Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

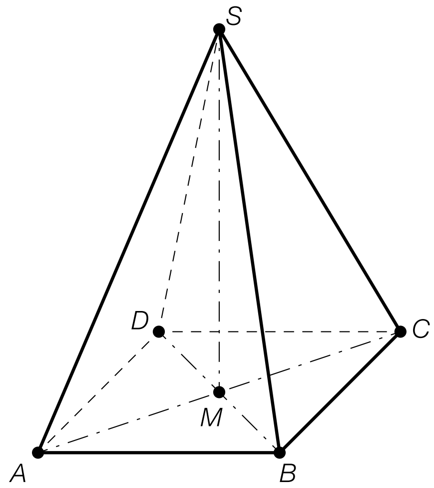
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Pyramide

Das Quadrat *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *M* bildet die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze *S* (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



Es gilt: $A = (0|0|0)$, $C = (8|4|1)$, $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Koordinaten der Spitze *S*.

Leitfrage:

Es gilt: $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ y_1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $y_1 \in \mathbb{Z}$

– Ermitteln Sie y_1.

– Geben Sie eine Gleichung der Geraden *g* durch die Punkte *B* und *D* an.

Lösung zur Aufgabe 1

Pyramide

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$M = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = (4|2|0{,}5)$

$S = M + \overrightarrow{MS} = (7|-10|24{,}5)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten von S richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
$-4 \cdot 8 + 4 \cdot y_1 + 4 = 0$
$y_1 = 7$

$g\colon X = M + t \cdot \overrightarrow{BD}$
$g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Komponente y_1 richtig ermittelt und eine richtige Gleichung der Geraden g angegeben wird, wobei „$t \in \mathbb{R}$“ nicht angegeben sein muss. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Gravitationskraft

Zwei kugelförmige Körper mit den Massen m_1 und m_2, deren Schwerpunkte den Abstand r haben, üben aufeinander eine Kraft F aus (m_1 und m_2 in kg, r in m, F in Newton).

Es gilt: $F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Dabei ist G die Gravitationskonstante.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie jeweils an, um welchen Funktionstyp es sich bei der Funktion $F_1\colon m_1 \mapsto F_1(m_1)$ sowie bei der Funktion $F_2\colon r \mapsto F_2(r)$ handelt, wenn die jeweils anderen Größen als konstant angenommen werden, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Leitfrage:

– Überprüfen Sie, ob die Größen F und r bei konstantem m_1, m_2 indirekt proportional zueinander sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

– Geben Sie an, bei welchem Zusammenhang zwischen den beiden Größen m_1 und m_2 (mit $m_1, m_2 > 0$) die Kraft F bei konstantem r unabhängig von m_1 und m_2 konstant ist.

Lösung zur Aufgabe 2

Gravitationskraft

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wenn m_2 und r als konstant angenommen werden, ist F_1 eine lineare Funktion, da sie sich in der Form $F_1(m_1) = \frac{G \cdot m_2}{r^2} \cdot m_1$ mit $\frac{G \cdot m_2}{r^2} = \text{konst.}$ anschreiben lässt.

Wenn m_1 und m_2 als konstant angenommen werden, ist F_2 eine Potenzfunktion (bzw. gebrochen rationale Funktion), da sie sich in der Form $F_2(r) = (G \cdot m_1 \cdot m_2) \cdot r^{-2}$ mit $G \cdot m_1 \cdot m_2 = \text{konst.}$ anschreiben lässt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Funktionstypen sowie dafür richtige Begründungen angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$F(r) = (G \cdot m_1 \cdot m_2) \cdot r^{-2}$

Die Größen F und r sind nicht indirekt proportional zueinander, da der im Term enthaltene Exponent –2 ist und die Funktion somit nicht der Form $f(x) = k \cdot x^{-1}$ entspricht.

Damit die Kraft F konstant ist, muss gelten: $m_1 = \frac{c}{m_2}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Entscheidung samt richtiger Begründung und ein richtiger Zusammenhang angegeben werden.

Aufgabe 3

Teuerungsrate

Die statistisch gemessene Teuerungsrate stellt einen Maßstab für die allgemeine Preisentwicklung in Österreich dar.
Die Teuerungsrate zwischen Jänner 2017 und Jänner 2018 lag für den Bereich *Wohnen/Energie* bei 2,3 %.

Aufgabenstellung:

Eine Familie gab im Jänner 2018 für den Bereich *Wohnen/Energie* 500 Euro aus.

– Geben Sie unter Verwendung der angeführten Teuerungsrate an, welchem Betrag diese 500 Euro im Jänner 2017 entsprochen hätten.

Leitfrage:

Die Entwicklung der jährlichen Ausgaben x_n einer Familie für den Bereich *Wohnen/Energie* kann (unter Annahme eines konstanten Jahresverbrauchs sowie einer konstanten Teuerungsrate) modellhaft für einen bestimmten Zeitraum durch eine Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ beschrieben werden (n in Jahren, $a, b \in \mathbb{R}$).

– Ermitteln Sie die Werte von a und b, wenn für den Bereich *Wohnen/Energie* eine Teuerungsrate von 2 % angenommen wird.

– Beschreiben Sie, wie sich die jährlichen Ausgaben der Familie für den Bereich *Wohnen/Energie* entwickeln, wenn $a = 1$ und $b = 50$ gilt.

Lösung zur Aufgabe 3

Teuerungsrate

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{500}{1,023} = 488,758... \approx 488,76$
Dieser Betrag hätte im Jänner 2017 ca. 488,76 Euro entsprochen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Betrag für Jänner 2017 angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a = 1,02$ und $b = 0$

Für $a = 1$ und für $b = 50$ sind die jährlichen Ausgaben für den Bereich *Wohnen/Energie* jedes Jahr um den absoluten Betrag von 50 Euro höher.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und b richtig ermittelt werden und die Entwicklung der jährlichen Ausgaben (für $a = 1$ und für $b = 50$) richtig beschrieben wird.

Aufgabe 4

Polynomfunktion

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + a$ mit $a \in \mathbb{R}$, wobei $f(x) > 0$ für alle $x \in [0; 2]$ gilt.

Aufgabenstellung:

Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse soll im Intervall [0; 1] doppelt so groß wie im Intervall [1; 2] sein.

– Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung von a an und ermitteln Sie den Wert von a.

Leitfrage:

– Geben Sie an, wie durch eine Veränderung des Wertes von a der Verlauf des Graphen von f beeinflusst wird.

– Geben Sie an, welche(s) der nachstehenden Änderungsmaße in einem Intervall $[x_1; x_2]$ mit $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ durch eine Veränderung des Wertes von a nicht beeinflusst wird/werden, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- absolute Änderung von f im Intervall $[x_1; x_2]$
- relative Änderung von f im Intervall $[x_1; x_2]$
- mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[x_1; x_2]$

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a = \frac{53}{60}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung und der richtige Wert von a angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Durch eine Veränderung des Wertes von a wird der Graph von f in Richtung der senkrechten Achse verschoben.

Durch eine Veränderung des Wertes von a bleiben die absolute Änderung und die mittlere Änderungsrate unverändert.
Die Berechnung dieser Ausdrücke stützt sich jeweils auf die Differenz der Funktionswerte und der Ausdruck

$$f(x_2) - f(x_1) = x_1^4 - 3 \cdot x_1^3 + 2 \cdot x_1^2 + a - (x_2^4 - 3 \cdot x_2^3 + 2 \cdot x_2^2 + a)$$
$$= x_1^4 - 3 \cdot x_1^3 + 2 \cdot x_1^2 - x_2^4 + 3 \cdot x_2^3 - 2 \cdot x_2^2$$

ist von a unabhängig.

Da die relative Änderung mit $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)}$ berechnet wird, bleibt der Nenner und damit die relative Änderung von a abhängig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Einfluss der Änderung von a auf den Verlauf des Graphen und auf die Änderungsmaße richtig angegeben wird.

Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Eine Prüfung soll in Form eines Multiple-Choice-Tests durchgeführt werden. Zu jeder der 15 voneinander unabhängigen Fragen gibt es 5 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Bei jeder Frage wird eine Antwortmöglichkeit zufällig und unabhängig von den anderen angekreuzt.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit p_1 für das richtige Ankreuzen bei mindestens einer Frage.

Leitfrage:

Die Wahrscheinlichkeit p_1 soll durch eine Verringerung der Fragenanzahl auf n Fragen mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ um mindestens fünf Prozentpunkte verringert werden.

– Geben Sie eine Ungleichung zur Berechnung von n und alle möglichen Werte von n an.

Lösung zur Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p_1 = 1 - 0{,}8^{15} = 0{,}9648... \approx 96{,}5\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$1 - 0{,}8^n \leq 0{,}9148... \quad \Rightarrow \quad n \leq 11{,}037... \quad \Rightarrow \quad n \leq 11$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Ungleichung und alle möglichen Werte von n angegeben werden.