Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Grundumsatz

Der Grundumsatz ist diejenige Energiemenge pro Tag, die ein Mensch für die Aufrechterhaltung der grundlegenden Körperfunktionen (wie z. B. Atmung, Blutkreislauf, Verdauung ...) benötigt. Es gilt der folgende Richtwert: Pro Kilogramm (kg) Körpermasse beträgt der Grundumsatz einer Frau 3,8 Kilojoule (kJ) pro Stunde (h).

1 Kilokalorie (kcal) ≈ 4,2 kJ

Aufgabenstellung:

– Geben Sie denjenigen Faktor an, mit dem die Körpermasse (in kg) einer Frau multipliziert werden muss, um deren Grundumsatz pro Tag (d.h. in 24 Stunden) in kcal zu berechnen.

Leitfrage:

Der tatsächliche Energiebedarf hängt auch von den körperlichen Aktivitäten eines Menschen ab. Der Grundumsatz pro Stunde wird hierfür mit einem PAL-Wert (physical activity level) multipliziert.

PAL-Wert	Tätigkeit
0,95	Nachtruhe
1,2	(fast) ausschließlich sitzende Tätigkeiten
1,6	überwiegend sitzende und zusätzlich stehende/gehende Tätigkeiten
2,2	körperlich anstrengende Tätigkeiten

Tanjas Grundumsatz pro Stunde beträgt 40,71 kcal.

In einem bestimmten Zeitraum von 24 Stunden schläft Tanja 8 Stunden (Nachtruhe) und betreibt 1 Stunde Sport (körperlich anstrengende Tätigkeit). Den Rest der Zeit verbringt sie in der Schule mit (fast) ausschließlich sitzenden Tätigkeiten bzw. zu Hause mit überwiegend sitzenden Tätigkeiten sowie stehenden/gehenden Tätigkeiten.

Ihren tatsächlichen Energiebedarf für diesen Zeitraum (von 24 Stunden) berechnet Tanja mit 1 295 kcal.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden Tanja in diesem Zeitraum mit „(fast) ausschließlich sitzenden Tätigkeiten“ verbringt.

Lösung zur Aufgabe 1

Grundumsatz

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{3{,}8 \cdot 24}{4{,}2} = 21{,}71... \approx 21{,}7$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Faktor angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

a ... Anzahl der Stunden in der Schule
b ... Anzahl der Stunden zu Hause

$40{,}71 \cdot 0{,}95 \cdot 8 + 40{,}71 \cdot 1{,}2 \cdot a + 40{,}71 \cdot 1{,}6 \cdot b + 40{,}71 \cdot 2{,}2 = 1\,295$
$a + b = 24 - 8 - 1 = 15$
$a \approx 4{,}97$

Tanja verbringt in diesem Zeitraum ca. 5 Stunden mit „(fast) ausschließlich sitzenden Tätigkeiten“.

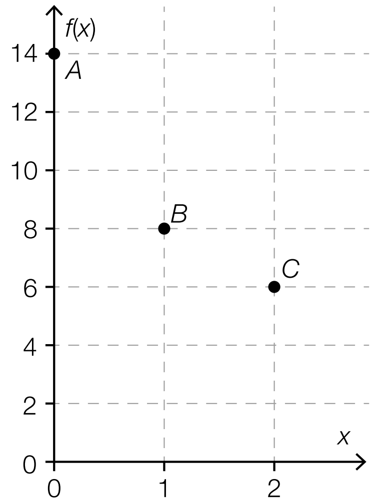
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Stundenanzahl angegeben wird.

Aufgabe 2

Funktionen

Nachstehend sind die drei Punkte A, B und C mit jeweils ganzzahligen Koordinaten dargestellt. Diese Punkte liegen auf dem Graphen einer reellen Funktion f.



Aufgabenstellung:

– Begründen Sie, warum die Funktion f keine Exponentialfunktion sein kann.

Leitfrage:

– Geben Sie einen Punkt $A_1 = (0|y_1)$ so an, dass die drei Punkte A_1, B und C auf dem Graphen einer linearen Funktion f_1 liegen, und geben Sie einen Punkt $A_2 = (0|y_2)$ so an, dass die drei Punkte A_2, B und C auf dem Graphen einer Exponentialfunktion f_2 liegen.

– Begründen Sie, warum die Aussage $f_2''(x) > f_1''(x)$ bei der vorliegenden Modellierung für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr ist.

Lösung zur Aufgabe 2

Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Begründung:

Es gibt keine Exponentialfunktion, die die gegebenen Punkte enthält, da die prozentuelle Abnahme nicht konstant ist.
Im Intervall [0; 1] beträgt die prozentuelle Abnahme ca. 42,86 %, im Intervall [1; 2] beträgt sie 25 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig begründet wird, warum f keine Exponentialfunktion sein kann.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$A_1 = (0|10)$
$A_2 = (0|10,\dot{6})$

mögliche Begründung:

Da die Funktion f_2 eine Exponentialfunktion ist und diese linksgekrümmt (positiv gekrümmt) ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f_2''(x) > 0$.
Da f_1 linear ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f_1''(x) = 0$.
Somit gilt: $f_2''(x) > f_1''(x)$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Punkte richtig angegeben werden und richtig begründet wird, warum die Aussage wahr ist.

Aufgabe 3

Extremstellen und Wendestelle

Gegeben ist eine Gleichung der Polynomfunktion f dritten Grades mit
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}; a, c \neq 0)$.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie für den Fall $b = 0$ und $d = 0$ an, welche Vorzeichen die Koeffizienten a und c haben müssen, damit die Polynomfunktion f keine lokalen Extremstellen hat.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, b, c und d die Wendestelle der Funktion f und begründen Sie für den Fall $b = 0$ und $d = 0$, warum der Wendepunkt des Graphen der Polynomfunktion f im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

Lösung zur Aufgabe 3

Extremstellen und Wendestelle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = a \cdot x^3 + c \cdot x$
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + c$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot a \cdot x^2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{3 \cdot a}$

Die Polynomfunktion f hat keine lokale Extremstelle, wenn $-\frac{c}{3 \cdot a} < 0$ gilt, d. h., wenn a und c das gleiche Vorzeichen haben.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Aussage zu den Vorzeichen angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{-b}{3 \cdot a}$

mögliche Begründung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } b = 0 \text{ gilt: } x_W = \frac{0}{3 \cdot a} = 0 \\ \text{für } d = 0 \text{ gilt: } f(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad W = (0|0)$$

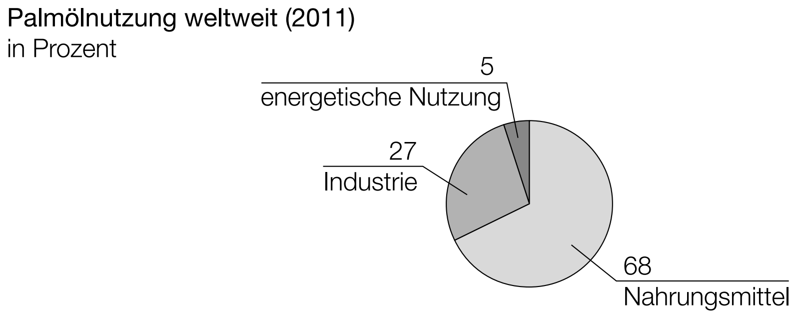
Lösungsschlüssel:

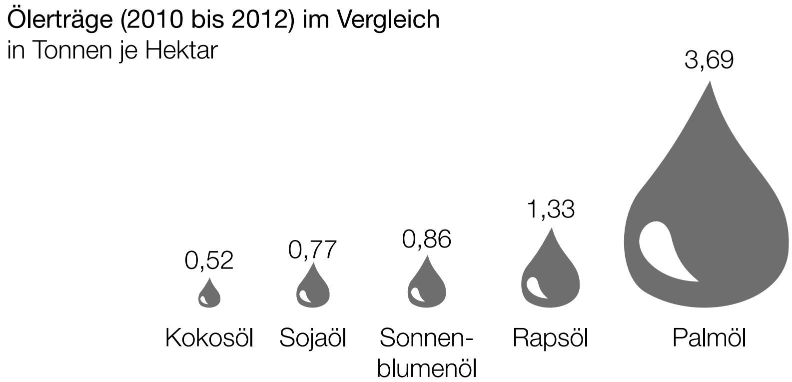
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wendestelle und eine richtige Begründung angegeben werden.

Aufgabe 4

Palmöl

Die nachstehende Abbildung enthält ein Diagramm zur weltweiten Palmölnutzung und ein Diagramm zum Vergleich von Ölerträgen.





Aufgabenstellung:

– Geben Sie zwei Diagrammtypen an, die ebenfalls für die Darstellung der weltweiten Palmölnutzung geeignet sind.
– Begründen Sie, warum die Darstellung der Ölerträge im zweiten Diagramm irreführend sein kann.

Leitfrage:

– Geben Sie anhand von Berechnungen an, welche der nachstehenden Aussagen wahr und welche falsch sind, und stellen Sie die falsche(n) Aussage(n) richtig. Verwenden Sie dazu die oben stehenden Abbildungen.

Aussage 1: Mehr als zwei Drittel des Palmöls werden für Nahrungsmittel verwendet.
Aussage 2: Der Ölertrag ist bei Sonnenblumen um ca. 55 % geringer als bei Raps.
Aussage 3: Der Palmölertrag ist um ca. 177 % höher als der Rapsölertrag.
Aussage 4: Pro Hektar können aus Raps 0,56 Tonnen mehr Öl gewonnen werden als aus Soja.

Lösung zur Aufgabe 4

Palmöl

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Geeignet sind Diagrammtypen, in denen prozentuelle Anteile dargestellt werden können, z. B. Balkendiagramm, Säulendiagramm, Prozentstreifen.

mögliche Begründung:

Die Ölerträge wurden als „Höhen" der Öltropfen dargestellt. Die „Höhe" ist bei Palmöl knapp dreimal so groß wie bei Rapsöl. Fokussiert man aber auf die Fläche der Tropfen bzw. deren Volumina, so kann man ein anderes Verhältnis wahrnehmen, als die Zahlenangaben zeigen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn zwei richtige Diagrammtypen angegeben werden und wenn richtig begründet wird, warum die Darstellung der Ölerträge im zweiten Diagramm irreführend sein kann.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aussage 1: wahr, da 68 % (somit mehr als $66,\dot{6}$ %) für Nahrungsmittel verwendet werden.

Aussage 2: falsch, da $\frac{1,33 - 0,86}{1,33} \approx 0,35 \quad \Rightarrow$ Der Ölertrag ist bei Sonnenblumen um ca. 35 % geringer als bei Raps.

Aussage 3: wahr, da $\frac{3,69}{1,33} \approx 2,77$; das entspricht ca. 277 %.

Aussage 4: wahr, da $1,33 - 0,77 = 0,56$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der Aussagen richtig erkannt wird, ob sie wahr oder falsch ist, und die falsche Aussage richtiggestellt wird.

Aufgabe 5

Spielautomat

Bei einem Spielautomaten ist die Gewinnwahrscheinlichkeit bei jedem Spiel 20 %, unabhängig vom Ergebnis der anderen Spiele.

Aufgabenstellung:

Matthias spielt 15 Spiele auf diesem Automaten.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal gewinnt.

Leitfrage:

Ein Spielautomat dieser Art muss nach 5 000 Spielen gewartet werden.
Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der Gewinne vor der ersten Wartung und kann durch eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ approximiert werden.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $P(X \geq \mu + 2 \cdot \sigma)$.

In einem Spielcasino werden mit einem derartigen Spielautomaten 850 Gewinne erzielt, bevor die erste Wartung fällig ist.

– Geben Sie an, um das Wievielfache der Standardabweichung σ dieser Wert von μ abweicht.

Lösung zur Aufgabe 5

Spielautomat

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$1 - 0{,}8^{15} = 0{,}9648... \approx 0{,}965$
Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal gewinnt, beträgt ca. 96,5 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:
$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq 2\right) = 1 - \phi(2) = 0{,}0227... \approx 2{,}3\ \%$

$\mu = n \cdot p = 5\,000 \cdot 0{,}2 = 1\,000$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}8} \approx 28{,}284$

$1\,000 - 850 > 5 \cdot 28{,}284$
Die Abweichung beträgt mehr als das Fünffache von σ.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit und die richtige Abweichung angegeben werden.