

Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2_028

Prüfungsteil: Typ 1 Typ 2

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h ($\approx 377,1$ m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h ($\approx 343,3$ m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401,87 \cdot (T + 273,15)}$$

$$v_2 = 331,5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273,15}}$$

Aufgabenstellung:

- a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerfeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresebene, d. h. bei einer Entfernung von $r = 6371\,000$ m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. $9,81$ m/s².

Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}; M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$$a = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m/s}^2$$

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

- b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall $[-60\text{ °C}; 20\text{ °C}]$ in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

- c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall $[-20\text{ °C}; 40\text{ °C}]$ in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $r_1 = 6371000 + 38969 = 6409969 \text{ m}$

$$a(r_1) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6409969^2} = 9,69 \text{ m/s}^2$$

mittlere Beschleunigung: $a = \frac{377,1}{50} = 7,54 \text{ m/s}^2$

b) $\frac{377,1}{1,25} \approx 301,7 \text{ m/s}$

$$v_1(T) = 301,7 \Rightarrow T \approx -46,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

bzw. $v_2(T) = 301,7 \Rightarrow T \approx -46,9 \text{ }^\circ\text{C}$

$T \text{ in } ^\circ\text{C}$	$v_1 \text{ in m/s}$	$v_2 \text{ in m/s}$	$\frac{v_2}{v_1}$
-60	292,67	292,84	1,00055
-50	299,46	299,63	1,00055
-40	306,10	306,27	1,00055
-30	312,59	312,77	1,00055
-20	318,96	319,13	1,00055
-10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$$v_2 \approx 1,00055 \cdot v_1 \text{ bzw. } v_1 \approx 0,99945 \cdot v_2$$

c)
$$v_1 = \sqrt{401,87 \cdot (T + 273,15)} = \sqrt{401,87 \cdot 273,15 \cdot \left(\frac{T}{273,15} + 1\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{109770,8 \cdot \left(\frac{T}{273,15} + 1\right)} \approx 331,3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273,15} + 1}$$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2 .

$$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0,6 \dots \text{ pro } 1 \text{ }^\circ\text{C} \text{ nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. } 0,6 \text{ m/s zu}$$

$$d = v_1(0) \approx 331,3 \dots \text{ Schallgeschwindigkeit bei } 0 \text{ }^\circ\text{C}$$