Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Flugbahnen

Die drei Flugzeuge F_1, F_2 und F_3 fliegen in einem bestimmten Zeitraum in der gleichen Höhe. Ihre Flugbahnen können in diesem Zeitraum mithilfe der drei Geraden f_1, f_2 bzw. f_3 modelliert werden.

Dabei gilt: $f_1\colon X = A + r \cdot \vec{v}_1$ mit $r \in \mathbb{R}^+$

$f_2\colon X = B + s \cdot \vec{v}_2$ mit $s \in \mathbb{R}^+$

$f_3\colon X = C + u \cdot \vec{v}_3$ mit $u \in \mathbb{R}^+$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Flugzeug F_1 im Punkt $A = (a|40)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und das Flugzeug F_2 im Punkt $B = (-30|20)$. Die Geschwindigkeitsvektoren der Flugzeuge sind gegeben durch $\vec{v}_1 = \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.
Die Parameter r, s und u geben jeweils die Flugdauer in Minuten ab dem Zeitpunkt $t = 0$ an. Die Geschwindigkeit der Flugzeuge wird in km/min angegeben.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie, für welche Werte von a und b die Flugbahnen von F_1 und F_2 identisch sind.

Leitfrage:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Flugzeug F_3 im Punkt $C = (-20|40)$.

– Ermitteln Sie in diesem Fall den Wert von b so, dass die Flugbahnen von F_2 und F_3 einander rechtwinkelig schneiden.
– Ermitteln Sie den Schnittpunkt S dieser Flugbahnen und begründen Sie, warum es zwischen den beiden Flugzeugen keine Kollision gibt.

Lösung zur Aufgabe 1

Flugbahnen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Lösungsweg:

$f_1\colon X = \begin{pmatrix} a \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

$f_2\colon X = \begin{pmatrix} -30 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = -5$

$\begin{pmatrix} -30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 2,\ a = -50$

$a = -50$
$b = -5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Werte von a und b richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Lösungsweg:

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

$\begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}5;\ s = 3 \quad \Rightarrow \quad S = (-15 \mid 35)$

Es gibt keine Kollision, da die jeweilige Flugdauer bis zum Punkt S (mit $u = 0{,}5$ min bzw. $s = 3$ min) unterschiedlich lang ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Parameters b und der Schnittpunkt S richtig ermittelt werden und eine richtige Begründung erfolgt.

Aufgabe 2

Dreieck

Für ein $a \in \mathbb{R}^+$ ist die lineare Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot a \cdot x + 2$ gegeben. Der Graph von g und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie den Flächeninhalt A dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a an.

$A(a) =$ ____________________

Leitfrage:

Eine Veränderung von a bewirkt eine Veränderung des Flächeninhalts A des Dreiecks.

– Geben Sie an, wie sich A ändert, wenn a verdoppelt wird.

– Geben Sie an, um wie viel % sich A verändert, wenn a um 20 % verkleinert wird.

Lösung zur Aufgabe 2

Dreieck

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Lösungsweg:
Schnittpunkte mit den Achsen: $\left(\frac{1}{a}\middle|0\right)$ und $(0|2)$
$A(a) = \frac{1}{a}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktion angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Lösungsweg:
$A(2 \cdot a) = \frac{1}{2 \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}$
Wird a verdoppelt, so wird A halbiert.
$A(0{,}8 \cdot a) = \frac{1}{0{,}8 \cdot a} = 1{,}25 \cdot \frac{1}{a}$
Wird a um 20 % verkleinert, dann wird A um 25 % größer.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Veränderungen des Flächeninhalts angegeben werden.

Aufgabe 3

Schularbeit

Die Klasse 8a einer Schule besteht aus 27 Schülerinnen und Schülern, die Klasse 8b aus 24 Schülerinnen und Schülern.

Bei der letzten Schularbeit, die in allen 8. Klassen zeitgleich durchgeführt wurde, waren die Schülerinnen und Schüler in der 8a und der 8b vollzählig anwesend. In der 8a wurde <u>ein</u> „Sehr gut" mehr erreicht als in der 8b. Der relative Anteil der „Sehr gut" war in beiden Klassen gleich hoch.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Anzahl der mit „Sehr gut" beurteilten Schularbeiten der 8a.

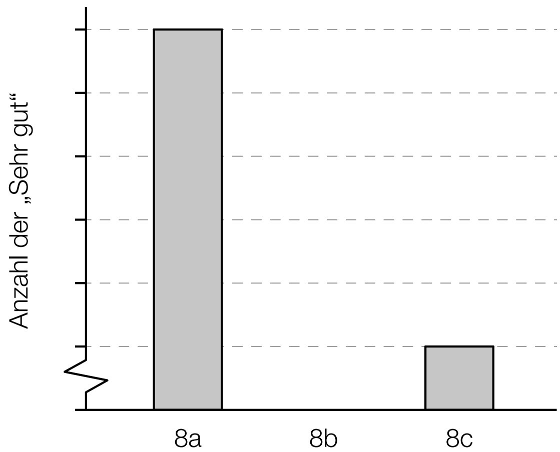
Leitfrage:

Eine Gruppe von 9 Schülerinnen und Schülern der 8c nahm ebenfalls an dieser Schularbeit teil.

Insgesamt erreichten 35 % aller Schülerinnen und Schüler, die an dieser Schularbeit teilgenommen haben, ein „Sehr gut".

– Geben Sie an, wie viele Schülerinnen und Schüler der 8c auf diese Schularbeit ein „Sehr gut" erreichten.

Im nachstehenden Säulendiagramm soll das Ergebnis dieser Schularbeit grafisch dargestellt werden.



– Skalieren Sie die senkrechte Achse im obigen Diagramm so, dass der Sachverhalt richtig dargestellt wird, und ergänzen Sie das Diagramm durch Einzeichnen der Säule für das Ergebnis der 8b.

– Nennen Sie einen Grund dafür, warum dieses Diagramm als manipulativ aufgefasst werden kann.

Lösung zur Aufgabe 3

Schularbeit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Lösungsweg:

n ... Anzahl der „Sehr gut" in der Klasse 8a
$n - 1$ ... Anzahl der „Sehr gut" in der Klasse 8b

$\frac{n}{27} = \frac{n-1}{24} \quad \Rightarrow \quad n = 9$

Neun Schularbeiten der 8a wurden mit „Sehr gut" beurteilt.

Lösungsschlüssel:

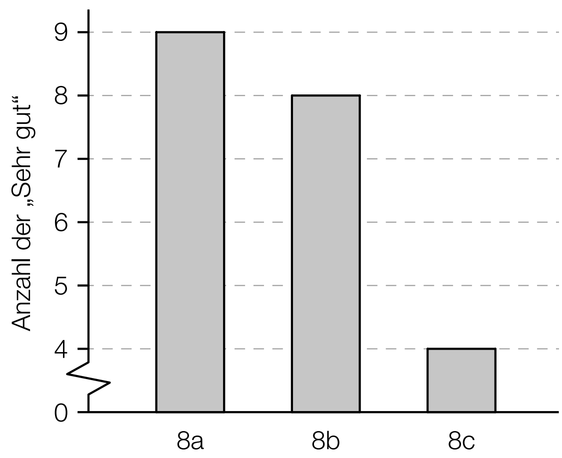
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl an „Sehr gut" richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Lösungsweg:

$0{,}35 \cdot (27 + 24 + 9) = 21$
$21 - 9 - 8 = 4$

Vier Schülerinnen und Schüler der 8c erreichten ein „Sehr gut".



mögliche Gründe:

Da von der Klasse 8c nur 9 Schülerinnen und Schüler teilnahmen, wären die relativen Anteile aussagekräftiger als die absoluten Anteile.

oder:

Die Verkürzung der senkrechten Achse erweckt den Eindruck, dass die 8c im Vergleich zur 8a viel weniger „Sehr gut" erreicht hat.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl an Schülerinnen und Schülern angegeben wird, das Diagramm richtig ergänzt wird und ein richtiger Grund genannt wird.

Aufgabe 4

Integral

Aufgabenstellung:

Betrachtet wird eine lineare (nicht konstante) Funktion *f*, für die $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

– Geben Sie die Nullstelle von *f* an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Leitfrage:

Betrachtet wird eine quadratische Funktion *g* mit $g(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$), für die $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

– Begründen Sie anhand des Verlaufs des Graphen von *g*, warum *a* und *b* verschiedene Vorzeichen haben müssen.

– Geben Sie den Zusammenhang zwischen *a* und *b* mithilfe einer Gleichung an.

Lösung zur Aufgabe 4

Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Nullstelle von *f* ist 1,5.

Der Graph von *f* muss mit der *x*-Achse zwei gleich große Flächenstücke einschließen (eines oberhalb, das andere unterhalb der *x*-Achse). Daher muss die Nullstelle genau in der Mitte des Intervalls [0; 3] liegen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Nullstelle und eine richtige Begründung angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Parabel muss die *x*-Achse (zwischen 0 und 3) schneiden. Entweder ist die Parabel nach oben geöffnet und ihr Scheitel ist unterhalb der *x*-Achse ($a > 0$, $b < 0$) oder sie ist nach unten geöffnet und ihr Scheitel ist oberhalb der *x*-Achse ($a < 0$, $b > 0$).

$$\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^3 (a \cdot x^2 + b)\,\mathrm{d}x = \frac{a \cdot x^3}{3} + b \cdot x \Big|_0^3$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot a + b = 0$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Begründung und eine richtige Gleichung angegeben werden.

Aufgabe 5

Führerscheinprüfung

Der theoretische Teil der Führerscheinprüfung besteht ausschließlich aus Multiple-Choice-Fragen. Bei jeder Frage gibt es vier Antwortmöglichkeiten, wobei mindestens eine Antwortmöglichkeit richtig ist. Eine Frage gilt als bearbeitet, wenn mindestens eine Antwortmöglichkeit angekreuzt ist. Eine Frage gilt als richtig beantwortet, wenn die richtige(n) Antwortmöglichkeit(en) angekreuzt ist (sind).

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, eine derartige Multiple-Choice-Frage zu bearbeiten.

Leitfrage:

Angenommen, Elias muss in jedem Bereich des theoretischen Teils der Führerscheinprüfung raten und wählt jeweils unter allen Möglichkeiten, eine Frage zu bearbeiten, eine Bearbeitungsmöglichkeit zufällig aus. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine bestimmte Bearbeitungsmöglichkeit wählt, für jede Bearbeitungsmöglichkeit gleich groß.

– Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Elias eine Multiple-Choice-Frage richtig beantwortet.

Beim theoretischen Teil werden zunächst 20 Multiple-Choice-Fragen aus dem Bereich *Grundwissen* gestellt.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Elias weniger als 20 % der Multiple-Choice-Fragen aus dem Bereich *Grundwissen* richtig beantwortet und damit den Theoriekurs jedenfalls wiederholen muss.

Lösung zur Aufgabe 5

Führerscheinprüfung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$

Es gibt 15 Möglichkeiten, eine derartige Multiple-Choice-Frage zu bearbeiten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p = \frac{1}{15}$

Die Anzahl X der richtig angekreuzten Multiple-Choice-Fragen ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = \frac{1}{15}$.

$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 0{,}959... \approx 96\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeiten richtig ermittelt werden.