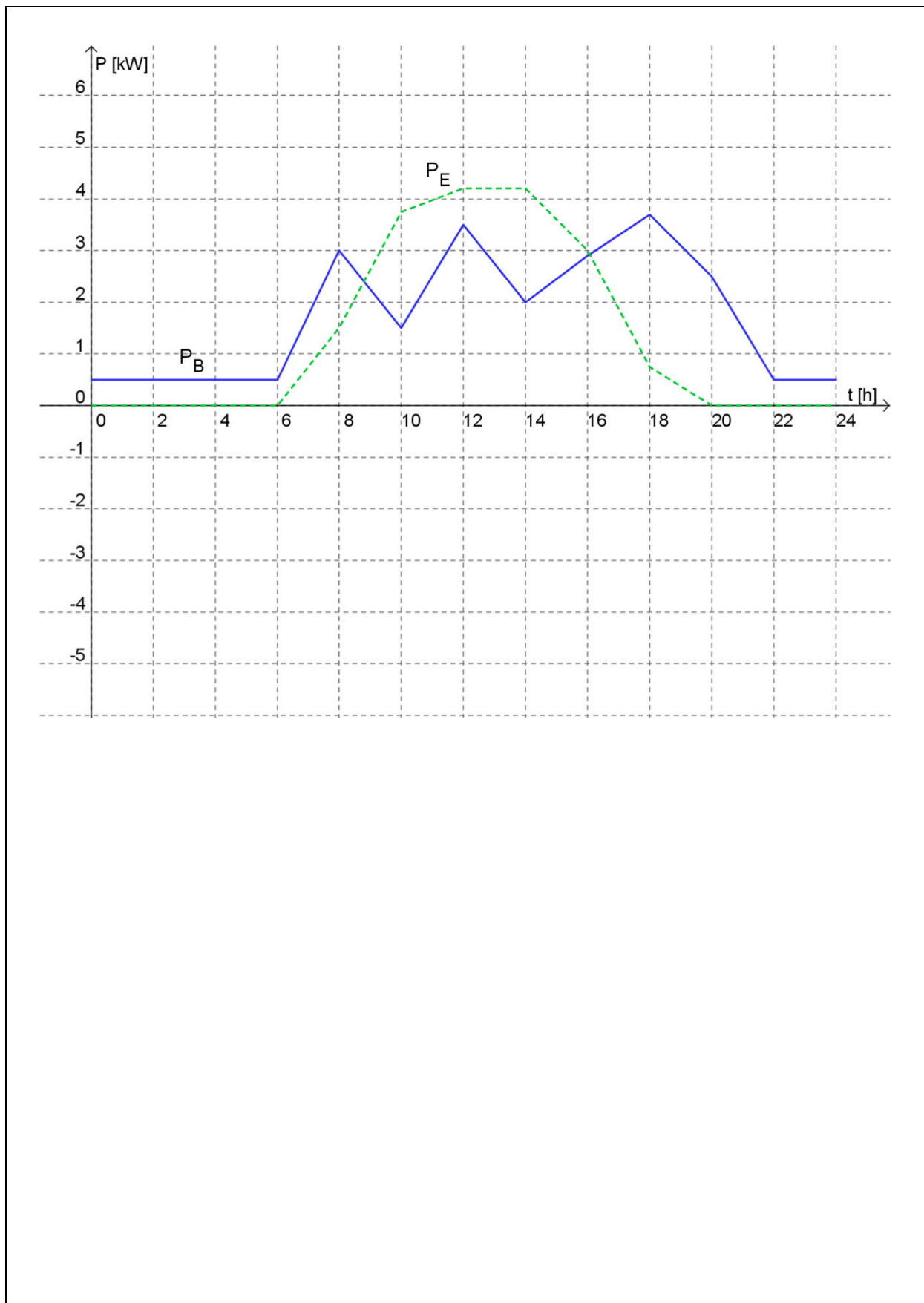
- a) Familie Lux hat dazu an einem durchschnittlichen Frühlingstag folgende Leistungsdaten für P_B (im Haus der Familie Lux benötigte Leistung) und P_E (durch die Photovoltaikanlage erzeugte elektrische Leistung) in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t über den Tagesverlauf ermittelt. Die Leistungsdaten wurden um Mitternacht beginnend alle zwei Stunden aufgezeichnet.

Leistungsdaten:

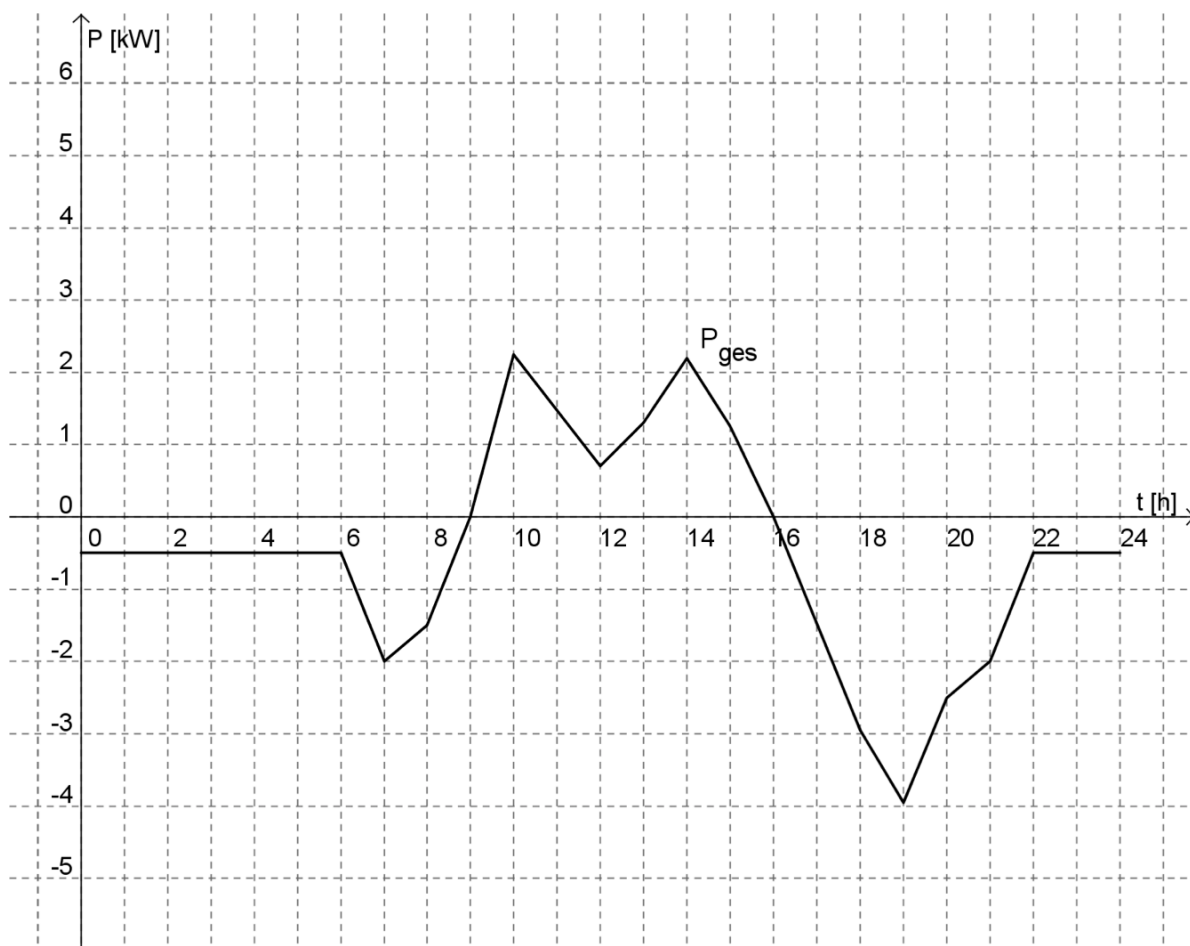
t in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
P_B in kW	0,5	0,5	0,5	0,5	3	1,5	3,5	2	2,9	3,7	2,5	0,5	0,5
P_E in kW	0	0	0	0	1,5	3,75	4,2	4,2	3	0,75	0	0	0

Zeichnen Sie in die nachstehende Abbildung aus den vorgegebenen Graphen für P_B und P_E den Tagesverlauf der elektrischen Gesamtleistungsbilanz P_{ges} für die Photovoltaikanlage der Familie Lux ein! Die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ist die Differenz der beiden Leistungsteile $P_E - P_B$.

Markieren Sie zusätzlich in der Abbildung die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage!



b) Familie Hell hat aus einer an einem durchschnittlichen Frühlingstag erfolgten stündlichen Messung folgenden Tagesverlauf für die Gesamtleistungsbilanz P_{ges} ihrer elektrischen Leistung ermittelt und durch den gegebenen Graphen modelliert:



Geben Sie an, was in dieser Grafik positive bzw. negative Funktionswerte für P_{ges} bedeuten!

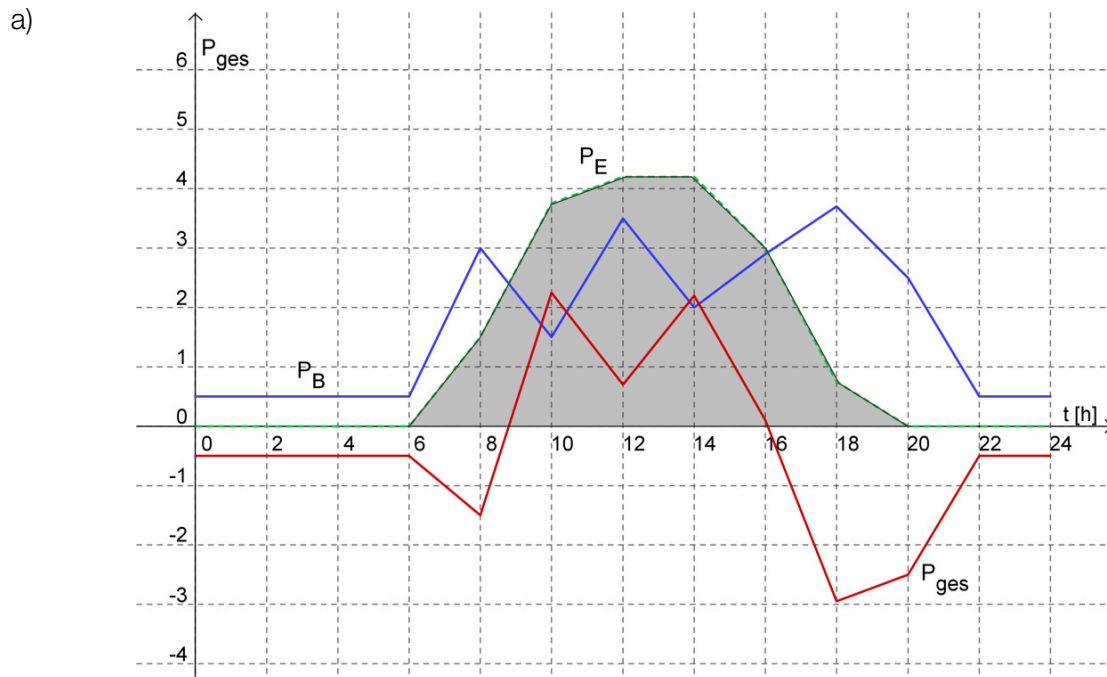
Positive Funktionswerte

Negative Funktionswerte

Familie Hell möchte den Amortisationszeitpunkt für die Photovoltaikanlage ermitteln. Das ist derjenige Zeitpunkt, ab dem die Errichtungskosten gleich hoch wie die Einsparungen durch den Betrieb der Anlage sind. Ab diesem Zeitpunkt arbeitet die Anlage rentabel.

Kann sich die Anlage für die Familie Hell auch amortisieren, wenn die finanzielle Tagesbilanz der Photovoltaikanlage für alle Tage im Jahr negativ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Möglicher Lösungsweg



Die eingefärbte Fläche stellt die gesamte über den Tagesverlauf erzeugte elektrische Energie dieser Photovoltaikanlage dar.

- b) Positive Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie ans Stromnetz geliefert wird. Negative Funktionswerte bedeuten, dass elektrische Energie aus dem Netz entnommen wird.
- Die Anlage kann sich amortisieren, wenn der Betrag, den man aufgrund der Anlage an Stromkosten eingespart hat, größer ist als der Anschaffungsbetrag der Anlage.
(Formulierungen, die sinngemäß dieser Aussage entsprechen, sind als richtig zu werten.)

Erlös und Gewinn

Aufgabennummer: 2_011

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: FA 1.6, FA 1.7, FA 2.1, AN 3.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

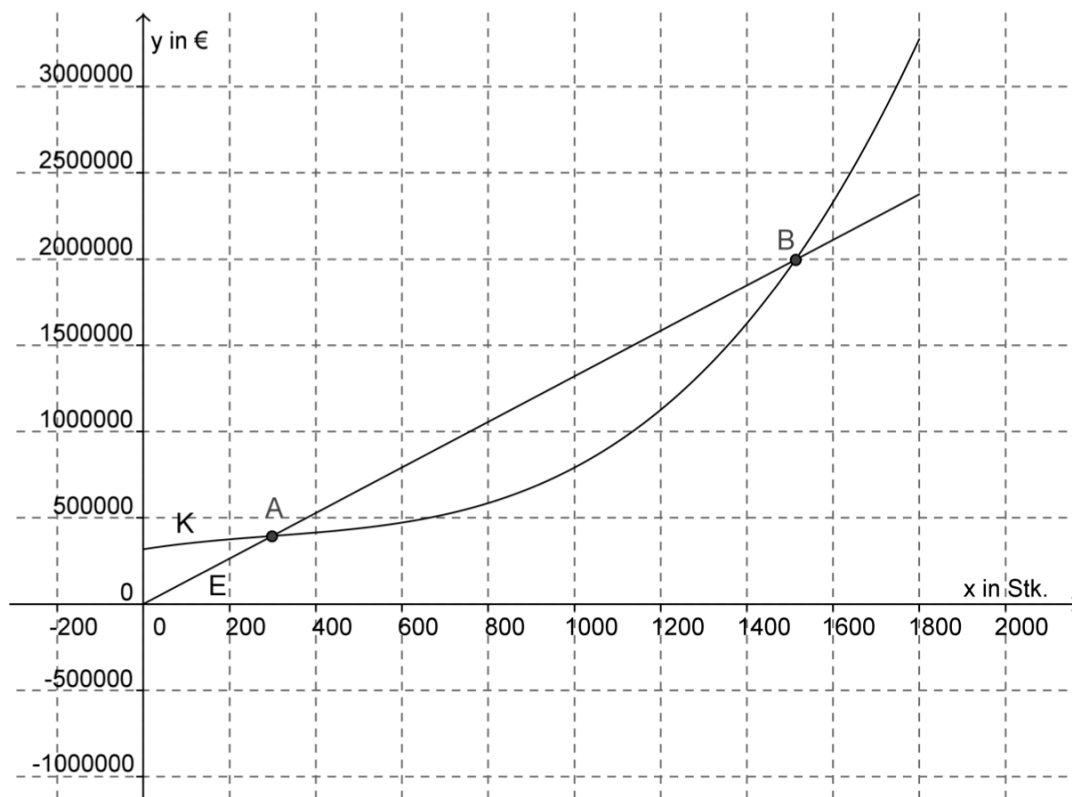
gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten.

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1 800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit $K(x) = 0,00077x^3 - 0,693x^2 + 396x + 317\,900$ beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x .

Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



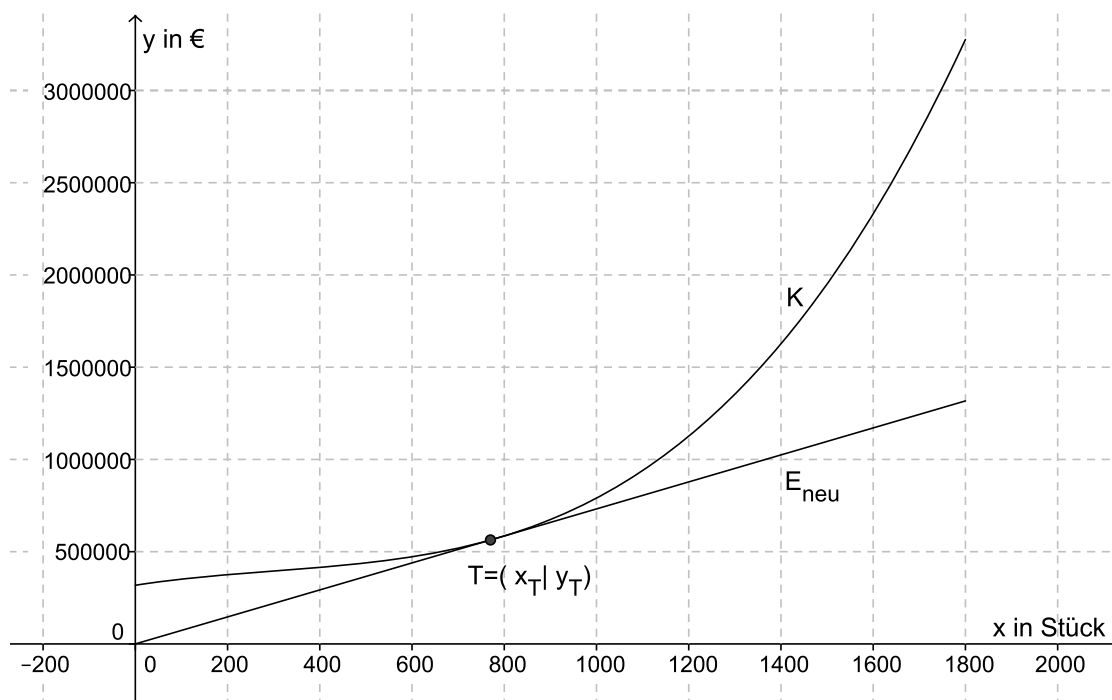
Aufgabenstellung:

- a) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein!

Eine Stückpreisänderung wurde vorgenommen und hat bewirkt, dass der Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl erreicht wird. Geben Sie an, wie der Stückpreis verändert wurde und welchen Einfluss diese Veränderung auf die Lage der Nullstellen der Gewinnfunktion G und den Gewinnbereich hat!

- b) Erstellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G !
Berechnen Sie diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird!

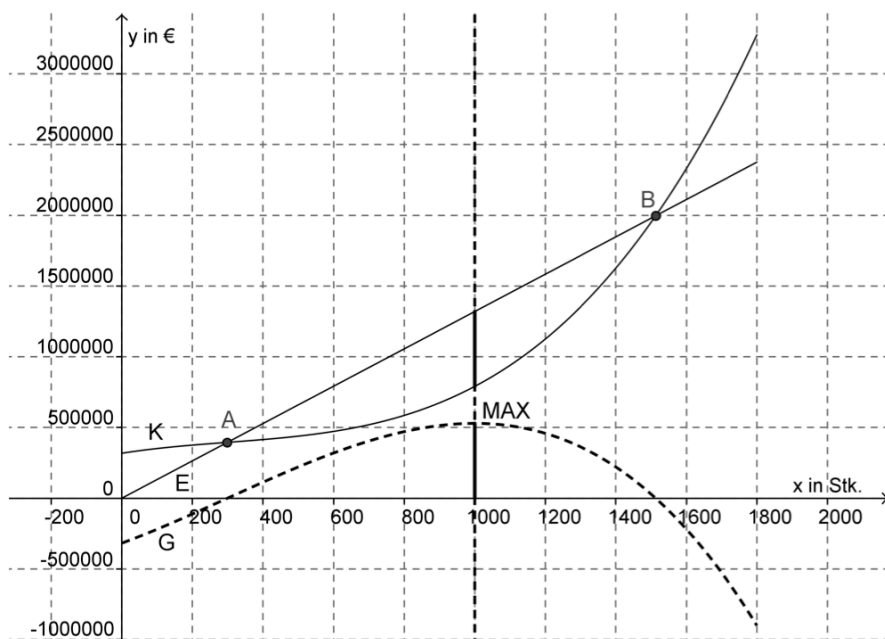
- c) In der nachstehenden Grafik wurde die Erlösfunktion so abgeändert, dass die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E_{neu} einander im Punkt T berühren.
Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu} !



Interpretieren Sie die Koordinaten des Punktes T im gegebenen Kontext und erklären Sie, welche Auswirkungen die Änderung der Erlösfunktion auf den Gewinnbereich hat!

Möglicher Lösungsweg

a) Graph der Gewinnfunktion:



Der Stückpreis muss erhöht werden. Die Nullstellen liegen weiter auseinander, das heißt, der Gewinnbereich wird größer.

b) Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = 1\,320x - (0,00077x^3 - 0,693x^2 + 396x + 317\,900)$$

$$G(x) = -0,00077x^3 + 0,693x^2 + 924x - 317\,900$$

Bedingung für maximalen Gewinn:

$$G'(x) = 0$$

$$G'(x) = -0,00231x^2 + 1,386x + 924$$

$$-0,00231x^2 + 1,386x + 924 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1,386 \pm \sqrt{1,386^2 + 4 \cdot 0,00231 \cdot 924}}{-0,00462} = \begin{cases} (-400) \\ 1000 \end{cases}$$

Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1 000 erzielt.

c) Die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu} lautet:

$$E_{\text{neu}}(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$$

Nur bei der Produktionsmenge von x_T Stück wird genau kostendeckend produziert.

Kosten und Erlös betragen je € y_T .

Bei dieser Produktionsmenge ist es nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.2, AN 1.3, FA 1.5, FA 5.1, FA 5.3

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

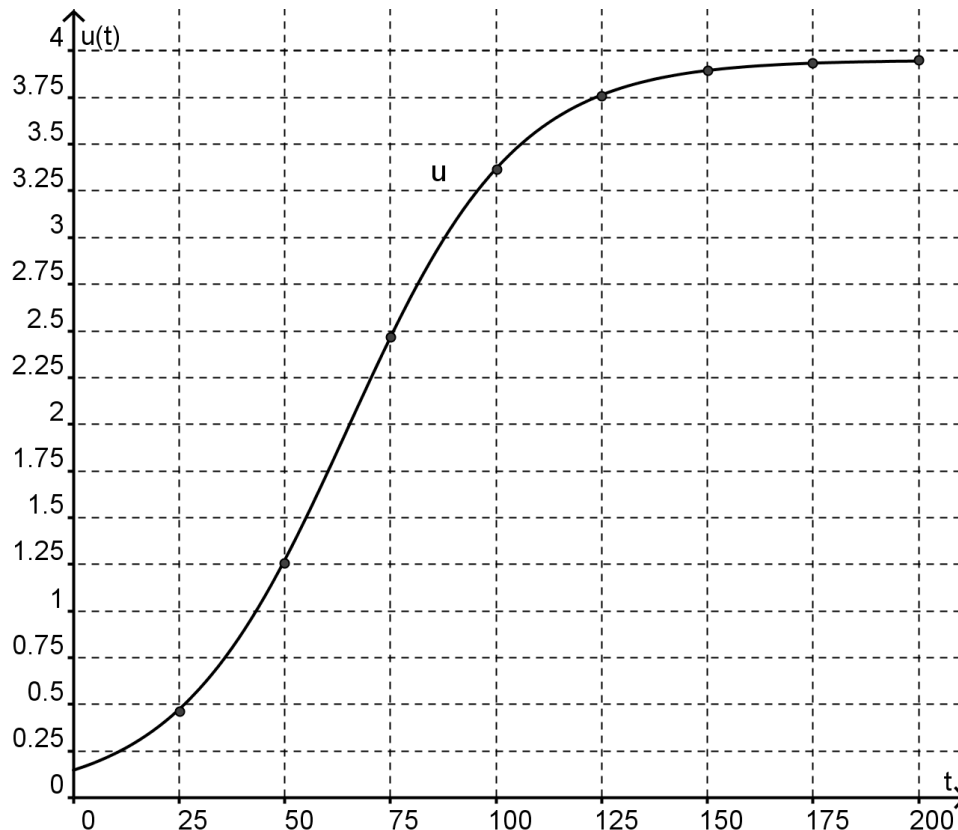
besondere Technologie erforderlich

An einem gefällten Baum kann anhand der Jahresringe der jeweilige Umfang des Baumstamms zu einem bestimmten Baumalter ermittelt werden. Die Untersuchung eines Baumes ergab folgende Zusammenhänge zwischen Alter und Umfang:

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100	125	150	175	200
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370	3,761	3,895	3,934	3,950

Der Zusammenhang zwischen Alter und Umfang kann durch eine Wachstumsfunktion u beschrieben werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

In der nachstehenden Graphik sind die gemessenen Werte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

- a) Innerhalb der ersten 50 Jahre wird eine exponentielle Zunahme des Umfangs angenommen. Ermitteln Sie aus den Werten der Tabelle für 25 und 50 Jahre eine Wachstumsfunktion für diesen Zeitraum!

Begründen Sie mittels einer Rechnung, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht mehr gilt!

- b) Berechnen Sie den Differenzenquotienten im Zeitintervall von 75 bis 100 Jahren! Geben Sie an, was dieser Wert über das Wachstum des Baumes aussagt!

Erläutern Sie, was die 1. Ableitungsfunktion u' im gegebenen Zusammenhang beschreibt!

- c) Schätzen Sie mithilfe der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat! Geben Sie den Namen des charakteristischen Punktes des Graphen der Funktion an, der diesen Zeitpunkt bestimmt!

Beschreiben Sie, wie dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist!

- d) Die beiden Wachstumsfunktionen f und g mit $f(t) = a \cdot q^t$ und $g(t) = b \cdot e^{k \cdot t}$ beschreiben denselben Wachstumsprozess, sodass $f(t) = g(t)$ für alle t gelten muss. Geben Sie die Zusammenhänge zwischen den Parametern a und b beziehungsweise q und k jeweils in Form einer Gleichung an!

Geben Sie an, welche Werte die Parameter q und k annehmen können, wenn die Funktionen f und g im Zusammenhang mit einer exponentiellen Abnahme verwendet werden!

Möglicher Lösungsweg

- a) $f(t) = a \cdot q^t$
→ $1,256 = a \cdot q^{50}$ bzw. $0,462 = a \cdot q^{25}$
→ (Division) $2,71861 = q^{25}$
→ $q \approx 1,0408$
→ $a = \frac{0,462}{q^{25}} \rightarrow a \approx 0,17$
→ (näherungsweise) $f(t) = 0,17 \cdot 1,0408^t$ bzw. $f(t) = 0,17 \cdot e^{0,04 \cdot t}$ da $\ln(1,0408) \approx 0,04$

Begründung dafür, dass das Modell für die nächsten 25 Jahre nicht passend ist:

Nach dem Modell gilt $f(75) = 0,17 \cdot 1,0408^{75} \approx 3,412$. Dieser Wert weicht signifikant vom gemessenen Wert ab und spricht daher gegen eine Verwendung des exponentiellen Modells in den nächsten 25 Jahren.

- b) Differenzenquotient: $\frac{3,370 - 2,465}{100 - 75} \approx 0,036$

Die durchschnittliche Zunahme zwischen 75 und 100 Jahren beträgt 3,6 cm pro Jahr.

Die 1. Ableitungsfunktion gibt die momentane Wachstumsrate an.

- c) Der charakteristische Punkt ist der Wendepunkt. Die Wendestelle der Funktion bestimmt den Zeitpunkt für das maximale jährliche Wachstum des Baumumfangs. Am schnellsten nimmt der Baum bei etwa 65 Jahren an Umfang zu (Lösungsintervall [55; 75]).

Die Nullstelle der 2. Ableitungsfunktion bestimmt in diesem Fall denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Baumumfang am schnellsten zunimmt.

- d) $f(0) = a$ und $g(0) = b$, daraus folgt: a und b sind gleich.

Da $q^t = e^{k \cdot t}$ gilt, folgt $\ln(q) = k$ bzw. $q = e^k$.

Bei einer Zerfallsfunktion muss $0 < q < 1$ bzw. $k < 0$ gelten.

Schwarzfahren als Volkssport

Aufgabennummer: 2_014

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.2, FA 1.7, FA 5.2, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Im Jahr 2010 wurden in den Graz-Linien exakt 36 449 Schwarzfahrer und Schwarzfahrerinnen auf frischer Tat ertappt.

„Ihren Fahrschein, bitte!“ – diese freundliche, aber bestimmte Aufforderung treibt Schwarzfahrern regelmäßig den Angstschweiß ins Gesicht. Zu Recht, heißt es dann doch 65 Euro Strafe zahlen. Mehr als 800 000 Fahrscheinkontrollen wurden im Vorjahr in den Grazer Bus- und Straßenbahnlinien durchgeführt. 36 449 Personen waren

Schwarzfahrer. Gegenüber 2009 ist das ein leichtes Minus von 300 Beanstandungen. Für die Graz-Linien ist das ein Beweis für den Erfolg der strengen Kontrollen. Für den Vorstand der Graz-Linien steht darum eines fest: „Wir werden im Interesse unserer zahlenden Fahrgäste auch 2011 die Kontrollen im gleichen Ausmaß fortsetzen.“ Denn den Graz-Linien entgehen durch den Volkssport Schwarzfahren jedes Jahr Millionen. Rechnet man die Quote der bei den Kontrollen ertappten Schwarzfahrer (ca. 5 %) auf die Gesamtzahl der beförderten Personen hoch (ca. 100 Mio. pro Jahr), dann werden aus 36 449 schnell fünf Millionen, die aufs Ticket pfeifen ... (Quelle: Meine Woche Graz, April 2011, adaptiert)

**Schwarzfahren
erhöht den
Adrenalinpiegel.**

Fahrkarte kaufen spart mindestens 65 Euro.

VERBUND LINIE 

In diesem Zeitungsartikel wird der Begriff *Schwarzfahrer* für Personen, die ohne gültigen Fahrschein angetroffen werden, verwendet. Fahrgäste, die ihre Zeitkarte (z. B. Wochenkarte, Schülerfreifahrtsausweis) nicht bei sich haben, gelten nicht als Schwarzfahrer/innen.

Nach Angaben der Graz-Linien beträgt der Anteil der Schwarzfahrer/innen etwa 5 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle *Jakominiplatz* in einen Wagen der Straßenbahnlinie 5 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste. An der Haltestelle *Hauptplatz* steigen sie in einen Wagen der Linie 3 um, in dem sie alle 18 Fahrgäste kontrollieren.

Aufgabenstellung:

- a) Es soll die Wahrscheinlichkeit p_1 berechnet werden, dass die Kontrolleure mindestens eine Schwarzfahrer/innen ermitteln, aber erst in der Linie 3 auf diese Person treffen. Geben Sie einen geeigneten Term an, mit dem diese Wahrscheinlichkeit p_1 ermittelt werden kann, und berechnen Sie diese!

Es sei p_2 die Wahrscheinlichkeit, bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens eine Schwarzfahrer/innen zu treffen. Begründen Sie, warum p_2 größer als p_1 sein muss, ohne p_2 zu berechnen!

- b) Es wird angenommen, dass bei den durchgeführten Kontrollen nur 1 % aller fünf Millionen Personen, die keinen Fahrschein mithaben, entdeckt werden. Man weiß, dass 10 % dieser fünf Millionen Personen eine Zeitkarte besitzen, die sie aber nicht bei sich haben, und daher nicht als Schwarzfahrer/innen gelten. Wird eine Schwarzfahrerin/ein Schwarzfahrer erwischt, muss sie/er zusätzlich zum Fahrpreis von € 2 noch € 65 Strafe zahlen. Gehen Sie davon aus, dass im Durchschnitt die nicht erwischten Schwarzfahrer/innen jeweils entgangene Einnahmen eines Einzelfahrscheins von € 2 verursachen.

Berechnen Sie den in einem Jahr durch die Schwarzfahrer/innen entstandenen finanziellen Verlust für die Grazer Linien!

Das Bußgeld müsste wesentlich erhöht werden, um eine Kostendeckung zu erreichen. Ermitteln Sie den neuen Betrag für ein kostendeckendes Bußgeld!

- c) Die Anzahl der entdeckten Schwarzfahrer/innen nahm gegenüber 2009 um 300 ab und betrug 2010 nur mehr 36 449. Man geht davon aus, dass durch verstärkte Kontrollen eine weitere Abnahme der Anzahl an Schwarzfahrerinnen/Schwarzfahrern erreicht werden kann.

Beschreiben Sie diese Abnahme beginnend mit dem Jahr 2009 sowohl als lineares als auch als exponentielles Modell!

Geben Sie jeweils einen Funktionsterm an, der die Anzahl S der Schwarzfahrer/innen nach t Jahren, ausgehend von dem Jahr 2009, beschreibt!

Berechnen Sie die Anzahl der Schwarzfahrer/innen nach 10 Jahren, also im Jahr 2019, mit beiden Modellen! Welche Schlussfolgerungen über die beiden Modelle ziehen Sie aus dem Ergebnis?

Möglicher Lösungsweg

a) $p_1 = 0,95^{25} \cdot (1 - 0,95^{18}) \approx 0,1672$

Mögliche Argumentationen:

- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 18 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu finden. Die Wahrscheinlichkeit p_2 , bereits im Wagen der Linie 5 auf mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen, ist größer als die Wahrscheinlichkeit p_1 , da die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Kontrollierten eher 1 Schwarzfahrer/in anzutreffen, größer ist als unter 18 Kontrollierten.
- Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen keine Schwarzfahrer/in zu finden. Diese ist kleiner als 0,5. Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Wahrscheinlichkeit, unter 25 Personen mindestens 1 Schwarzfahrer/in zu treffen. p_2 ist größer als 0,5, also $p_2 > p_1$.

b) Der zu erwartende Verlust wird wie folgt berechnet:

10 % der Fahrgäste ohne Fahrschein besitzen eine Zeitkarte, daraus folgt, dass 90 % von den 99 % Schwarzfahrer/innen sind.

$$V = (-0,99 \cdot 0,9 \cdot 2 + 0,01 \cdot 0,9 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 = (-0,891 \cdot 2 + 0,009 \cdot 65) \cdot 5\,000\,000 \approx -1,197 \cdot 5\,000\,000 \approx \text{€ } -5.985.000$$

Soll der Verlust $V = 0$ sein, dann gilt: $0 = -0,891 \cdot 2 + 0,009 \cdot B \rightarrow B = \text{€ } 198$.

Das Bußgeld B müsste auf € 198 erhöht werden.

c) lineare Abnahme: $S(t) = 36\,749 - 300 \cdot t$

exponentielle Abnahme: $S(t) = 36\,749 \cdot (36\,449/36\,749)^t$

Bei linearer Abnahme sind es nach 10 Jahren noch 33 749, bei exponentieller Abnahme 33 857 Personen. Der Unterschied ist gering und beide Modelle sind für diesen Zeitraum gleich gut.

Treibstoffverbrauch

Aufgabennummer: 2_015

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y (in Tonnen pro Stunde) des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0,00002x^4 + 0,6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion f an!

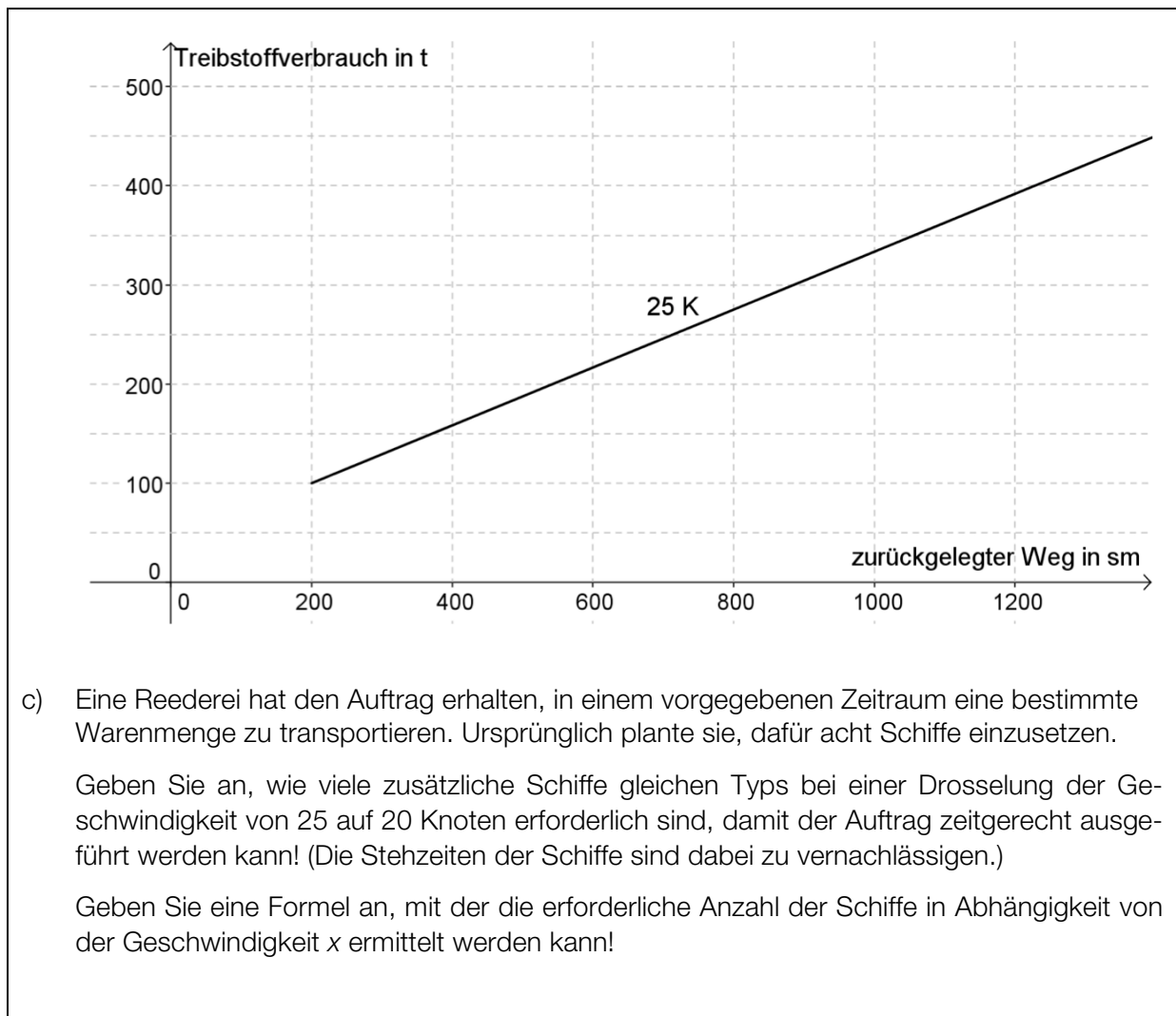
Die Funktion f hat in $H(10|7\ 500)$ ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

- b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlegen Sie, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichnen Sie den entsprechenden Graphen ein!

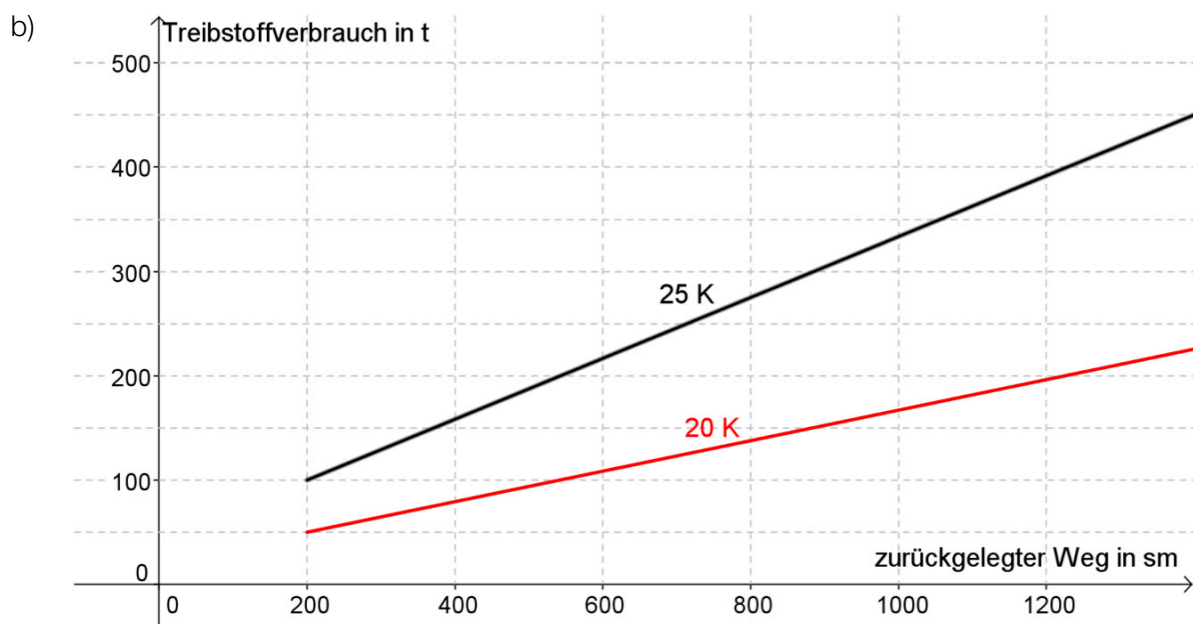
Interpretieren Sie, was die 50%ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



Möglicher Lösungsweg

a) $t = \frac{600}{0,00002x^4 + 0,6}$; $f(x) = \frac{600}{0,00002x^4 + 0,6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.



Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn die Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

$$\text{Anzahl der Schiffe} = \frac{200}{x}$$

Produktionskosten*

Aufgabennummer: 2_016

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: FA 1.6, FA 2.3, FA 1.5, FA 2.2, AN 3.3, AN 1.3

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

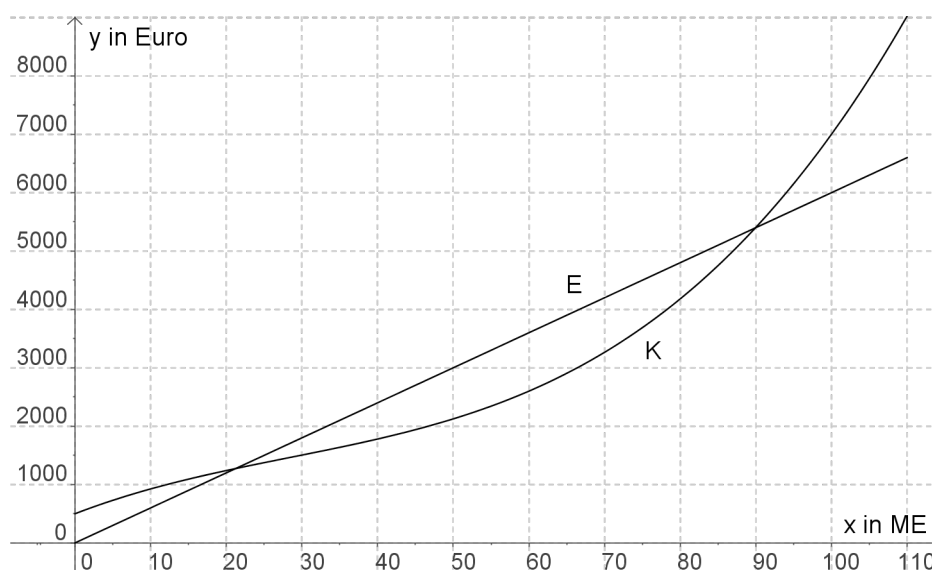
Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu.

Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.

Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



* Diese Aufgabe wurde dem unter <https://www.bifie.at/node/1976> abrufbaren Dokument *Exemplarische Typ-2-Aufgaben* entnommen.

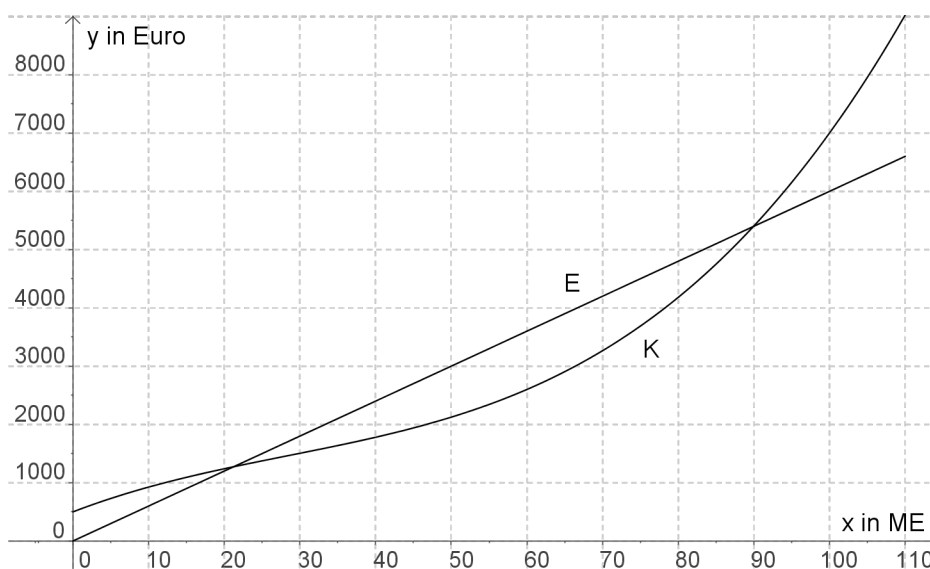
Aufgabenstellung:

- a) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!
Beschreiben Sie, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!
- b) Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!
- c) Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	<input type="checkbox"/>
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	<input type="checkbox"/>
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	<input type="checkbox"/>
Für alle x aus dem Definitionsbereich $[0 \text{ ME}; 110 \text{ ME}]$ gilt: $K'(x) > 0$.	<input type="checkbox"/>
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	<input type="checkbox"/>

Erklären Sie ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

- d) Deuten Sie die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermitteln Sie anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1 , für die dies zutrifft!
Begründen Sie, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Möglicher Lösungsweg

- a) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn **beide** Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z. B.: *Bei einer Produktion von 2 100 bis 9 000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinn Grenzen: ± 100 Stück).

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z. B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner („schmäler“) wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

- b) **Fixkosten:** 500 Euro (Toleranz: ± 100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50} = 60$ Euro (Toleranz: ± 5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein „zu kleines“ Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z. B. 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

- c) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	<input checked="" type="checkbox"/>
Für alle x aus dem Definitionsbereich $[0 \text{ ME}; 110 \text{ ME}]$ gilt: $K'(x) > 0$.	<input checked="" type="checkbox"/>

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z. B.:

$K'(x)$ beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME).

$K''(x)$ beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x .

Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.

Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten:

K' beschreibt das Monotonieverhalten von K , d. h. falls $K'(x) > 0$ ist, steigt K an der Stelle x .

K'' beschreibt das Monotonieverhalten von K' , d. h. falls $K''(x) > 0$ ist, steigt K' an der Stelle x (d. h., die Kostensteigerung nimmt zu).

Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedeutung K' und K'' besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

- d) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: *Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen.*

Oder: *Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E .*

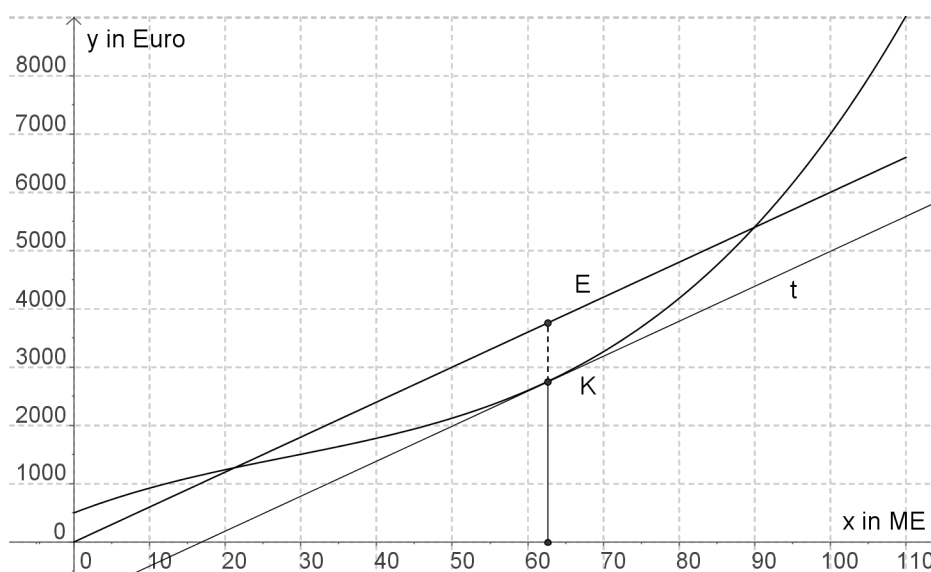
Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung $G(x) = E(x) - K(x)$ gilt: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.*

Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) - K'(x_1) = 0$ und $G(x_1)$ ist daher der maximale Gewinn.

(Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1) ist nicht erforderlich.)

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.



Emissionen

Aufgabennummer: 2_017

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.1, WS 1.1, AN 1.3, FA 1.9

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

Laut Immissionsschutzgesetz – Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h.

Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x -Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x -Ausstoß wurde durch eine Funktion A modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.

Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

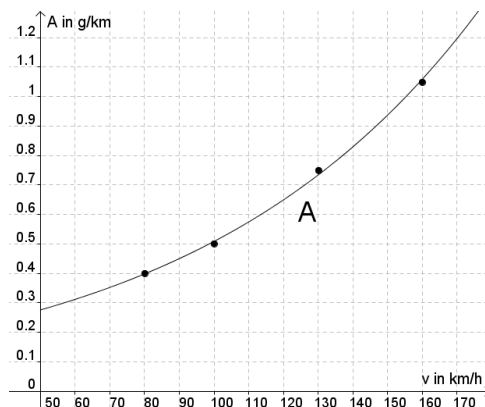


Abbildung 1

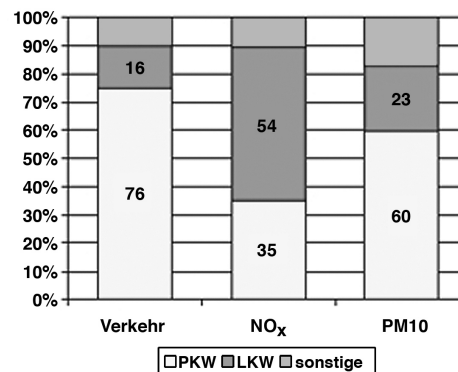


Abbildung 2

Quelle: <http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100>

Aufgabenstellung:

- a) Ermitteln Sie anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Stickoxid-Ausstoß eines PKW abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten 130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!
Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion A in Abbildung 1.

- b) Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.

Begründen Sie, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

- A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)
 B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehmen Sie die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führen Sie diese an!

- c) Ermitteln Sie rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks

$$\frac{A(160) - A(100)}{60}$$

auf vier Dezimalstellen genau!
 Interpretieren Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_x-Emissionen!

- d) Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuzen Sie die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	<input type="checkbox"/>
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	<input type="checkbox"/>
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	<input type="checkbox"/>
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	<input type="checkbox"/>
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	<input type="checkbox"/>

Begründen Sie, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Möglicher Lösungsweg

- a) Richtige Berechnung der Abnahme der NO_x -Emissionen: $\frac{0,5}{0,75} \approx 0,67$.

Der Stickoxid-Ausstoß nimmt um ungefähr 33 % ab.

Alle Ergebnisse im Intervall [30 %; 35 %] sind als richtig zu werten.

Auch die Antwort, dass die Emissionen bei einer Reduktion der Geschwindigkeit auf 100 km/h nur mehr 67 % des Wertes bei 130 km/h betragen, ist als richtig zu werten (Lösungsintervall, falls die noch vorhandenen Emissionen angegeben werden: [65 %; 70 %]).

Zudem muss eine Begründung angegeben sein, dass A nicht direkt proportional zu v ist, z. B.: *Der Stickoxid-Ausstoß ist nicht direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit, weil der Graph von A nicht linear verläuft.*

Auch andere, aus der Abbildung ableitbare Formulierungen wie z. B. *Nicht direkt proportional, weil sich die Emissionen mehr als verdoppeln, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird*, aufgrund derer eine direkte Proportionalität ausgeschlossen werden kann, sind als richtig zu werten.

- b) Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn sinngemäß begründet ist, dass PKW zwar den größten Anteil an den Feinstaub-Emissionen besitzen, bei den Stickoxid-Emissionen aber die LKW die Hauptverursacher sind, z. B.: *Im Tiroler Unterinntal haben PKW mit 76 % den größten Anteil am Verkehrsaufkommen. Sie verursachen mit 60 % zwar den größten Anteil der Feinstaub-Emissionen, aber nur 35 % der Stickoxid-Emissionen.*

Anmerkung: Die Zahlenwerte müssen nicht angeführt sein.

Zudem muss eine schlüssige Begründung angegeben werden, dass Maßnahme A wirkungsvoller für eine Stickoxid-Reduktion ist, z. B.: *LKW verursachen 54 % der NO_x -Emissionen im Straßenverkehr, obwohl ihr Anteil am Verkehrsaufkommen nur 16 % beträgt. Eine Reduktion des LKW-Verkehrs auf die Hälfte würde die NO_x -Emissionen um ca. 27 % reduzieren.*

PKW haben zwar einen Anteil von 76 % am Verkehrsaufkommen, sind aber nur für 35 % der NO_x -Emissionen verantwortlich. Durch eine Reduktion des Tempolimits von 130 km/h auf 80 km/h könnten laut Abbildung 1 maximal die Hälfte dieser Emissionen, also etwa 17 %, vermieden werden. Eine Verlagerung der Hälfte des LKW-Verkehrs auf die Schiene wäre daher die wirkungsvollere Maßnahme zur Reduktion der NO_x -Emissionen.

Anmerkung: Auch eine Begründung mit gerundeten relativen Anteilen (*drei Viertel* etc.) ist als richtig zu werten.

- c) Richtige Berechnung des Differenzenquotienten: $\frac{A(160) - A(100)}{60} = \frac{1,05 - 0,5}{60} \approx 0,0092$, wobei Ergebnisse aus dem Intervall [0,0088; 0,0095] als richtig zu werten sind. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Zudem muss der Differenzenquotient richtig interpretiert werden, z. B.: *Wenn die Geschwindigkeit von 100 km/h auf 160 km/h erhöht wird, beträgt die mittlere Zunahme der NO_x -Emissionen 0,0092 g/km pro km/h.*

Auch analoge Formulierungen wie z. B. *mittlere Änderungsrate des Stickoxid-Ausstoßes* sind als richtig zu werten. Das Geschwindigkeitsintervall [100 km/h; 160 km/h] muss in der Interpretation in irgendeiner Form vorkommen.

- d) Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	<input checked="" type="checkbox"/>
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	<input checked="" type="checkbox"/>

Zudem müssen drei sinngemäß richtige Begründungen angegeben sein, warum die restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung nicht geeignet sind, z. B.:

Der Graph von $A(v) = a \cdot v + b$ ist linear und daher nicht geeignet.

Der Graph von $A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und daher nicht geeignet.

Der Graph von $A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$ ist fallend und daher nicht geeignet.

Wiener U-Bahn

Aufgabennummer: 2_018

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

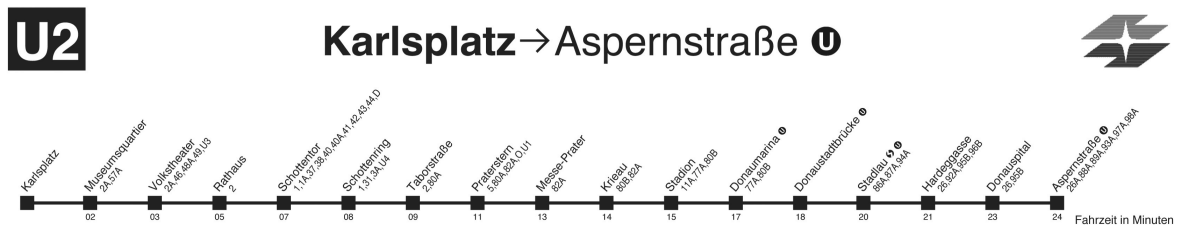
Grundkompetenzen: AN 1.3, FA 1.7, FA 5.3

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

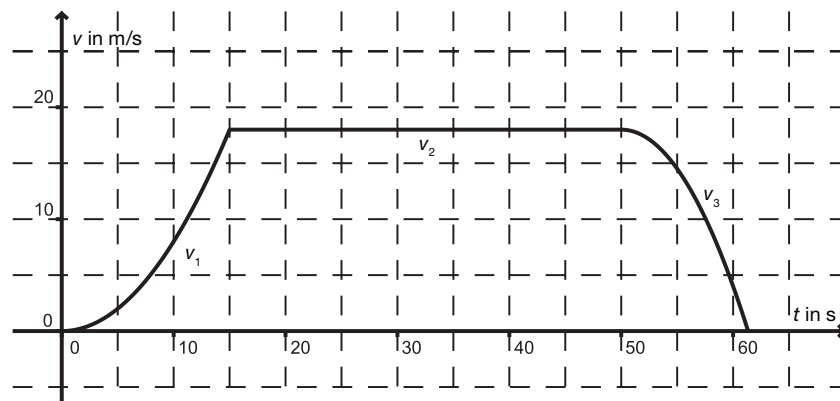
Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012).



Quelle: http://www.wienerlinien.at/media/download/2012/Linie_U2_68801.pdf

Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute. Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0,08t^2 & [0; 15) \\ v_2(t) &= 18 & [15; 50) \\ v_3(t) &= -0,14(t - 50)^2 + 18 & [50; 61,34] \end{aligned}$$



Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall $[15; 50]$ zurücklegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0,14(t - 50)^2 + 18$ verwendet.

Erläutern Sie, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von $-0,14$ auf $-0,2$ den Bremsvorgang beeinflusst!

- b) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

Erklären Sie, wieso der Verlauf des Graphen des v - t -Diagramms im Intervall $[14; 16]$ nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Möglicher Lösungsweg

- a) $18 \cdot (50 - 15) = 630$
Der Weg ist 630 m lang.

Eine Veränderung des Parameters von $-0,14$ auf $-0,2$ würde bedeuten, dass der Zug „stärker“ (d. h. mit einer größeren negativen Beschleunigung) bremst und daher rascher zum Stillstand kommt. Auch der Bremsweg verkürzt sich.

- b) Mittlere Beschleunigung: $\bar{a}_1(0; 15) = \frac{v_1(15) - v_1(0)}{15 - 0} = \frac{18}{15} = 1,2 \text{ m/s}^2$

Bei diesem Geschwindigkeitsverlauf würden die Fahrgäste einen zu starken Ruck bei 15 s verspüren. Um diesen Ruck zu vermeiden, müsste in Wirklichkeit die Geschwindigkeitsfunktion ihre Steigung allmählich ändern, sodass kein Knick (wie jetzt) entsteht. Der Knick des Funktionsgraphen würde einen plötzlichen Sprung der Beschleunigung und somit einen für die Fahrgäste unangenehmen Ruck bedeuten. (Adäquate Erklärungen sind als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

- a) – 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der Weglänge
– 1 Reflexionspunkt für die Erläuterung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *kürzerer Bremsweg, schnellerer Stillstand, stärkere negative Beschleunigung, stärkere Bremsung.*
- b) – 1 Grundkompetenzpunkt für die Berechnung der mittleren Beschleunigung
– 1 Reflexionspunkt für die Erklärung. Äquivalente Antworten sind ebenfalls zu werten, sofern sie klar formuliert sind und sinngemäß eines der folgenden Schlüsselwörter enthalten: *plötzlicher Ruck, unstetige Änderung der Steigung, ruckartige Beschleunigungsveränderung.*

Grippeepidemie

Aufgabennummer: 2_019

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 3.3, FA 1.5, AN 1.3

keine Hilfsmittel erforderlich

gewohnte Hilfsmittel möglich

besondere Technologie erforderlich

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

- 1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
- 2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
- 3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
- 4) Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
- 5) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.



Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$!

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, die eine korrekte Interpretation des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$ ist/sind!

Der Ausdruck gibt die prozentuelle Änderung der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage an.	<input type="checkbox"/>
Der Ausdruck gibt die Zunahme der Anzahl an Erkrankten in den ersten 8 Tagen an.	<input type="checkbox"/>
Der Ausdruck gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grippewelle am 8. Tag an.	<input type="checkbox"/>
Der Ausdruck beschreibt, wie viele Neuerkrankte es am 8. Tag gibt.	<input type="checkbox"/>
Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	<input type="checkbox"/>

b) Zur Bestimmung der Koeffizienten a , b , c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt:

- 1) $d = 10$
- 2) $a + b + c + d = 100$
- 3) $18a + 2b = 0$
- 4) $300a + 20b + c = 0$

Geben Sie an, welche der angegebenen Informationen durch die vierte Gleichung modelliert werden kann, und erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung!

c) Geben Sie an, an welchem Tag die progressive Zunahme der Anzahl an Erkrankten (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten wird von Tag zu Tag größer) in eine degressive Zunahme (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten nimmt pro Tag wieder ab) übergeht!

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, mit der/denen man eine progressive Zunahme bestimmen kann!

$E'(t) > 0$	<input type="checkbox"/>
$E(t) \geq 0$	<input type="checkbox"/>
$E(t_1) < E(t_2)$ für alle $t_1 > t_2$	<input type="checkbox"/>
$E''(t) > 0$	<input type="checkbox"/>
$E'(t) = E''(t) = 0$	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{E(8) - E(0)}{8} = \frac{730 - 10}{8} = 90$

(Innerhalb der ersten 8 Tage nimmt die Anzahl der Erkrankten um durchschnittlich 90 Personen pro Tag zu.)

Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	<input checked="" type="checkbox"/>

b) „Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum“ bzw. die 5. Information

Diese Textstelle beschreibt das lokale Maximum (den Hochpunkt), d. h., an dieser Stelle gilt: $E'(10) = 0$.

Durch das Aufstellen der ersten Ableitungsfunktion und das Einsetzen des Wertes $t = 10$ erhält man die nachstehende Gleichung:

$$E'(t) = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow E'(10) = 300a + 20b + c = 0$$

c) Am 3. Tag.

$E''(t) > 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel

- a) – 1 Grundkompetenzpunkt (für die Berechnung des Ausdrucks)
– 1 Reflexionspunkt (für das richtige Ankreuzen der zutreffenden Aussage)
- b) 2 Reflexionspunkte, davon:
 - 1 Punkt für das Erkennen der zugehörigen Information
 - 1 Punkt für die Erklärung (dieser Punkt ist auch zu geben, wenn die Erklärung nur in verbaler Form vorliegt oder nur die Rechenschritte durchgeführt wurden)
- c) – 1 Reflexionspunkt für die kontextbezogene Frage
– 1 Grundkompetenzpunkt für das alleinige Ankreuzen der richtigen Aussage

Bewegung eines Fahrzeugs

Aufgabennummer: 2_020

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: a) AN 4.3, AN 1.3 b) AN 3.3, FA 2.3 c) AG 2.3 d) AN 4.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Im Folgenden wird die Bewegung eines Fahrzeugs beschrieben:

In den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung fährt es mit einer Momentangeschwindigkeit (in m/s), die durch die Funktion v mit $v(t) = -0,8t^2 + 8t$ (mit t in Sekunden) modelliert werden kann. In den folgenden drei Sekunden sinkt seine Geschwindigkeit.

Ab der achten Sekunde bewegt es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 m/s.

Nach zehn Sekunden Fahrzeit erkennt der Lenker ein Hindernis in 90 m Entfernung und reagiert eine Sekunde später. Zu diesem Zeitpunkt beginnt er gleichmäßig zu bremsen und schafft es, rechtzeitig beim Hindernis anzuhalten.

Aufgabenstellung:

a) Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_0^5 v(t) dt$ im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs!
 Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\int_0^5 v(t) dt - \int_0^2 v(t) dt}{3}$ im vorliegenden Kontext an!

b) Interpretieren Sie den Wert $v'(3)$ im Zusammenhang mit der Bewegung des Fahrzeugs!
 Die Ableitungsfunktion v' ist eine lineare Funktion.

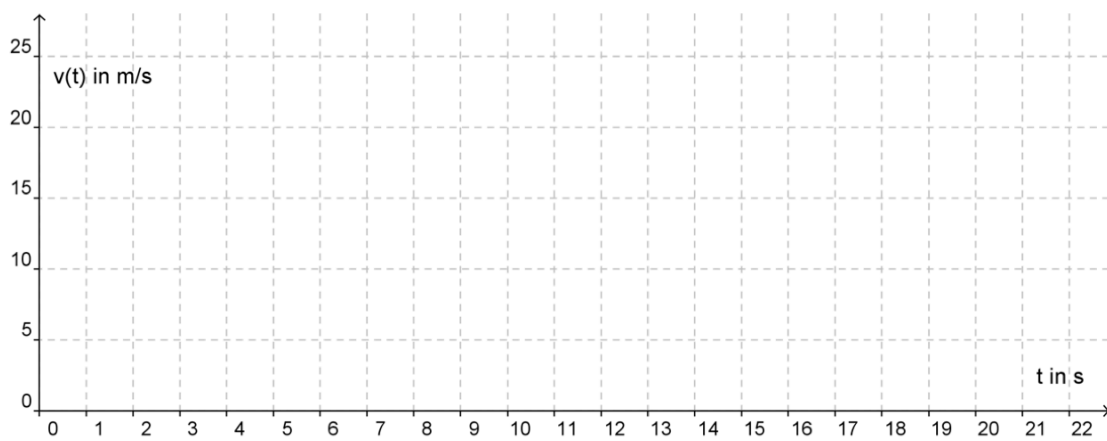
Bestimmen Sie ihren Anstieg und geben Sie dessen Bedeutung im Hinblick auf die Bewegung des Fahrzeugs in den ersten fünf Sekunden an!

c) Ermitteln Sie, nach wie vielen Sekunden das Fahrzeug eine Momentangeschwindigkeit von 20 m/s erreicht!

Beschreiben Sie (verbal und/oder mithilfe einer Skizze) den Geschwindigkeitsverlauf in den ersten fünf Sekunden!

- d) Der Anhalteweg setzt sich aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg zusammen. Berechnen Sie die Zeit, die vom Einsetzen der Bremswirkung elf Sekunden nach Beginn der Bewegung bis zum Stillstand des Fahrzeugs verstreicht!

Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf ab dem Zeitpunkt $t = 10$ in der angegebenen Abbildung graphisch dar und kennzeichnen Sie den Anhalteweg!



Möglicher Lösungsweg

- a) Das Integral $\int_0^5 v(t) dt$ gibt die Länge des Weges in Metern an, den das Fahrzeug in den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung zurücklegt.

Anmerkung: Die Antwort muss die Einheit m und das Zeitintervall beinhalten.

Der Ausdruck $\frac{\int_0^5 v(t) dt - \int_0^2 v(t) dt}{3}$ gibt die durchschnittliche Geschwindigkeit in m/s des Fahrzeugs im Zeitintervall [2; 5] an.

Anmerkung: Äquivalente Formulierungen sind zu akzeptieren.

- b) $v(t) = -0,8t^2 + 8t$
 $v'(t) = -1,6t + 8$
 $v'(3) = 3,2$

Die Beschleunigung 3 Sekunden nach dem Beginn der Bewegung beträgt $3,2 \text{ m/s}^2$.

Anmerkung: Der Zeitpunkt und der Begriff „Beschleunigung“ müssen angegeben werden.

Die Beschleunigung nimmt pro Sekunde um $1,6 \text{ m/s}^2$ ab.

Anmerkung: Die Einheit m/s^2 muss angegeben werden.

- c) $v(t) = -0,8t^2 + 8t = 20$
 $-0,8t^2 + 8t - 20 = 0 \quad t_1 = t_2 = 5$

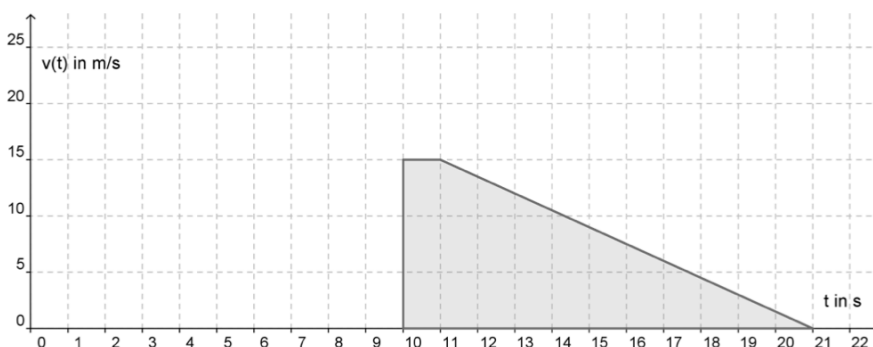
Die Geschwindigkeit steigt im gegebenen Zeitintervall an und erreicht nach 5 Sekunden ihr Maximum von 20 m/s .

Skizzen von Parabeln, die diese Aussage belegen, und äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Anmerkung: Die Beantwortung der ersten Frage kann auch auf anderem Wege erfolgen. Somit kann daraus auch umgekehrt auf die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung, ohne diese zu lösen, geschlossen werden.

- d) $A = 90 = 15 \cdot 1 + \frac{15 \cdot t}{2}$

Der Bremsweg wird in 10 Sekunden zurückgelegt.



Auch andere Lösungswege (z. B. mit Formeln aus der Physik) sind zu akzeptieren.

Hohlspiegel

Aufgabennummer: 2_023

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: a) AG 2.1, FA 1.8 b) FA 1.7, FA 1.8 c) AG 2.1, FA 1.2

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenver-
 spiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der
 Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels.

Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$ ($f > 0$)

Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

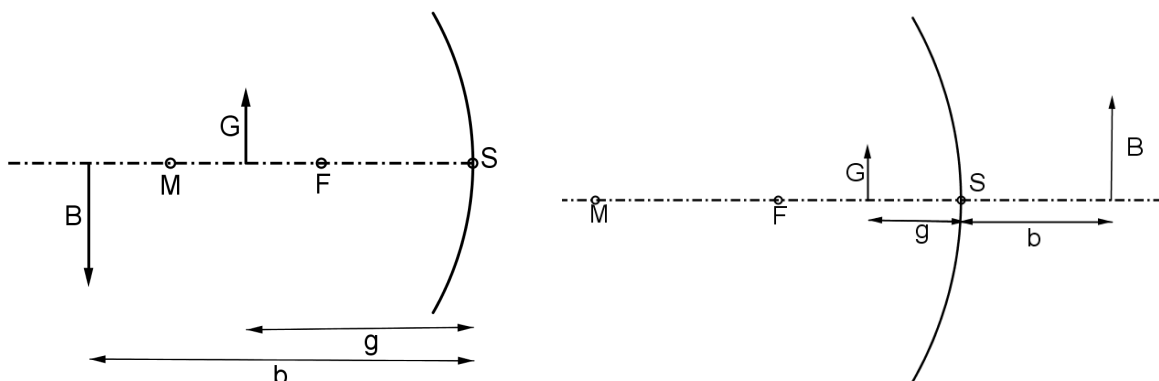
Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit g ($g > 0$)
 bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B
 (mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b .

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:

- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor“ dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen
 werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter“ dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:

- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G ($b > 0$)
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G ($b < 0$)



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40$ cm und $g = 50$ cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

- b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachten Sie die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und geben Sie die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

- c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200} \rightarrow$ Bildweite 200 cm = 2 m

$$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4 \rightarrow \text{vierfache Vergrößerung}$$

Bildweite negativ:

Intervall für g : $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g : $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f} < 0$ folgt $g < f$.

Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f .

b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß. $b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:

Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich – oder ähnliche Aussagen).

Anmerkungen: Wenn die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche

Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1“ als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben“ statt „Zähler“ und „unten“ statt „Nenner“ (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f}$$

$$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \quad | : g$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

Variante 2:

$$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \quad | \cdot (b \cdot f)$$

$$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \quad | : (b \cdot g \cdot f)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \Rightarrow a = -1, k = -1, c = \frac{1}{f}$$

Kartoffeln in Österreich

Aufgabennummer: 2_024

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: a) AN 1.1 b) AN 1.3, FA 2.2 c) WS 1.2, WS 1.3 d) WS 1.1

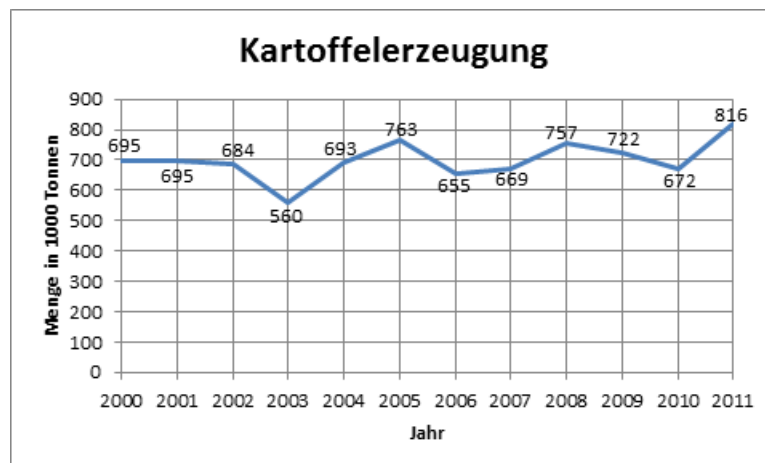
keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

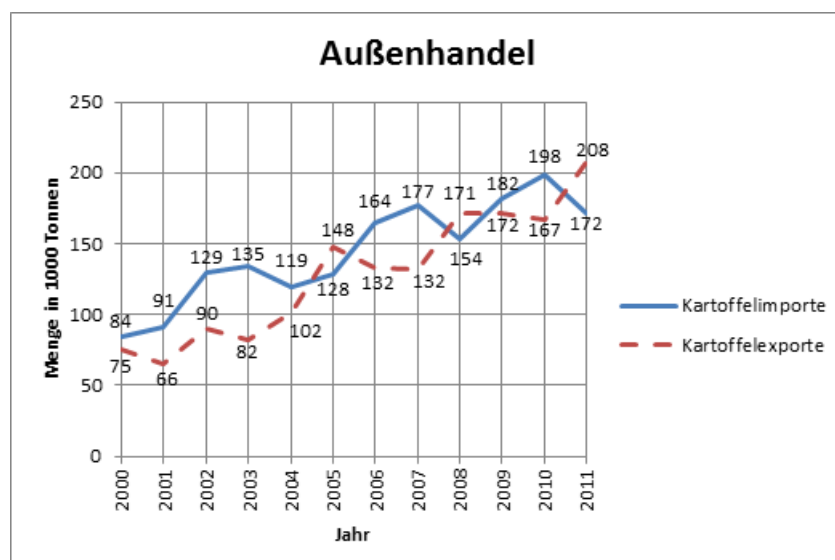
besondere Technologie
erforderlich

Die Kartoffel ist weltweit eines der wichtigsten Nahrungsmittel.

Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung der Kartoffelerzeugung in Österreich vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2011.



In der nachstehenden Abbildung werden Kartoffelimporte und -exporte für den gleichen Zeitraum einander gegenübergestellt.



Aufgabenstellung:

- a) Entnehmen Sie der entsprechenden Graphik, zwischen welchen (aufeinanderfolgenden) Jahren die absolute Zunahme (in Tonnen) und die relative Zunahme (in Prozent) der Erzeugung im Vergleich zum Vorjahr jeweils am größten war! Geben Sie die entsprechenden Werte an!

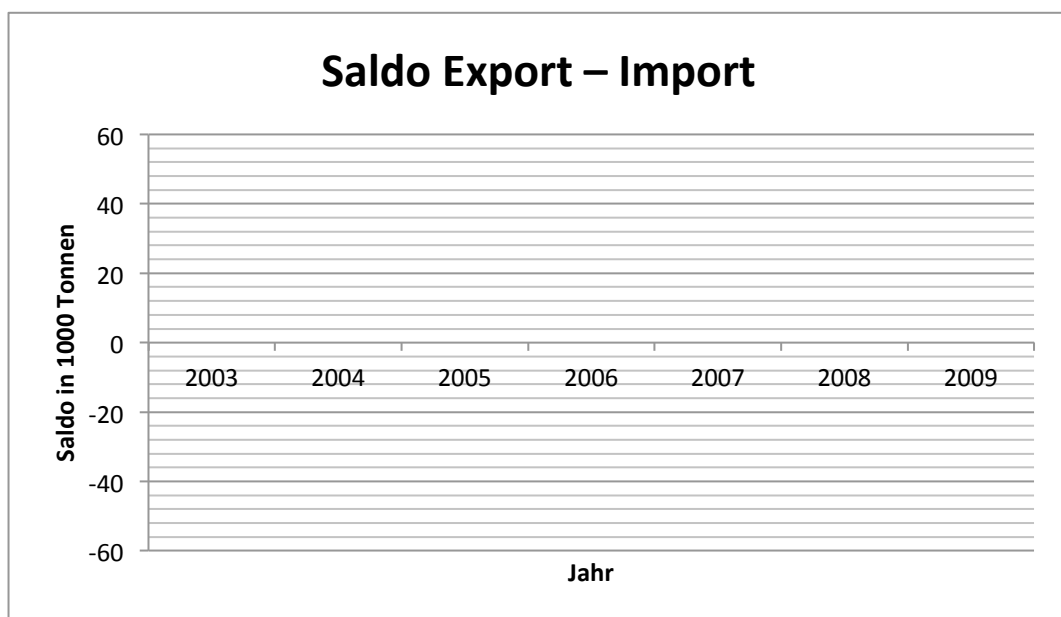
Im vorliegenden Fall fand die größte relative Zunahme der Erzeugung in einem anderen Zeitintervall statt als die größte absolute Zunahme.

Geben Sie eine mathematische Begründung an, warum die größte relative Zunahme und die größte absolute Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden müssen!

- b) Berechnen und interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{E_{2011} - E_{2000}}{11}$, wobei E_{Jahr} die Exportmenge in einem Kalenderjahr angibt! Geben Sie bei der Interpretation auch die entsprechende Einheit an.

Die Exportentwicklung von 2000 bis 2011 soll durch eine lineare Funktion f approximiert werden, wobei die Variable t die Anzahl der seit 2000 vergangenen Jahre sein soll. Die Funktionswerte für die Jahre 2000 und 2011 sollen dabei mit den in der Graphik angeführten Werten übereinstimmen. Geben Sie eine Gleichung dieser Funktion f an!

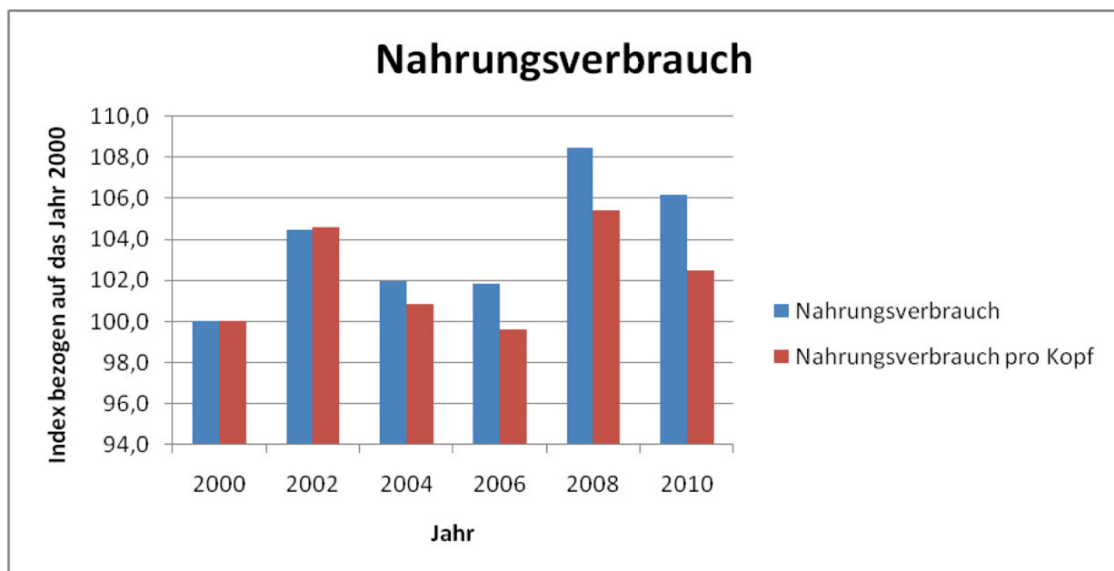
- c) Stellen Sie in der nachstehenden Abbildung die Differenz „Export minus Import“ der Mengen an Kartoffeln für die Jahre 2003 bis 2009 in einem Säulendiagramm dar!



Berechnen Sie das arithmetische Mittel dieser Differenzen für die genannten Jahre!

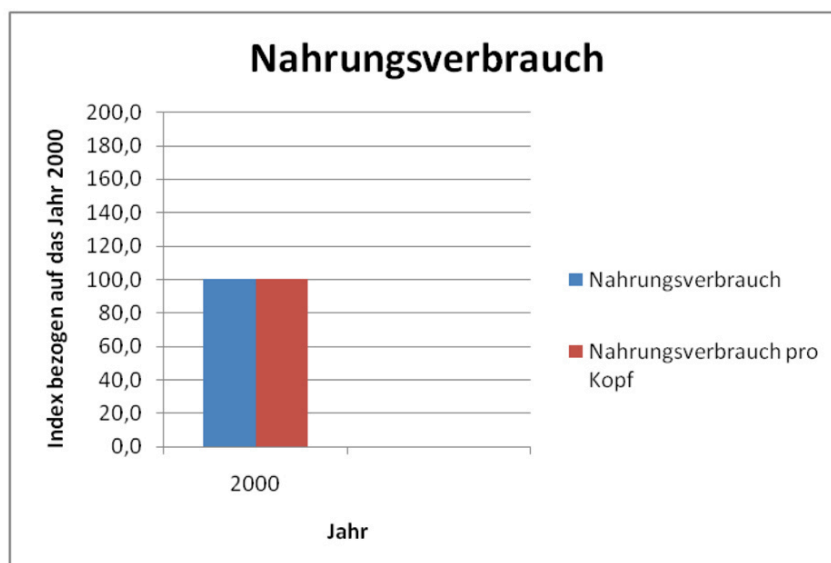
- d) Ein Index ist eine statistische Kennziffer, um die Entwicklung von Größen im Zeitverlauf darzustellen. Oft wird der Ausgangswert mit dem Basiswert 100 versehen. Ein Index von 120 bedeutet beispielsweise, dass eine Größe seit dem Basiszeitpunkt um 20 % gestiegen ist.

Die nachstehende Graphik zeigt die Entwicklung der in Österreich verzehrten Kartoffelmenge (Nahrungsverbrauch) bezogen auf das Jahr 2000.



Geben Sie jeweils ein Jahr an, in dem die Einwohnerzahl in Österreich höher bzw. niedriger war als im Jahr 2000! Begründen Sie Ihre Antwort!

Zeichnen Sie in die nachstehende Graphik zwei mögliche Säulen für ein Jahr, in dem der absolute Nahrungsverbrauch niedriger und die Bevölkerungszahl höher war als im Jahr 2000!



Möglicher Lösungsweg

- a) absolute Zunahme zwischen 2003 und 2004: 133 000 Tonnen
 absolute Zunahme zwischen 2010 und 2011: 144 000 Tonnen
 Die größte absolute Zunahme war im Zeitintervall von 2010 bis 2011.
 relative Zunahme zwischen 2003 und 2004: 23,75 %
 Lösungsintervall in Prozent: [23; 24]
 relative Zunahme zwischen 2010 und 2011: ca. 21,43 %
 Lösungsintervall in Prozent: [21; 22]
 Die größte relative Zunahme war zwischen 2003 und 2004.
 Da für die Berechnung der relativen Zunahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Zunahme und größte relative Zunahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden. Äquivalente Formulierungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) $\frac{E_{2011} - E_{2000}}{11} \approx 12\,000$ Tonnen pro Jahr

Die durchschnittliche Zunahme des österreichischen Kartoffelexports beträgt ca. 12 000 Tonnen pro Jahr.

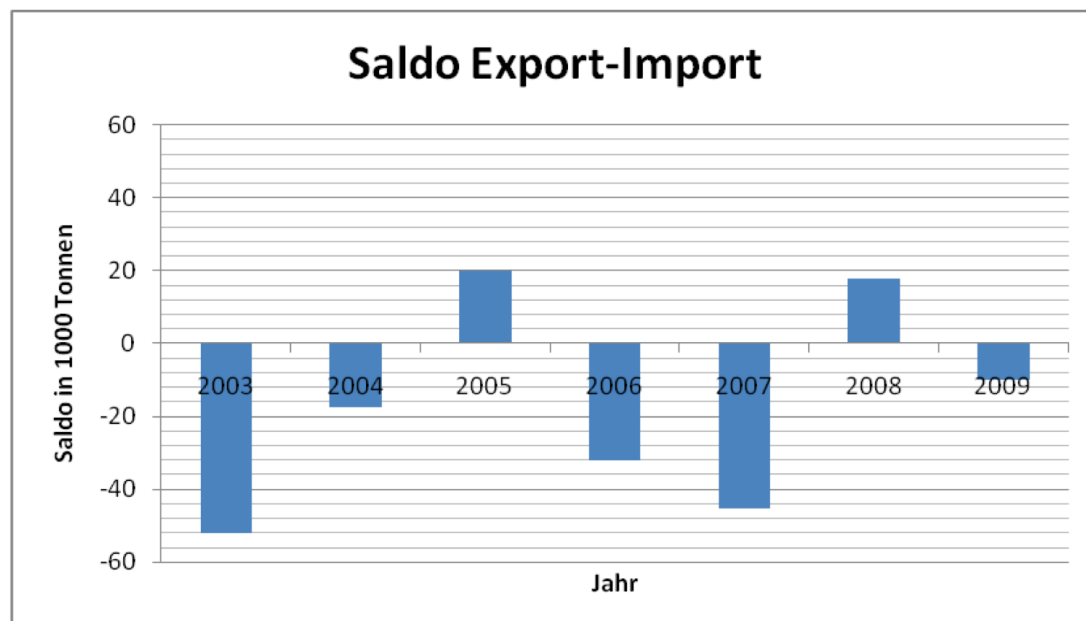
Lösungsintervall: [12 000; 12 100]

Die richtige Einheit muss in der Interpretation vorhanden sein.

f mit $f(t) = 75\,000 + 12\,000 \cdot t$ oder $f(t) = 75 + 12 \cdot t$ oder $f(t) = \frac{133}{11} \cdot t + 75$

Jede jährliche Zunahme aus dem oben angeführten Lösungsintervall muss akzeptiert werden.

c)



Genauigkeit der Säulenlängen: Toleranzbereich $\pm 5\,000$ Tonnen

arithmetisches Mittel: $\frac{-53 - 17 + 20 - 32 - 45 + 17 - 10}{7} \approx -17$

Lösungsintervall: bei Berechnung in 1 000 Tonnen: $[-18; -16]$; bei Berechnung in Tonnen: $[-18\,000; -16\,000]$

- d) – niedrigere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2002 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs kleiner als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
– höhere Einwohnerzahl (als im Jahr 2000) in den Jahren: 2004, 2006, 2008 und 2010 (prozentuelle Veränderung des Nahrungsverbrauchs größer als jene des Nahrungsverbrauchs pro Kopf)
Die Angabe eines Jahres ist hier ausreichend.

Die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch muss niedriger sein als die Säule für 100 % im Jahr 2000. Die Säule für den Nahrungsverbrauch pro Kopf muss bei einer steigenden Bevölkerungszahl niedriger als die Säule für den gesamten Nahrungsverbrauch sein.

Wasserstand eines Bergsees

Aufgabennummer: 2_001

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

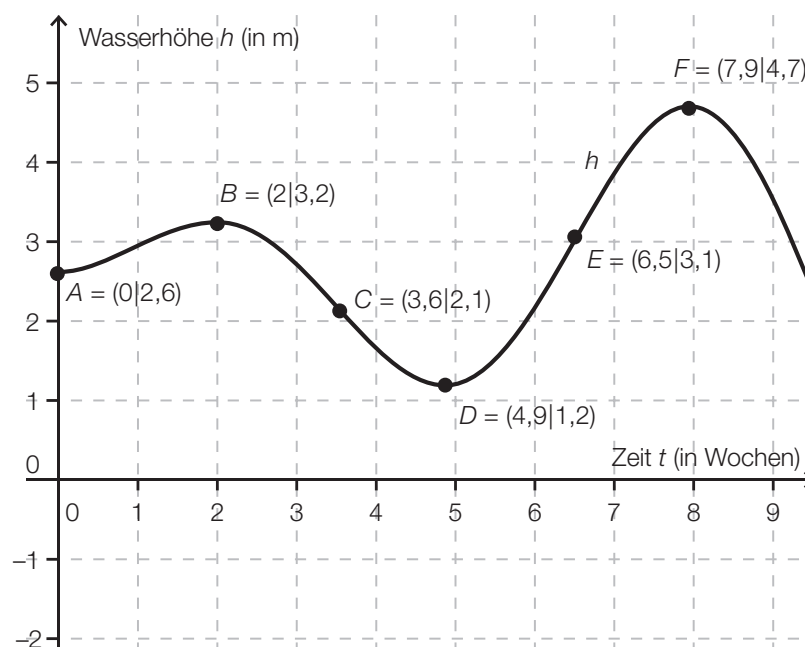
Grundkompetenzen: AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Die Funktion h beschreibt die Wasserhöhe eines Bergsees in Abhängigkeit von der Zeit t . Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h .



Aufgabenstellung:

- Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten des Wasserstands im Intervall $[0; 2]$ und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt! Um wie viel Prozent ist die Wasserhöhe während der ersten zwei Wochen gestiegen?
- Was beschreibt die erste Ableitungsfunktion h' der Funktion h ? Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Differenzialquotienten der Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 6$ und beschreiben Sie in Worten, was dieser Wert angibt!
- Was beschreibt die zweite Ableitungsfunktion h'' der Funktion h ? Wann etwa nimmt die Wasserhöhe am stärksten zu?

Möglicher Lösungsweg

- a) $\frac{3,2 - 2,6}{2 - 0} = 0,3 \Rightarrow$ Bis zum Ende der zweiten Woche nimmt die Wasserhöhe im Mittel pro Woche um 0,3 m zu.
 $3,2 : 2,6 \approx 1,23 \Rightarrow$ Der Wasserstand nahm um ca. 23 % zu.
- b) Durch die erste Ableitungsfunktion h' ist die Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe bestimmt.
 $h'(6) \approx 1,6 \Rightarrow$ Das bedeutet, dass nach sechs Wochen die momentane Änderungsrate 1,6 m pro Woche beträgt.
- c) Die zweite Ableitungsfunktion h'' beschreibt das Monotonieverhalten der Änderungsrate der Wasserhöhe bzw. die momentane Änderungsrate der Änderungsgeschwindigkeit der Wasserhöhe. Die Wasserhöhe nimmt nach ca. 6,5 Wochen am stärksten zu.

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen“. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.

Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.

Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2,9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2,24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0,0000000283 \cdot t^5 - 0,00000734 \cdot t^4 + 0,000872 \cdot t^3 - 0,00275 \cdot t^2 + 2,27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

- b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“ berechnet werden kann!

c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1 , für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$.
Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

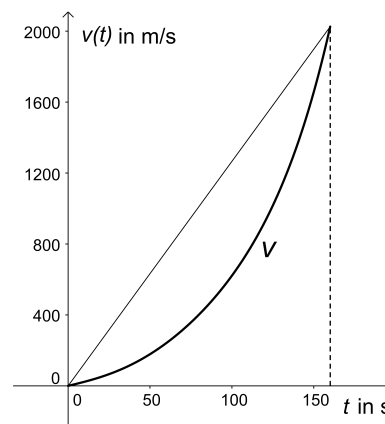
Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2,27 \text{ m/s}^2$
 $a(160) = v'(160) = 40,83 \text{ m/s}^2$

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührungspunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall $[0 \text{ s}; 160 \text{ s}]$ ist.

Weitere mögliche Begründung:
 Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in $[0; 160]$ ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.



b) $s(160) = \int_0^{160} v(t) dt \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0 \text{ m/s}; v(160) \approx 2\,022 \text{ m/s}$
 $v(t_1) = 1\,011 \Rightarrow t_1 \approx 125 \text{ s}$

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
 $\frac{2,24}{2,9} \approx 0,77$

Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

- e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
 r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

- a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: [2,2 m/s²; 2,3 m/s²]
Toleranzintervall für $a(160)$: [40 m/s²; 42 m/s²]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.
- b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: [93 000 m; 94 000 m]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.
- c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1 .
Toleranzintervall: [124 s; 126 s]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.
- d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: [77 %; 78 %]
- e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

Waldbewirtschaftung

Aufgabennummer: 2_027

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 4.1, FA 4.3, FA 5.1, FA 5.6, AN 1.1, AN 1.4, WS 1.3

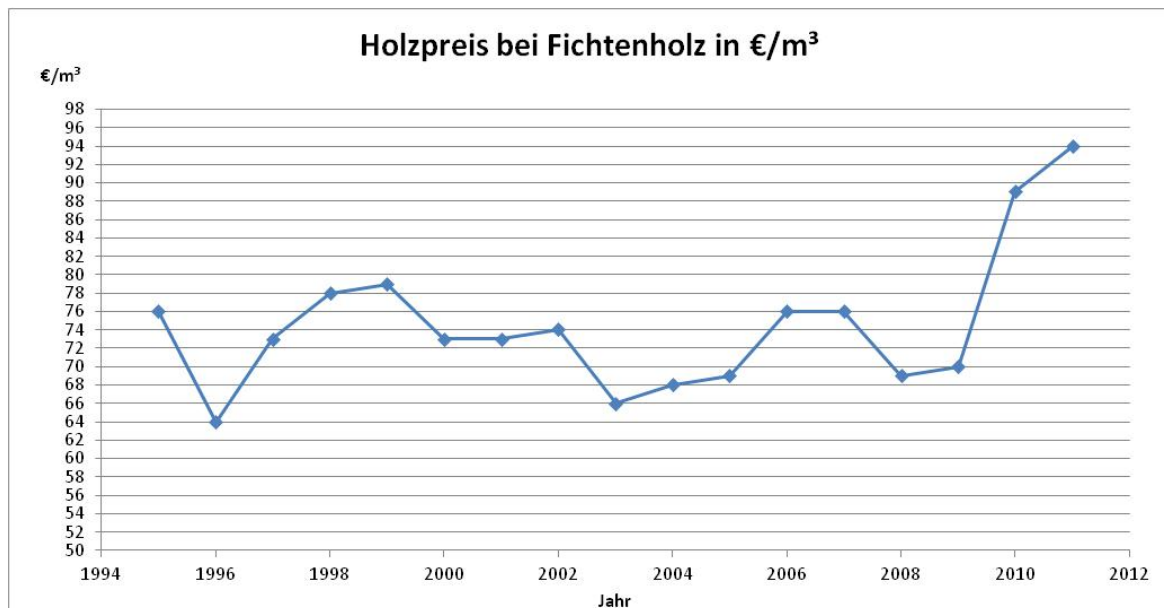
keine Hilfsmittel
erforderlich

gewohnte Hilfsmittel
möglich

besondere Technologie
erforderlich

Der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes in Österreich beträgt 350 m^3 pro Hektar Waldfläche. Pro Jahr ist mit einem durchschnittlichen Zuwachs von $3,3 \%$ zu rechnen. Bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung, wie sie in Österreich vorgeschrieben ist, soll der Holzbestand des Waldes gleich bleiben oder leicht zunehmen.

Der nachstehenden Grafik kann die Entwicklung des Holzpreises bei Fichtenholz im Zeitraum von 1995 bis 2011 entnommen werden.



Datenquelle: <http://bfw.ac.at/db/bfwcms2.web?dok=9430> [21.06.2016].

Aufgabenstellung:

- a) Bestimmen Sie das maximale Holzvolumen (in m^3/ha), das bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung pro Jahr geschlägert werden darf!

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes innerhalb von 10 Jahren zunimmt, unter der Annahme, dass keinerlei Schlägerungen vorgenommen werden, alle anderen genannten Rahmenbedingungen jedoch unverändert bleiben!

- b) Der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes wird in einem Zeitraum von 15 Jahren jährlich jeweils am Ende des Jahres (nachdem der jährliche Zuwachs abgeschlossen ist) um 10 m^3 pro Hektar (also um 200 m^3) verringert.

Ermitteln Sie den Holzbestand des Fichtenwaldes nach Ablauf von 15 Jahren!

Geben Sie an, ob bei dieser Art der Bewirtschaftung der Holzbestand des Fichtenwaldes trotz Schlägerung exponentiell zunimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- c) Ermitteln Sie für den Zeitraum 2003 bis 2011 die empirische Standardabweichung des Holzpreises entsprechend der Formel $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$!

Dabei werden mit x_i die Beobachtungswerte und mit \bar{x} das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte bezeichnet. Lesen Sie die dazu notwendigen Daten aus der Grafik ab!

Begründen Sie anhand der Grafik, warum die empirische Standardabweichung des Holzpreises für den Zeitraum 1998 bis 2004 kleiner ist als die empirische Standardabweichung für den Zeitraum 2005 bis 2011!

- d) Die Entwicklung des Holzpreises soll für den Zeitraum von 2009 bis 2011 durch eine Funktion P mit $P(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modelliert werden. Der Holzpreis $P(t)$ wird in $\text{€}/\text{m}^3$ angegeben, die Zeitrechnung beginnt mit dem Jahr 2009 und erfolgt in der Einheit „Jahre“.

Führen Sie die Modellierung auf Basis der Daten für die Jahre 2009, 2010 und 2011 durch und begründen Sie, warum der Parameter a negativ sein muss!

Ermitteln Sie eine Prognose für den in der Grafik nicht angegebenen Holzpreis für das Jahr 2012 mithilfe dieser Modellfunktion!

- e) Bestimmen Sie für den Zeitraum von 1995 bis 2011 die absoluten Holzpreisänderungen aufeinanderfolgender Jahre!

Geben Sie dasjenige Intervall [Jahr 1; Jahr 2] an, in dem sich der Holzpreis prozentuell am stärksten ändert!

Möglicher Lösungsweg

a) $350 \cdot 0,033 = 11,55$

Jährlich dürfen bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung maximal 11,55 m³/ha Holz geschlägert werden.

$$1,033^{10} \approx 1,384$$

Unter der Annahme, dass keine Schlägerungen erfolgen, nimmt der Holzbestand innerhalb von zehn Jahren um ca. 38,4 % zu.

b)

Jahr	Holzbestand in m ³
0	7 000
1	7 031
2	7 063,023
3	7 096,102759
4	7 130,27415
5	7 165,573197
6	7 202,037112
7	7 239,704337
8	7 278,61458
9	7 318,808861
10	7 360,329554
11	7 403,220429
12	7 447,526703
13	7 493,295085
14	7 540,573822
15	7 589,412759

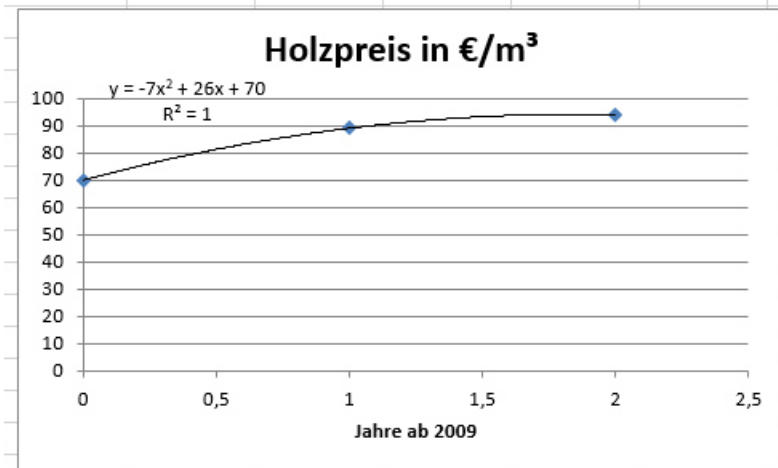
Wenn der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes jährlich jeweils am Ende des Jahres um 10 m³ pro Hektar verringert wird, beträgt er nach Ablauf von 15 Jahren ca. 7 589,41 m³.

Bei dieser Art der Bewirtschaftung nimmt der Holzbestand nicht exponentiell zu, da das jährliche prozentuelle Wachstum nicht konstant ist.

c) Die empirische Standardabweichung beträgt ca. 9,91 €/m³.

Im Zeitraum von 1998 bis 2004 ist die empirische Standardabweichung des Holzpreises kleiner als im Zeitraum von 2005 bis 2011, da die Schwankungen der Werte des Holzpreises im Zeitraum von 1998 bis 2004 geringer sind.

d) $P(t) = -7 \cdot t^2 + 26 \cdot t + 70$



Der Wert des Parameters a muss negativ sein, weil der Graph der Modellfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Prognosewert für das Jahr 2012:

$$P(3) = 85 \text{ €/m}^3$$

e)

Jahr	Holzpreis in €/m ³	absolute Änderungen	prozentuelle Änderungen
1995	76		
1996	64	-12	-15,79
1997	73	9	14,06
1998	78	5	6,85
1999	79	1	1,28
2000	73	-6	-7,59
2001	73	0	0
2002	74	1	1,37
2003	66	-8	-10,81
2004	68	2	3,03
2005	69	1	1,47
2006	76	7	10,14
2007	76	0	0
2008	69	-7	-9,21
2009	70	1	1,45
2010	89	19	27,14
2011	94	5	5,62

Im Zeitraum [2009; 2010] ändert sich der Holzpreis prozentuell am stärksten.

Einkommensverteilung

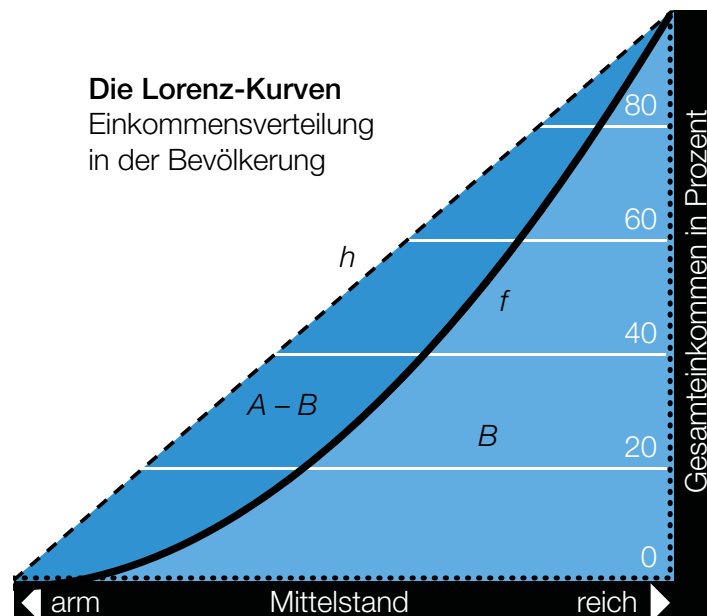
Aufgabennummer: 2_031

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2

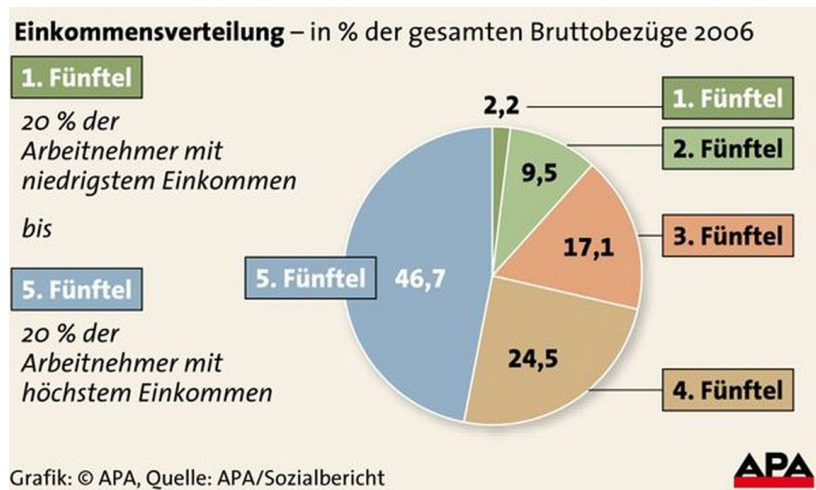
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z. B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch“ ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h , welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x|f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten x % aller Haushalte beziehen $f(x)$ % des Gesamteinkommens.“



Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A-B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

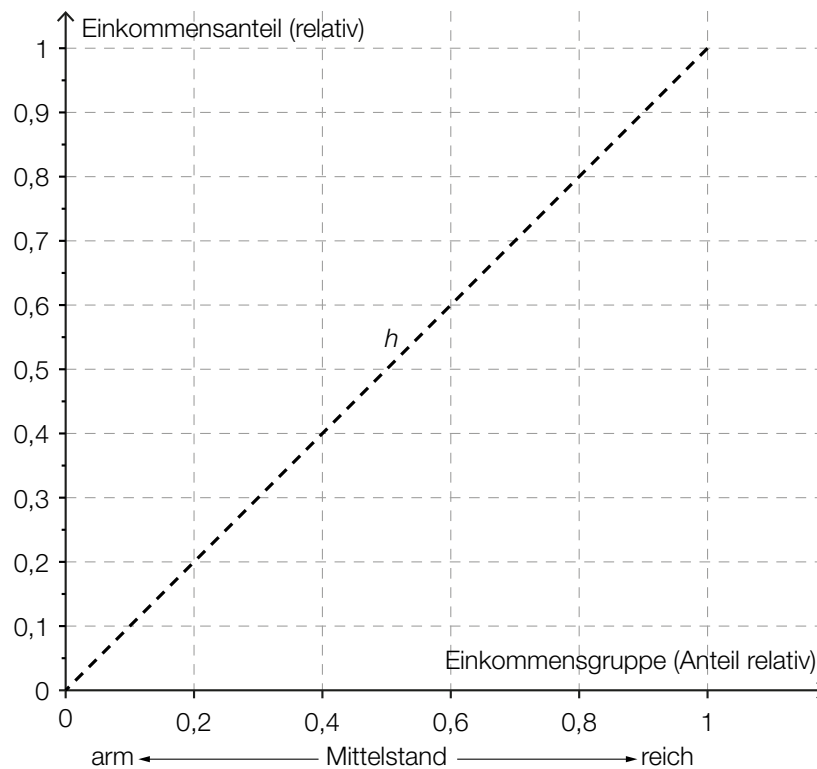
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttoeinkünfte im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkünften nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

- a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

- b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$) nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

- c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0,245 \cdot x^3 + 0,6 \cdot x^2 + 0,155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen“ im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

- d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

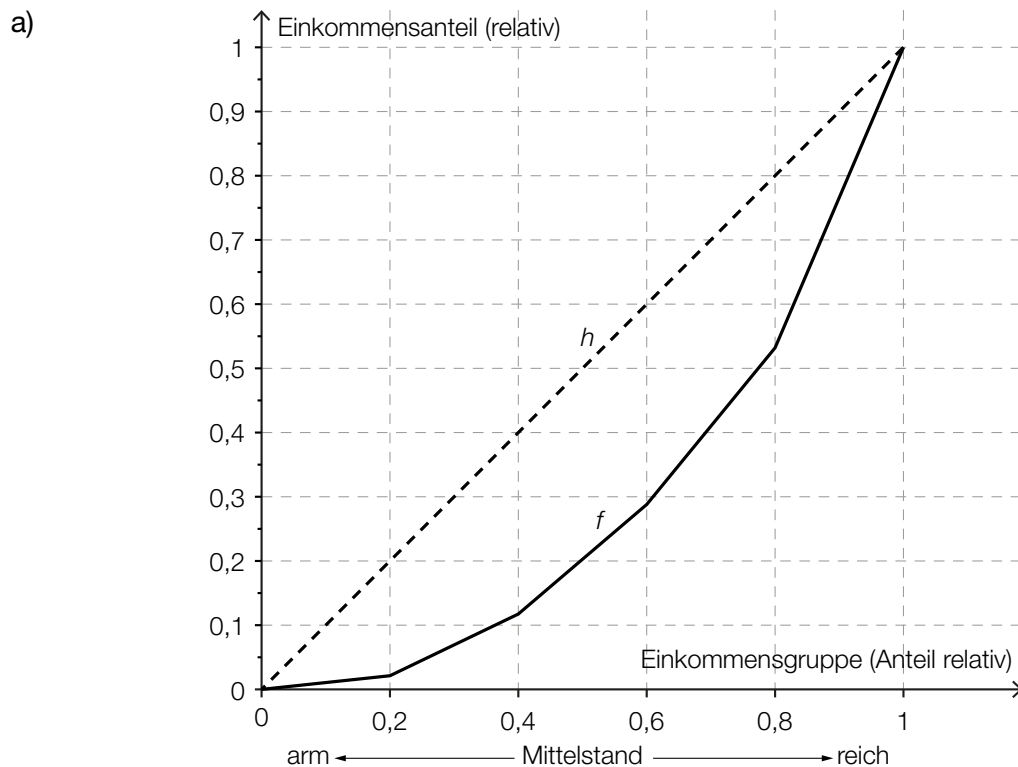
Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichene Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichene Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$$\Rightarrow GUK = \frac{0,208}{0,5} = 0,416$$

- b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0,2$, $x = 0,4$, $x = 0,6$, $x = 0,8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen“ für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer“ Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$) nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

$$\text{c) } GUK = \frac{0,5 - \int_0^1 (0,245x^3 + 0,6x^2 + 0,155x) dx}{0,5} = 0,3225$$

$$g(0,2) \approx 0,057$$

$$g(0,8) \approx 0,633$$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss

$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$$\frac{0,5 - \int_0^1 x^z dx}{0,5} < 0,26$$

$$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$$

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.

Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

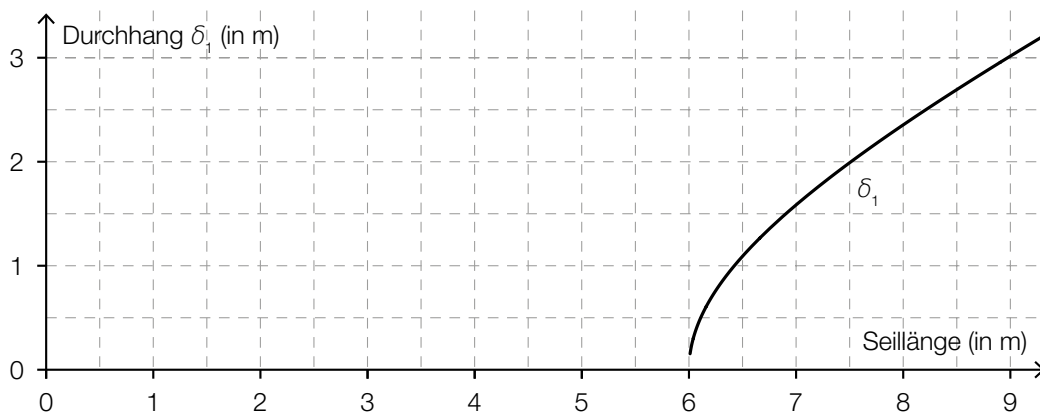
Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

- b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1 , der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

- c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f .

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

- d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen: Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f .

Drücken Sie alle gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h !

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot (e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}) - 1$$

b) $\delta = f(3) - f(0)$

$$\delta \approx 1,2 \text{ m}$$

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.

$\delta_1(8,6) \approx 2,8 \Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$$g(3) = f(3) \approx 5,18 = 9 \cdot b + 4 \Rightarrow b \approx 0,13$$

größter vertikaler Abstand:

$$(g(x) - f(x))' = 0$$

d) $h(-3) = f(-3)$

$$h(0) = f(0)$$

$$h(3) = f(3)$$

$$h'(-3) = f'(-3)$$

$$h'(3) = f'(3)$$

$$h(x) \approx 0,0007 \cdot x^4 + 0,125 \cdot x^2 + 4$$

Laufband

Aufgabennummer: 2_029

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3

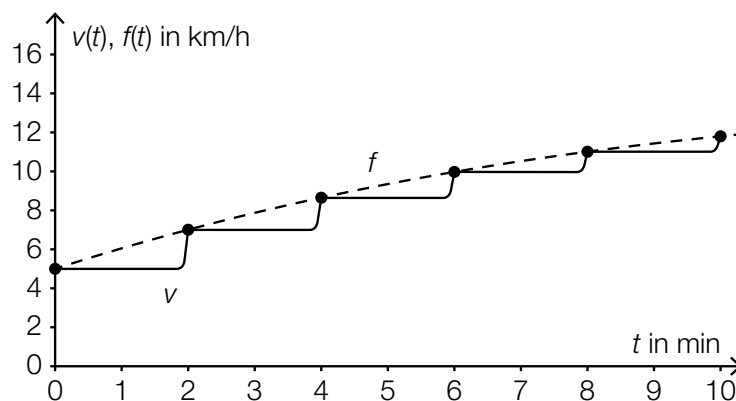
Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.

Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit

$$f(t) = 0,0008 \cdot t^3 - 0,05 \cdot t^2 + 1,1 \cdot t + 5.$$

Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!
Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

- b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

$$v_{\min} = \underline{\hspace{10cm}} \text{ km/h}$$

$$v_{\max} = \underline{\hspace{10cm}} \text{ km/h}$$

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{\min} und t_{\max} , zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{\min}) \neq 0$ und $f'(t_{\max}) \neq 0$ gilt!

- c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$$v'(1) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall $[0; 30]$ verlaufen müsste!

- d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t) dt$ berechnet werden.

Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

- e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
 Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	$t = 15 \text{ min}$	$t = 30 \text{ min}$	$t = 45 \text{ min}$	$t = 60 \text{ min}$
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k !

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + \dots + f(28)) \approx 11,57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \dots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: $0,5 \text{ h} \cdot 11,57 \text{ km/h} = 5,785 \text{ km}$

b) $v_{\min} = 5 \text{ km/h}$
 $v_{\max} = 14,16 \text{ km/h}$

t_{\min} und t_{\max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f , weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s^2 .

oder:

Das Laufband (die Läuferin/der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ min}$ gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2, t = 4, t = 6, \dots$) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t) dt \approx 1,506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:

$$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1,388 \text{ km}$$

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2,5$

$$k = 0,97$$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

Aufnahme einer Substanz ins Blut

Aufgabennummer: 2_026

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7

Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz.

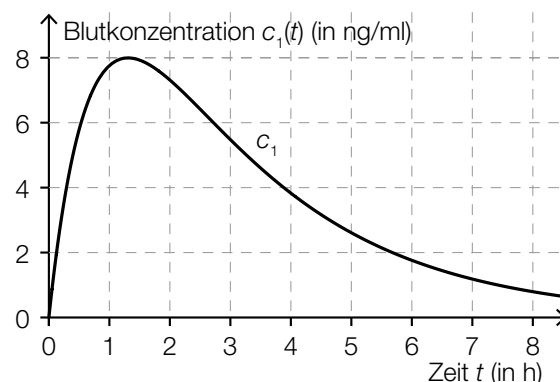
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d. h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f , außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V .

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19,5, a = 0,4$ und $b = 1,3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Begründen Sie allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

- b) Die Werte der Parameter a , b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1 .

Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt! Interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1 , die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer.

Ermitteln Sie, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

- c) Kreuzen Sie diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V , D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	<input type="checkbox"/>
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	<input type="checkbox"/>
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	<input type="checkbox"/>
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	<input type="checkbox"/>
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	<input type="checkbox"/>
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	<input type="checkbox"/>

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehen Sie sich auf die von Ihnen angekreuzte Formel und geben Sie für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Geben Sie weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Möglicher Lösungsweg

a) $c_1(t) = 19,5 \cdot (e^{-0,4 \cdot t} - e^{-1,3 \cdot t})$
 $c_1'(t) = 19,5 \cdot (-0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t} + 1,3 \cdot e^{-1,3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1,31$ Stunden

$c_1''(1,31) \approx -4,15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b} \Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

- b) Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach links“. Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Bei Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1 .

c)

$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19,5}{\lambda} \cdot V$.
 Es handelt sich um eine lineare Funktion.

Abkühlungsprozesse

Aufgabennummer: 2_032

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm.

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0,002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall $[0 \text{ s}; 300 \text{ s}]$ und interpretieren Sie den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!

- b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit“ der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!

Geben Sie weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die t -Achse schließen im Intervall $[0 \text{ s}; 600 \text{ s}]$ eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.

Interpretieren Sie diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

- c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 95 °C . Nach einer Minute ist die Temperatur auf $83,4\text{ °C}$ gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20\text{ °C}$. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

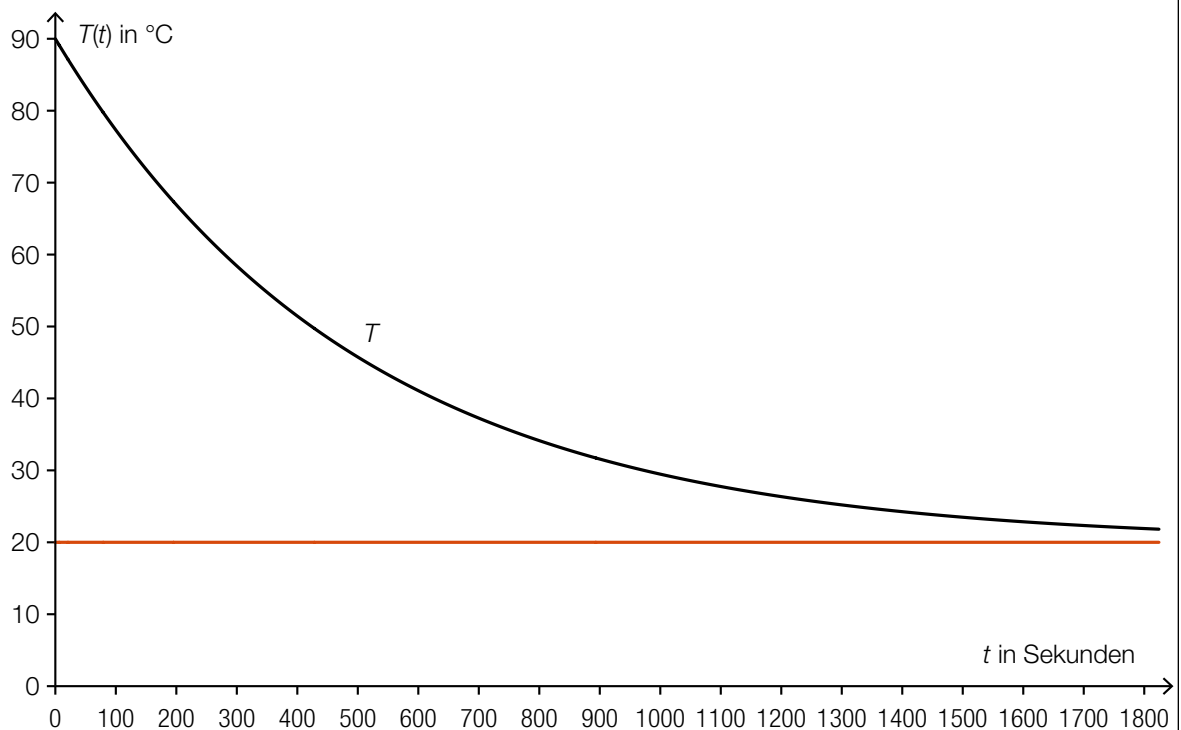
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{T(300) - T(0)}{300} \approx -0,1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C) an.



b) $T'(t) = -0,14 \cdot e^{-0,002 \cdot t}$

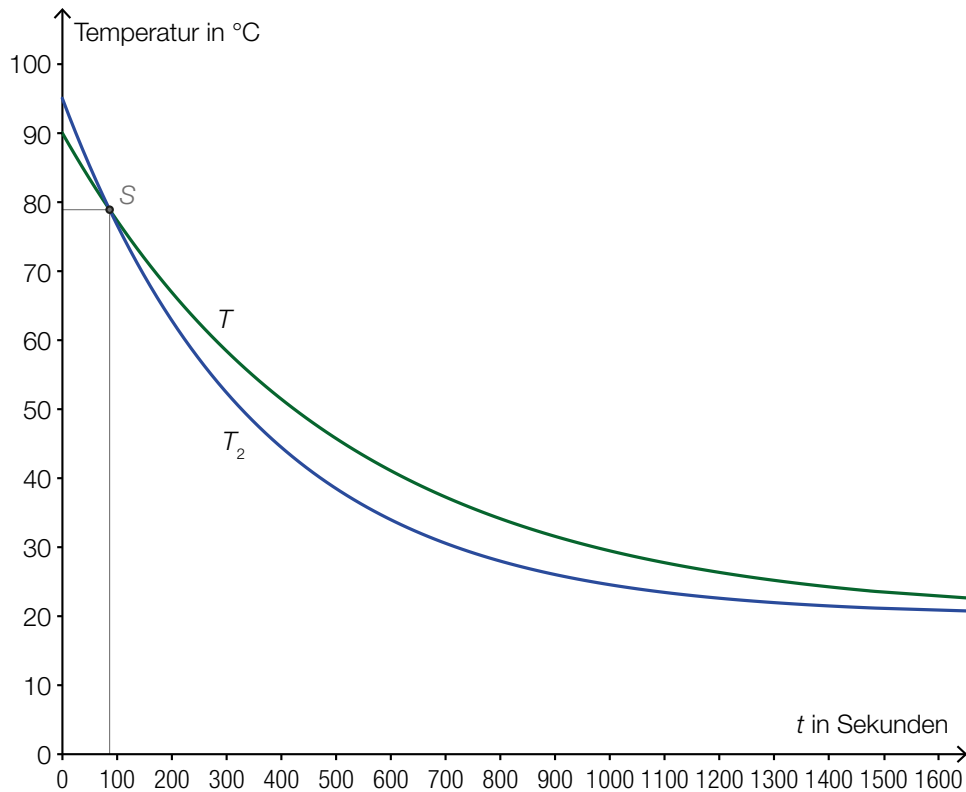
Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

c) $T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83,4$$

$$k_2 \approx 0,0028 \text{ s}^{-1}$$



Schnittpunkt: $S \approx (86,2 | 78,9)$

Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.

Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2_028

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h ($\approx 377,1$ m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h ($\approx 343,3$ m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401,87 \cdot (T + 273,15)}$$

$$v_2 = 331,5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273,15}}$$

Aufgabenstellung:

- a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerfeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meereshöhe, d. h. bei einer Entfernung von $r = 6371\,000$ m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. $9,81$ m/s².

Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}; M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$$a = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m/s}^2$$

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

- b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall $[-60\text{ °C}; 20\text{ °C}]$ in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

- c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall $[-20\text{ °C}; 40\text{ °C}]$ in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $r_1 = 6371000 + 38969 = 6409969 \text{ m}$

$$a(r_1) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6409969^2} = 9,69 \text{ m/s}^2$$

mittlere Beschleunigung: $a = \frac{377,1}{50} = 7,54 \text{ m/s}^2$

b) $\frac{377,1}{1,25} \approx 301,7 \text{ m/s}$

$$v_1(T) = 301,7 \Rightarrow T \approx -46,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{bzw. } v_2(T) = 301,7 \Rightarrow T \approx -46,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

$T \text{ in } ^\circ\text{C}$	$v_1 \text{ in m/s}$	$v_2 \text{ in m/s}$	$\frac{v_2}{v_1}$
-60	292,67	292,84	1,00055
-50	299,46	299,63	1,00055
-40	306,10	306,27	1,00055
-30	312,59	312,77	1,00055
-20	318,96	319,13	1,00055
-10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$$v_2 \approx 1,00055 \cdot v_1 \text{ bzw. } v_1 \approx 0,99945 \cdot v_2$$

c)
$$v_1 = \sqrt{401,87 \cdot (T + 273,15)} = \sqrt{401,87 \cdot 273,15 \cdot \left(\frac{T}{273,15} + 1\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{109770,8 \cdot \left(\frac{T}{273,15} + 1\right)} \approx 331,3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273,15} + 1}$$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2 .

$$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0,6 \dots \text{ pro } 1 \text{ }^\circ\text{C} \text{ nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. } 0,6 \text{ m/s zu}$$

$$d = v_1(0) \approx 331,3 \dots \text{ Schallgeschwindigkeit bei } 0 \text{ }^\circ\text{C}$$