Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Bei einem rechtwinkeligen Dreieck verhalten sich die Längen der beiden Katheten wie 2 : 3.
Der Winkel α wird von der längeren Kathete und der Hypotenuse eingeschlossen.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie α.

Leitfrage:

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von 2352 cm^2.

– Ermitteln Sie die Längen der beiden Katheten und die Länge der Hypotenuse.

Lösung zur Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 33{,}690\ldots \approx 33{,}69°$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von α richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für die Längen der beiden Katheten a und b gilt:
$a = 2 \cdot t$ und $b = 3 \cdot t$ mit $t \in \mathbb{R}^+$

$A = \frac{2 \cdot t \cdot 3 \cdot t}{2} = 3 \cdot t^2 = 2\,352 \quad \Rightarrow \quad t = 28$

Länge der längeren Kathete: 84 cm
Länge der kürzeren Kathete: 56 cm

$\sqrt{56^2 + 84^2} = 100{,}9\ldots \approx 101$
Länge der Hypotenuse: ca. 101 cm

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Längen der beiden Katheten und die Länge der Hypotenuse richtig ermittelt werden.

Aufgabe 2

Betrieb

Die Kosten zur Herstellung von x Mengeneinheiten (ME) eines bestimmten Produkts können durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}00004 \cdot x^3 - 0{,}048 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 1\,600$ beschrieben werden ($x \geq 0$).
Die lineare Funktion E beschreibt denjenigen Erlös $E(x)$, der beim Verkauf von x ME dieses Produkts erzielt wird.
Die Kosten und der Erlös werden in Euro angegeben.

Der Break-even-Point wird bei 200 ME erreicht.

Aufgabenstellung:

– Bestimmen Sie den Verkaufspreis pro ME für dieses Produkt.

Leitfrage:

– Geben Sie diejenige Menge x_1 an, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Bei der Menge x_2 sind die Grenzkosten minimal.

– Geben Sie an, um wie viel Euro der bei dieser Menge x_2 erzielte Gewinn geringer ist als der maximale Gewinn.

Lösung zur Aufgabe 2

Betrieb

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$E(200) = K(200) = 6\,400$

$\frac{6\,400}{200} = 32$

Der Verkaufspreis pro ME beträgt € 32.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Verkaufspreis pro ME richtig bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Erlös: $E(x) = 32 \cdot x$
Gewinn: $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}00004 \cdot x^3 + 0{,}048 \cdot x^2 - 1\,600$
$G'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 800$ ME
Bei 800 ME wird der maximale Gewinn erzielt.

minimale Grenzkosten: $K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 400$ ME
$G(800) - G(400) =$ € 5.120
Der Gewinn ist um € 5.120 geringer.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Menge x_1 und die richtige Differenz der Gewinne angegeben werden.

Aufgabe 3

Schwingungen

Die Funktion s mit $s(t) = r \cdot \sin(50 \cdot \pi \cdot t)$ beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Amplitude r. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Die Frequenz gibt die Anzahl der Schwingungen (Perioden) pro Sekunde an.

– Bestimmen Sie die Frequenz f der oben beschriebenen Schwingung (f in Hertz).

Leitfrage:

Bei einer gedämpften Schwingung nimmt die Amplitude exponentiell ab.

Nach 9,6 Sekunden hat die Amplitude einer gedämpften Schwingung mit der oben berechneten Frequenz f nur noch 30 % ihres Anfangswerts.

– Geben Sie an, bei der wievielten Periode dies der Fall ist.

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Amplitude pro Periode abnimmt.

Lösung zur Aufgabe 3

Schwingungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f = 25$ Hz

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Frequenz richtig bestimmt wird, wobei die Einheit „Hz“ nicht angegeben werden muss.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$9{,}6 \cdot 25 = 240$, d. h. bei der 240. Periode

$0{,}3 \cdot r = r \cdot q^{240} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[240]{0{,}3} \quad \Rightarrow \quad q = 0{,}9949... \approx 0{,}995$
Die Amplitude nimmt pro Periode um ca. 0,5 % ab.

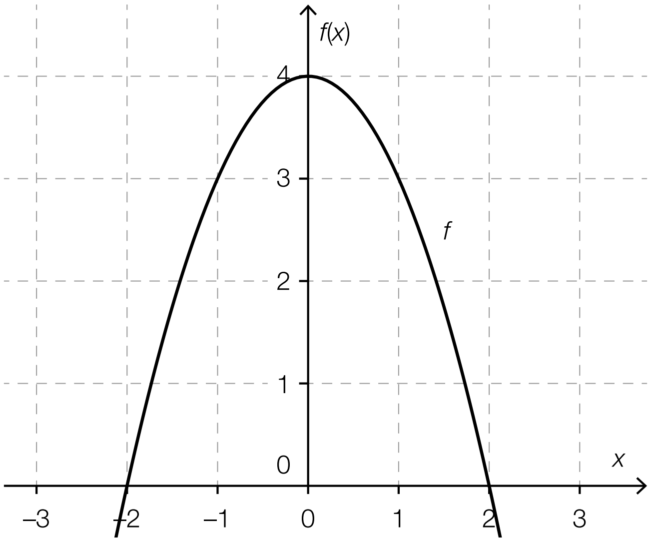
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Periode angegeben wird und die prozentuelle Änderung richtig ermittelt wird.

Aufgabe 4

Polynomfunktion vom Grad 2

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = -x^2 + 4$. Der Graph von f ist im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt.



Aufgabenstellung:

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

– Berechnen Sie $F(2) - F(-2)$.

Leitfrage:

Eine Gerade g verläuft parallel zur x-Achse und schneidet den Graphen von f in den zwei Punkten $P_1 = (a \mid -a^2 + 4)$ und P_2, wobei gilt: $0 < a < 2$.

Der Graph von f und der Graph von g begrenzen ein Flächenstück.

– Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Inhalt dieses Flächenstücks den Wert $\frac{F(2) - F(-2)}{8}$ hat.

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion vom Grad 2

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$F(2) - F(-2) = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3} = 10{,}\dot{6}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Terms richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$g(x) = -a^2 + 4$

$\frac{F(2) - F(-2)}{8} = \frac{4}{3}$

$\int_{0}^{a} (-x^2 + 4 - (-a^2 + 4))\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von a richtig berechnet wird.

Aufgabe 5

Produktionsfehler

Eine Maschine produziert Holzfiguren. Erfahrungsgemäß liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine produzierte Holzfigur unbrauchbar ist, unabhängig von den anderen Holzfiguren für jede Holzfigur bei 5 %.

Aufgabenstellung:

Es werden 180 Holzfiguren mit dieser Maschine produziert. Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der unbrauchbaren Holzfiguren.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X kleiner als der Erwartungswert $E(X)$ ist.

Leitfrage:

Mit dieser Maschine werden n Holzfiguren produziert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Holzfiguren brauchbar sind, soll höher als 3 % sein.

– Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert von n, für den diese Bedingung erfüllt ist.

Lösung zur Aufgabe 5

Produktionsfehler

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$n = 180$; $p = 0{,}05$

$E(X) = 9$

$P(X < 9) = 0{,}45226... \approx 45{,}23\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p(„\text{brauchbar}“) = 0{,}95$

$0{,}95^n > 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad n < 68{,}36...$

Der größtmögliche Wert von n, für den diese Bedingung erfüllt ist, ist 68.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der größtmögliche Wert von n richtig ermittelt wird.