Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Februar 2023

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst vier Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind, und die dazugehörigen Lösungen.

Jede Aufgabe umfasst drei nachzuweisende Handlungskompetenzen.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1			Kandidat/in 2			Kandidat/in 3			Kandidat/in 4			Kandidat/in 5		
Aufgabe 1															
Aufgabe 2															
Aufgabe 3															
Aufgabe 4															
gesamt															

Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem, zwei oder drei Punkten bewertet. Insgesamt können maximal zwölf Punkte erreicht werden.

Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Gesamtanzahl der nachgewiesenen Handlungskompetenzen	Beurteilung der mündlichen Kompensationsprüfung
12	Sehr gut
10–11	Gut
8–9	Befriedigend
6–7	Genügend
0–5	Nicht genügend

Aufgabe 1

Die Kreiszahl π

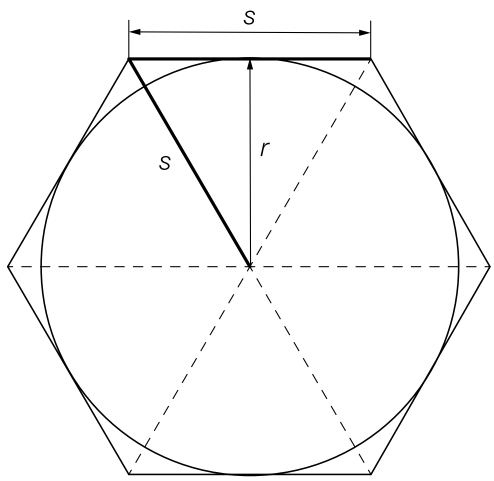
Im Laufe der Geschichte wurden verschiedene Methoden eingesetzt, um die Kreiszahl $\pi = 3{,}141...$ möglichst genau zu bestimmen.

a) Im ältesten bekannten Rechenbuch der Welt *(Papyrus Rhind)* ist für die Kreiszahl der folgende Näherungswert π_N angegeben:

$$\pi_N = \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

1) Berechnen Sie die prozentuelle Abweichung des Näherungswerts π_N von der Kreiszahl π.

b) Bei einer anderen Methode wird der Umfang eines Kreises mit dem Radius r durch den Umfang eines umgeschriebenen Sechsecks angenähert (siehe nebenstehende Abbildung).

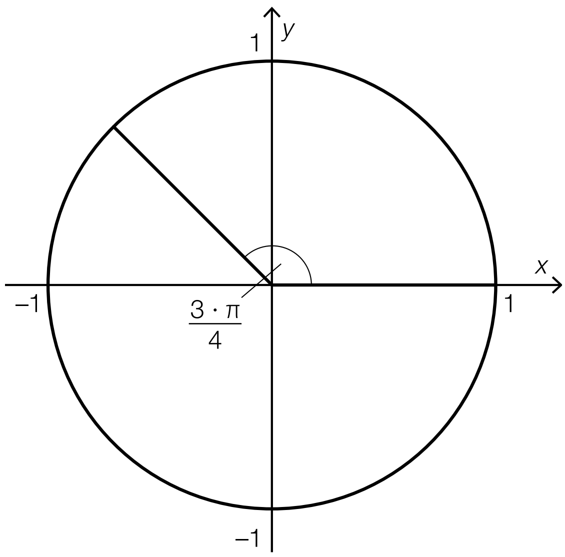


1) Stellen Sie mithilfe von r eine Formel zur Berechnung des Umfangs u des umgeschriebenen Sechsecks auf.

u = ____

c) 1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Einheitskreis den Winkel α mit $\alpha \neq \frac{3 \cdot \pi}{4}$, für den gilt:

$$\sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = \sin(\alpha)$$



Lösung zur Aufgabe 1

Die Kreiszahl π

a1) $\frac{\pi_N - \pi}{\pi} = \frac{0{,}0189...}{3{,}1415...} = 0{,}0060...$

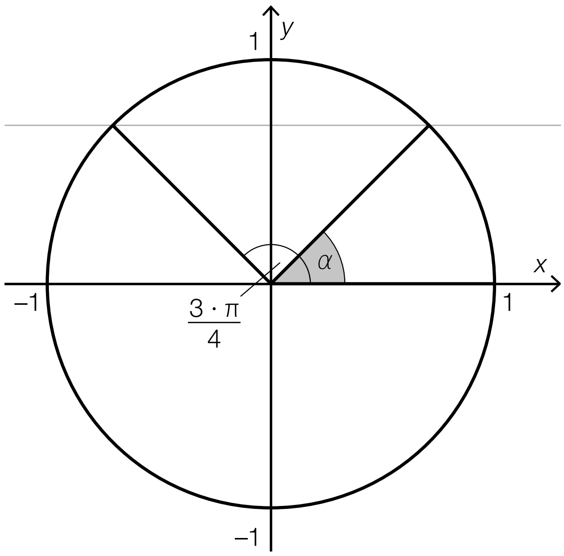
Die prozentuelle Abweichung des Näherungswerts von der Kreiszahl π beträgt rund 0,6 %.

b1) $s^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + r^2$

$s = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}}$

$u = 6 \cdot s = \frac{12 \cdot r}{\sqrt{3}}$

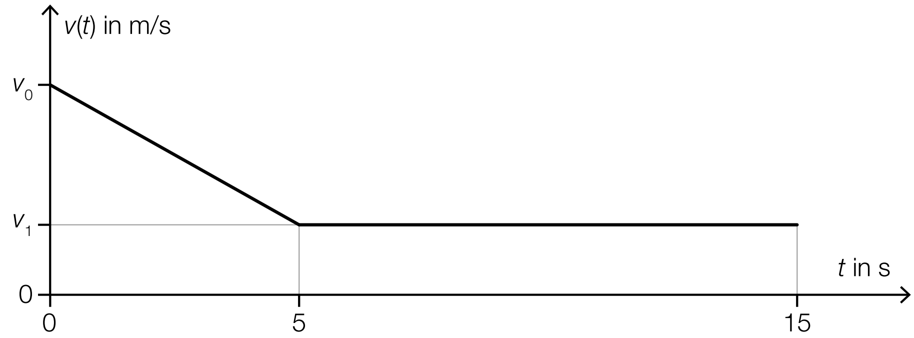
c1)



Aufgabe 2

Autofahrt

a) In der nachstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit für eine bestimmte Autofahrt in einem Zeitraum von 15 s dargestellt.



Der zurückgelegte Weg in den ersten 5 s ist gleich lang wie der zurückgelegte Weg in den darauffolgenden 10 s.

1) Stellen Sie mithilfe von v_0 und v_1 eine Gleichung auf, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt.

b) Für eine andere Autofahrt kann die Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v_A beschrieben werden.

$v_A(t) = 70 \cdot t^3 - 260 \cdot t^2 + 230 \cdot t + 80 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1{,}5$

t ... Zeit in h
$v_A(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit bei dieser Autofahrt.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

   $v_A'(0) = 230$

Lösung zur Aufgabe 2

Autofahrt

a1) $\frac{(v_0 + v_1) \cdot 5}{2} = 10 \cdot v_1$

b1) $v_A'(t) = 210 \cdot t^2 - 520 \cdot t + 230$
$v_A'(t) = 0$ *oder* $210 \cdot t^2 - 520 \cdot t + 230 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 0{,}57...$ $(t_2 = 1{,}89...)$
$v_A(t_1) = 139{,}59...$
Die maximale Geschwindigkeit beträgt rund 140 km/h.

b2) Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit (Beschleunigung) zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 230 km/h².

Aufgabe 3

Bakterien

In einem Labor wird eine Probe mit Bakterien untersucht.

Die Anzahl der Bakterien beträgt zu Beobachtungsbeginn 1200.
Nach 6 Tagen beträgt die Anzahl der Bakterien 1800.

a) Die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Bakterien wird modellhaft durch die lineare Funktion f beschrieben.

t ... Zeit in Tagen mit $t = 0$ für den Beobachtungsbeginn
$f(t)$ ... Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion f auf.

b) Die zeitliche Entwicklung der Anzahl dieser Bakterien wird in einem anderen Modell durch die Exponentialfunktion g beschrieben.

t ... Zeit in Tagen mit $t = 0$ für den Beobachtungsbeginn
$g(t)$ ... Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t

1) Tragen Sie jeweils das fehlende Zeichen (<, > oder =) in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$g'(t) \boxed{} g'(t+1)$

$g''(t) \boxed{} 0$

2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem gemäß diesem Modell die Anzahl der Bakterien 6000 beträgt.

Lösung zur Aufgabe 3

Bakterien

a1) $f(t) = 100 \cdot t + 1\,200$

oder:

$f(t) = \frac{600}{6} \cdot t + 1\,200$

b1) $g'(t)$ $\boxed{<}$ $g'(t + 1)$

$g''(t)$ $\boxed{>}$ 0

b2) $g(t) = a \cdot b^t$
$g(0) = 1\,200$
$g(6) = 1\,800$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$g(t) = 1\,200 \cdot 1{,}0699^t$ *(Koeffizient gerundet)*

$g(t) = 6\,000$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 23{,}8...$

Die Anzahl der Bakterien wird rund 24 Tage nach Beobachtungsbeginn 6 000 betragen.

Aufgabe 4

Würfel

a) Zwei faire sechsflächige Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 werden gleichzeitig geworfen und die Augensumme wird ermittelt.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Augensumme der beiden Würfel.

1) Begründen Sie, warum gilt: $P(X = 11) = 2 \cdot P(X = 12)$.

b) Alex nimmt an einem Gewinnspiel teil. Bei diesem Gewinnspiel wird ein fairer sechsflächiger Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 2, 3, 3 und 3 einmal geworfen.

Der Spielleiter nimmt vor dem Würfelwurf von Alex einen Einsatz von e Euro ein.

Zeigt der Würfel die Augenzahl 1, so zahlt der Spielleiter an Alex x Euro.
Zeigt der Würfel die Augenzahl 2, so zahlt der Spielleiter an Alex 2 Euro.
Zeigt der Würfel die Augenzahl 3, so zahlt der Spielleiter an Alex nichts.

Der Spielleiter weiß aus Erfahrung, dass er pro Würfelwurf einen Gewinn in Höhe von 0,50 Euro erwarten kann.

1) Stellen Sie mithilfe von e eine Gleichung zur Berechnung von x auf.

c) Bei der Produktion eines bestimmten sechsflächigen Würfels mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ist es zu Ungenauigkeiten gekommen. Dies hat zur Folge, dass eine bestimmte Seitenfläche nicht mehr mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie die anderen Seitenflächen nach einem Wurf nach oben zeigt.

Der Würfel wird 500-mal geworfen, die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit der Augenzahl	75	98	65	110	80	72

1) Berechnen Sie auf Basis dieser Ergebnisse einen Schätzwert für die nachstehende Wahrscheinlichkeit.

P(„bei einmaligem Werfen ist die Augenzahl größer als 3“) = ____________________

Lösung zur Aufgabe 4

Würfel

a1) Augensumme 12 ist bei einem Versuchsausgang möglich: {(6, 6)}
Augensumme 11 ist hingegen bei zwei Versuchsausgängen möglich: {(5, 6), (6, 5)}

Alle möglichen Versuchsausgänge haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, daher gilt:
$P(X = 11) = 2 \cdot P(X = 12)$

b1) $e - \left(x \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0{,}5$

c1) $P(\text{„bei einmaligem Werfen ist die Augenzahl größer als 3"}) = \frac{110 + 80 + 72}{500} = 0{,}524$