Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 7
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: „Aufgabenstellung“ und „Leitfrage“.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1		Kandidat/in 2		Kandidat/in 3		Kandidat/in 4		Kandidat/in 5	
Aufgabe 1										
Aufgabe 2										
Aufgabe 3										
Aufgabe 4										
Aufgabe 5										
gesamt										

Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist bei jeder Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und bei jeder Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Note	**erreichte Punkte (Grundkompetenzpunkte + Leitfragenpunkte)**
Sehr gut	7 – 10
Gut	6
Befriedigend	5
Genügend	4

Aufgabe 1

Geraden

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A = (x_A|y_A)$ und $B = (x_B|y_B)$ mit $x_A < x_B$ und $y_A < y_B$ ($x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{R}$). Sie schließt mit der x-Achse den Winkel α ein.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen α und den Koordinaten von A und B beschreibt.

Leitfrage:

Die Gleichung der Geraden g lautet: $3 \cdot x - 4 \cdot y = 13$.

– Berechnen Sie α.

– Stellen Sie mithilfe von x_A eine Formel zur Berechnung von y_A auf.

$y_A =$ ____

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36{,}86...°$

$y_A = \frac{3 \cdot x_A - 13}{4}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn α richtig berechnet und die Formel richtig aufgestellt wird.

Aufgabe 2

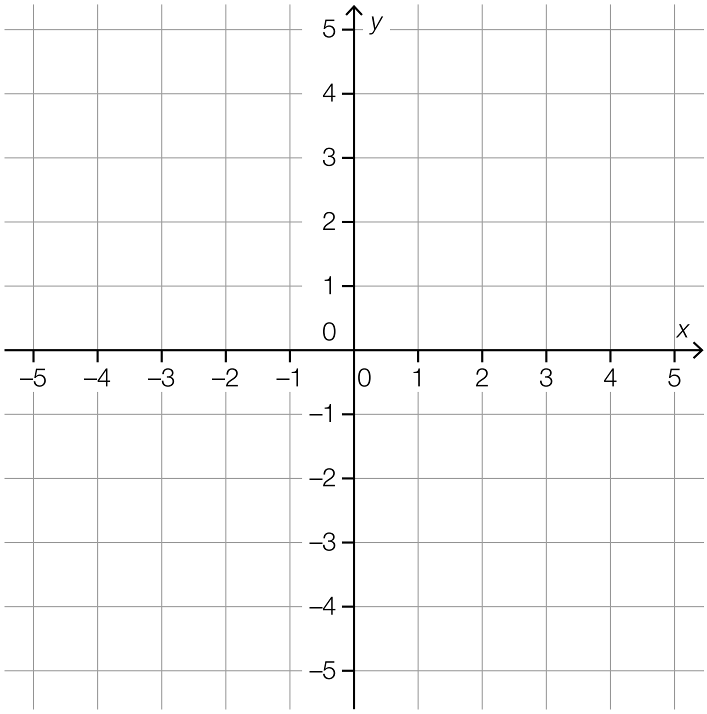
Polynomfunktion 3. Grades

Von der Polynomfunktion 3. Grades *f* ist Folgendes bekannt:

- -4 ist eine Nullstelle von *f*.
- 0 ist eine Wendestelle von *f*.
- 2 ist eine lokale Minimumstelle von *f*.

Aufgabenstellung:

– Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer solchen Polynomfunktion *f* und markieren Sie alle Extrem- und Wendepunkte auf dem Graphen.



Leitfrage:

Von einer Polynomfunktion *g* ist Folgendes bekannt:

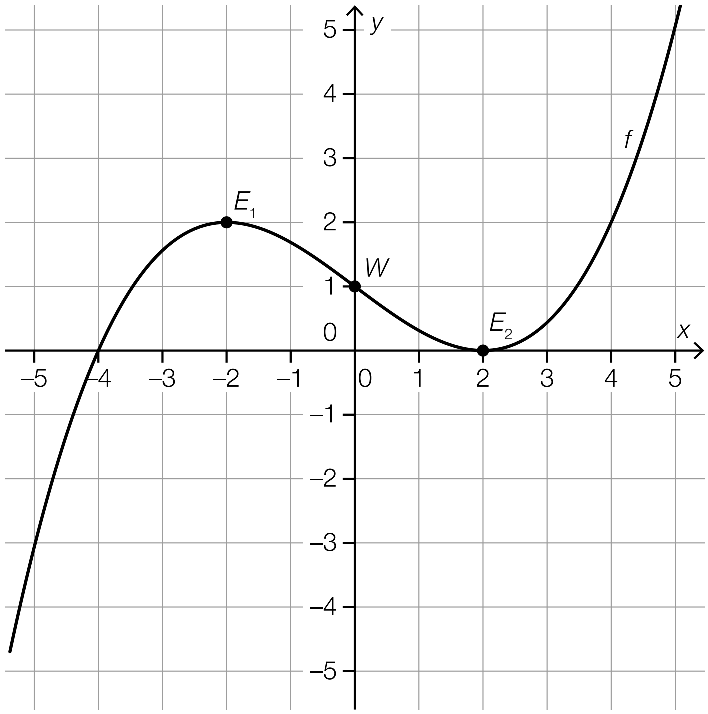
- 0 ist eine lokale Minimumstelle von *g*.
- 2 ist eine lokale Maximumstelle von *g*.
- 3 ist eine Wendestelle von *g*.

– Begründen Sie, warum es sich bei *g* <u>nicht</u> um eine Polynomfunktion 3. Grades handeln kann.

Lösung zur Aufgabe 2

Polynomfunktion 3. Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph richtig skizziert wird und alle Extrem- und Wendepunkte markiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle. Diese Wendestelle liegt zwischen den beiden lokalen Extremstellen (falls vorhanden). Außerhalb des Intervalls [0; 2] kann daher keine weitere Wendestelle liegen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig begründet wird.

Aufgabe 3

Rechtecke und Umkreise

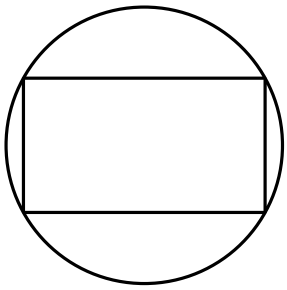
Betrachtet werden Rechtecke mit der Länge a und der Breite $a - 4$ mit $a > 4$.
Die Funktion A ordnet jeder Länge a den Flächeninhalt $A(a)$ des Rechtecks zu (a in cm, $A(a)$ in cm^2).

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie $A(7) - A(5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

Leitfrage:

Den Rechtecken wird jeweils ein Kreis, der sogenannte Umkreis, umschrieben (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion K ordnet jeder Länge a eines solchen Rechtecks den Flächeninhalt $K(a)$ des zugehörigen Umkreises zu (a in cm, $K(a)$ in cm^2).

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

Für alle $a > 4$ gilt: $K(a) > 1{,}5 \cdot A(a)$.

– Interpretieren Sie diese Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösung zur Aufgabe 3

Rechtecke und Umkreise

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A(7) - A(5) = 21 - 5 = 16$

Ein solches Rechteck mit einer Länge von 7 cm hat einen um 16 cm² größeren Flächeninhalt als ein solches Rechteck mit einer Länge von 5 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert richtig berechnet und interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für den Durchmesser d des Umkreises gilt: $d^2 = a^2 + (a - 4)^2$

$K(a) = \left(\frac{a^2}{2} - 2 \cdot a + 4\right) \cdot \pi$

Der Flächeninhalt des Umkreises ist für $a > 4$ mehr als 1,5-mal so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks.

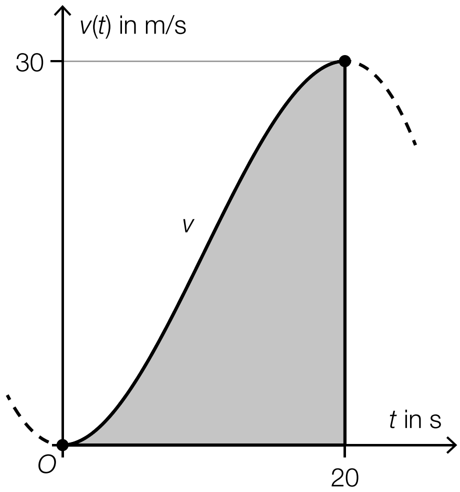
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung richtig aufgestellt und die Ungleichung richtig interpretiert wird.

Aufgabe 4

Autofahrt

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v für die ersten 20 s einer bestimmten Autofahrt dargestellt.



t ... Fahrzeit des Autos in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Autos zur Zeit t in m/s

Aufgabenstellung:

– Interpretieren Sie den Inhalt der grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Leitfrage:

Für die Funktion v gilt:
$v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 20$

An den Stellen $t = 0$ und $t = 20$ hat der Graph der Funktion v jeweils eine waagrechte Tangente.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

Lösung zur Aufgabe 4

Autofahrt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Inhalt der grau markierten Fläche entspricht dem zurückgelegten Weg des Autos in Metern während der ersten 20 s dieser Autofahrt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt im gegebenen Sachzusammenhang richtig interpretiert und die richtige Einheit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v'(t) = 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t + c$

I: $v(0) = 0$
II: $v(20) = 30$
III: $v'(0) = 0$
IV: $v'(20) = 0$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
II: $a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 30$
III: $3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = 0$
IV: $3 \cdot a \cdot 20^2 + 2 \cdot b \cdot 20 + c = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Gleichungssystem richtig erstellt wird.

Aufgabe 5

TAN-Codes

Beim Onlinebanking wird für die Freigabe von Transaktionen häufig durch einen Zufallsgenerator ein 5 Zeichen langer TAN-Code erzeugt. An jeder der 5 Stellen kann dabei eine der 10 Ziffern (0 bis 9) oder einer von 25 Großbuchstaben (A bis Z mit Ausnahme von O) stehen. Für jede Stelle wird jedes der 35 möglichen Zeichen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt (unabhängig von den anderen Stellen). Es kann daher ein Zeichen auch öfter als einmal im TAN-Code vorkommen.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein so erzeugter TAN-Code aus 2 Ziffern und 3 Buchstaben (in beliebiger Reihenfolge) besteht.

Leitfrage:

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass ein TAN-Code mindestens ein Zeichen mehrfach enthält.

Es werden unabhängig voneinander 6 000 TAN-Codes erzeugt.

– Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl an TAN-Codes, die mindestens ein Zeichen mehrfach enthalten.

Lösung zur Aufgabe 5

TAN-Codes

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{35}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{35}\right)^3 = 0{,}2974...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 29,7 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p = 1 - P(\text{„kein Zeichen mehrfach“})$
$p = 1 - \frac{35}{35} \cdot \frac{34}{35} \cdot \frac{33}{35} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{31}{35} = 0{,}2582...$

Die Wahrscheinlichkeit p beträgt rund 25,8 %.

Erwartungswert: $6\,000 \cdot p = 1\,549{,}7...$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit p und der Erwartungswert richtig berechnet werden.