Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 7
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die beiden Geraden g und h:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h\colon X = B + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B = (0|a|b) \quad \text{und} \quad u, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Abhängig von der Wahl von c ergeben sich unterschiedliche Lagebeziehungen von g und h.

– Geben Sie für die möglichen Lagebeziehungen an, welche Werte c jeweils annehmen kann.

Leitfrage:

Die Geraden g und h verlaufen beide durch den Punkt $S = (5|-5|8)$.

– Geben Sie für diesen Fall c in Abhängigkeit von b an.

$c =$ ____

– Geben Sie an, welche Voraussetzung in diesem Fall für b gelten muss, wenn S der einzige gemeinsame Punkt der Geraden g und h sein soll.

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Für $c = -6$ sind die Geraden g und h identisch oder parallel.
Für $c \neq -6$ sind die Geraden schneidend oder windschief.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die möglichen gegenseitigen Lagen von g und h einschließlich der jeweils richtigen Werte für c angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = -2{,}5$$

$$b - 2{,}5 \cdot c = 8 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}4 \cdot b - 3{,}2$$

$$b \neq -7$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn c richtig in Abhängigkeit von b angegeben wird und richtig angegeben wird, dass b in diesem Fall den Wert –7 nicht annehmen darf.

Aufgabe 2

Rechtecke

Gegeben sind Rechtecke, bei denen die längere Seite um 6 cm länger als die kürzere Seite ist.

Aufgabenstellung:

Ein solches Rechteck hat einen Flächeninhalt von 280 cm^2.

– Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Seitenlängen des Rechtecks berechnet werden können, und berechnen Sie diese Seitenlängen.

Leitfrage:

Die beiden Diagonalen eines anderen Rechtecks, bei dem die längere Seite ebenfalls um 6 cm länger als die kürzere Seite ist, schließen einen Winkel von 45° ein.

– Berechnen Sie die Länge der kürzeren Seite dieses Rechtecks.

Lösung zur Aufgabe 2

Rechtecke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Lösungsweg:

$x \cdot (x + 6) = 280$
$x^2 + 6 \cdot x - 280 = 0$
$x_1 = -20,\ \ x_2 = 14$

Die Seiten des Rechtecks sind 14 cm bzw. 20 cm lang.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung angegeben wird und die beiden Seitenlängen richtig berechnet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:

$$\tan\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x+6}{2}}$$

$$\tan(22{,}5°) = \frac{x}{x+6} \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}24... \approx 4{,}2$$

Die Länge der kürzeren Seite dieses Rechtecks beträgt ca. 4,2 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge der kürzeren Seite des Rechtecks richtig berechnet wird.

Aufgabe 3

Tennis

Ein Tennisfeld hat die Form eines Rechtecks, das durch ein Netz in zwei gleich große Spielfelder geteilt wird.

Ein Tennisball wird vom Abschlagpunkt *A*, der horizontal 6 m vom Netz entfernt ist und sich in 0,7 m Höhe befindet, parallel zur seitlichen Begrenzungslinie des Tennisfeldes geschlagen. Er überfliegt das Netz in einer Höhe von 1,15 m über dem Boden und schlägt auf dem Spielfeld des Gegners 11,5 m vom Netz entfernt auf.

Die Situation ist in Abbildung 1 dargestellt.

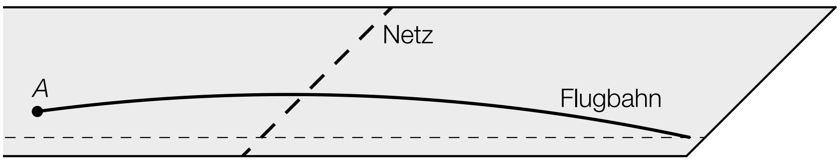

Abbildung 1

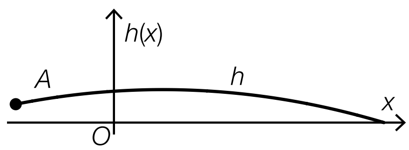

Abbildung 2

Die Flugbahn des Tennisballs wird modellhaft durch die quadratische Funktion *h* beschrieben (siehe Abbildung 2). An der Stelle x gibt $h(x)$ die Höhe des Tennisballs über dem Boden an, wobei $|x|$ die horizontale Entfernung vom Netz ist (x und $h(x)$ in m).

Aufgabenstellung:

– Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von *h*.

Leitfrage:

Dieser Tennisball befindet sich t Sekunden lang in der Luft und kommt in einer horizontalen Entfernung von w Metern vom Abschlagpunkt auf dem Boden auf.
Es gilt: $\cos(\alpha) = \frac{w}{v_0 \cdot t}$
Dabei ist α der Abschlagwinkel, der dem Winkel zwischen der Horizontalen und der Tangente an die Flugbahn im Abschlagpunkt entspricht, und v_0 die Abschlaggeschwindigkeit (v_0 in m/s).

Der Tennisball mit der oben angegebenen Flugbahn *h* befindet sich 0,8 s lang in der Luft.

– Berechnen Sie die entsprechende Abschlaggeschwindigkeit v_0.

Lösung zur Aufgabe 3

Tennis

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$\left.\begin{array}{l} h(-6) = 0{,}7 \\ h(0) = 1{,}15 \\ h(11{,}5) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}015 \cdot x + 1{,}15$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Funktionsgleichung von h richtig bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = h'(-6) = 0{,}135$
$\alpha = 7{,}68...°$

$$v_0 = \frac{w}{t \cdot \cos(\alpha)}$$
$$v_0 = \frac{17{,}5}{0{,}8 \cdot \cos(7{,}68...)} = 22{,}0...$$

Die Abschlaggeschwindigkeit beträgt ca. 22 m/s.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Abschlaggeschwindigkeit richtig berechnet wird.

Aufgabe 4

Zweite Ableitung

Die zweite Ableitung einer Funktion f ist durch $f''(x) = 9 \cdot x - 1$ gegeben.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie die Wendestelle von f an und erläutern Sie mithilfe von f'' das Krümmungsverhalten des Graphen von f.

Leitfrage:

Für die Funktion f gilt:

- f hat an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle.
- $f(-1) = 2$

– Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an.

Lösung zur Aufgabe 4

Zweite Ableitung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wendestelle: $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{9} \quad \left(f'''\left(\frac{1}{9}\right) \neq 0\right)$

Im Intervall $\left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$ ist f rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt), da $f''(x) < 0$ für alle $x \in \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$.

Im Intervall $\left(\frac{1}{9}; \infty\right)$ ist f linksgekrümmt (positiv gekrümmt), da $f''(x) > 0$ für alle $x \in \left(\frac{1}{9}; \infty\right)$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wendestelle angegeben und das Krümmungsverhalten richtig erläutert wird, wobei auch halboffene Intervalle angegeben werden können.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Lösungsweg:

$f'(x) = \int f''(x)\,\mathrm{d}x = 4{,}5 \cdot x^2 - x + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}5 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{mit} \quad c, d \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c + d = -1 \\ f(-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad -c + d = 4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c = -2{,}5 \text{ und } d = 1{,}5$$

$f(x) = 1{,}5 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 - 2{,}5 \cdot x + 1{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung der Funktion *f* angegeben wird.

Aufgabe 5

Glücksrad

Ein Glücksrad ist in die drei unterschiedlich großen Sektoren S_1, S_2 und S_3 unterteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf den Sektor S_1 zeigt, beträgt bei jeder Drehung unabhängig von allen anderen Drehungen p_1. Für den Sektor S_2 beträgt diese Wahrscheinlichkeit 0,5 und für den Sektor S_3 beträgt diese Wahrscheinlichkeit p_3.

Aufgabenstellung:

– Interpretieren Sie den Term $(1 - p_1)^5$ im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Drehungen, nach denen der Zeiger des Glücksrads auf den Sektor S_1 zeigt.
Es gilt: $P(X \geq 1) = 0{,}8$

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_3.

Lösung zur Aufgabe 5

Glücksrad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Interpretation:

Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads bei fünfmaligem Drehen nach einer Drehung niemals auf den Sektor S_1 zeigt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der gegebene Term richtig interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p_1)^{10}$
$1 - (1 - p_1)^{10} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad (1 - p_1)^{10} = 0{,}2$
$p_1 = 0{,}1486... \approx 14{,}9\ \%$
$p_3 = 1 - 0{,}5 - 0{,}1486... = 0{,}3513...$
$p_3 \approx 35{,}1\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_3 richtig ermittelt werden.