Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: „Aufgabenstellung“ und „Leitfrage“.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1		Kandidat/in 2		Kandidat/in 3		Kandidat/in 4		Kandidat/in 5	
Aufgabe 1										
Aufgabe 2										
Aufgabe 3										
Aufgabe 4										
Aufgabe 5										
gesamt										

Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist bei jeder Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und bei jeder Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

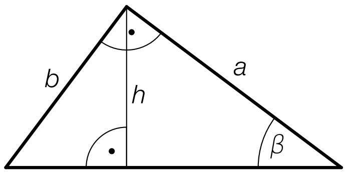
Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Note	**erreichte Punkte (Grundkompetenzpunkte + Leitfragenpunkte)**
Sehr gut	7–10
Gut	6
Befriedigend	5
Genügend	4

Aufgabe 1

Sonnensegel

Ein Sonnensegel hat die Form eines rechtwinkeligen Dreiecks (siehe nachstehende Abbildung).



Aufgabenstellung:

– Stellen Sie mithilfe von h und β eine Formel zur Berechnung von b auf.

$b =$ ____

Leitfrage:

Es soll ein neues Sonnensegel montiert werden, bei dem alle Seitenlängen doppelt so groß wie beim bisherigen Sonnensegel sind.

– Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Flächeninhalt des neuen Sonnensegels 4-mal so groß wie jener des bisherigen Sonnensegels ist.
– Begründen Sie, warum der Winkel β gleich groß bleibt.

Lösung zur Aufgabe 1

Sonnensegel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$b = \frac{h}{\cos(\beta)}$$

oder:

$$b = \frac{h}{\sin(90° - \beta)}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Formel richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$A_{\text{alt}} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A_{\text{neu}} = \frac{2 \cdot a \cdot 2 \cdot b}{2} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 4 \cdot A_{\text{alt}}$$

Der Flächeninhalt ist also 4-mal so groß.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot b}{2 \cdot a}\right)$$

oder:

In ähnlichen Dreiecken sind einander entsprechende Winkel gleich groß.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig nachgewiesen wird, dass der Flächeninhalt 4-mal so groß ist, und richtig begründet wird, warum der Winkel β gleich groß bleibt.

Aufgabe 2

Zwei Flugzeuge

Zwei Flugzeuge fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Flugstrecken können in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Das erste Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_1.
Um 10:00 Uhr befindet es sich im Punkt $(-100|100|6)$.
Um 10:30 Uhr befindet es sich im Punkt $(200|-80|6)$.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_1 der Form $g_1\colon X = P + t \cdot \vec{g}_1,\ t \in \mathbb{R}$ auf.
Dabei gibt $t \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

Leitfrage:

Das zweite Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_2 mit $g_2\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$. Dabei gibt $s \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden und begründen Sie, warum es zu keinem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.

Lösung zur Aufgabe 2

Zwei Flugzeuge

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$g_1\colon X = \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Parameterdarstellung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$s = 5,\ t = 15 \quad \Rightarrow \quad S = (50\,|\,10\,|\,6)$

Das erste Flugzeug ist um 10:15 Uhr im Punkt S, das zweite Flugzeug um 10:05 Uhr.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Schnittpunkts S richtig berechnet werden und eine richtige Begründung angegeben wird.

Aufgabe 3

Bakterien

Die Anzahl bestimmter Bakterien kann in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [70; 140] durch eine Exponentialfunktion B modellhaft beschrieben werden (t in min).
In der nachstehenden Tabelle ist für zwei Zeitpunkte die jeweilige Anzahl dieser Bakterien angegeben.

t	70	140
$B(t)$	80	320

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Bakterien im Zeitintervall [70; 140]. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, zu dem die momentane Änderungsrate gleich hoch wie die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall [70; 140] ist.

Lösung zur Aufgabe 3

Bakterien

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{B(140) - B(70)}{140 - 70} = \frac{320 - 80}{70} = \frac{24}{7} = 3{,}42...$$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund 3,4 Bakterien pro Minute.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate richtig berechnet und die richtige Einheit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$B(t) = 20... \cdot e^{0{,}01980... \cdot t}$

$B'(t_1) = 0{,}396... \cdot e^{0{,}01980... \cdot t_1} = \frac{24}{7} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 108{,}9...$

$t_1 \approx 109$ min

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn t_1 richtig ermittelt wird.

Aufgabe 4

Wertetabelle

Für eine Polynomfunktion f gilt:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	–4	0	–10
1	–8	–6	2

Aufgabenstellung:

– Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ an.

Leitfrage:

Nachstehend sind drei Aussagen über die Funktion f angeführt.

- Aussage 1: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine lokale Minimumstelle.
- Aussage 2: Die Funktion f ist an der Stelle $x = 1$ linksgekrümmt (positiv gekrümmt).
- Aussage 3: Die Funktion f hat im Intervall (0; 1) zumindest eine Wendestelle.

– Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Lösung zur Aufgabe 4

Wertetabelle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = -4$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert des bestimmten Integrals angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aussage 1 ist falsch, da $f''(0) < 0$ gilt.

Aussage 2 ist wahr, da die 2. Ableitung von f an der Stelle $x = 1$ positiv ist ($f''(1) = 2$).

Aussage 3 ist wahr, da im Intervall (0;1) der Graph der Funktion f (mindestens einmal) sein Krümmungsverhalten ändert ($f''(0) < 0$, $f''(1) > 0$).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei jeder der drei Aussagen die richtige Entscheidung getroffen und eine richtige Begründung angegeben wird.

Aufgabe 5

Highspeed-Internetzugang

In einer bestimmten Region haben 15 % aller Haushalte einen Highspeed-Internetzugang.
Für eine Studie werden Haushalte dieser Region zufällig ausgewählt. Dabei wird die Anzahl der untersuchten Haushalte, die einen Highspeed-Internetzugang haben, als binomialverteilt angenommen.

Im Rahmen der Studie wurde folgende Wahrscheinlichkeit mithilfe der Formel für die Binomialverteilung berechnet:

$$\binom{10}{a} \cdot 0{,}15^{a} \cdot b^{6} + \binom{10}{c} \cdot 0{,}15^{c} \cdot b^{c} \approx 0{,}049 \quad \text{mit} \quad a, c \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}^{+}$$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie a, b und c.

– Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit 0,049 im gegebenen Sachzusammenhang.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie, wie viele Haushalte in dieser Region mindestens überprüft werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens 1 Haushalt mit Highspeed-Internetzugang befindet.

Lösung zur Aufgabe 5

Highspeed-Internetzugang

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 4$
$b = 0{,}85$
$c = 5$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 4,9 % befinden sich in einer Gruppe von 10 (zufällig ausgewählten) Haushalten 4 oder 5 Haushalte mit Highspeed-Internetzugang.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn a, b und c richtig ermittelt werden und die Wahrscheinlichkeit 0,049 richtig interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

X ... Anzahl der Haushalte mit Highspeed-Internetzugang
$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0{,}85^n \geq 0{,}99$
$\Rightarrow \quad n \geq 28{,}3...$

Es müssten mindestens 29 Haushalte überprüft werden, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens 1 Haushalt mit Highspeed-Internetzugang befindet.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl der Haushalte richtig ermittelt wird.