Name:	
Klasse/Jahrgang:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

14. Jänner 2020

Angewandte Mathematik

HAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Liebe Kandidatin! Lieber Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft enthält Teil-A-Aufgaben und Teil-B-Aufgaben mit jeweils unterschiedlich vielen Teilaufgaben. Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen insgesamt *270 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft und das Ihnen zur Verfügung gestellte Arbeitspapier. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihren Jahrgang bzw. Ihre Klasse in die dafür vorgesehenen Felder auf dem Deckblatt des Aufgabenhefts sowie Ihren Namen und die fortlaufende Seitenzahl auf jedes verwendete Blatt Arbeitspapier. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung (z. B.: 3d1) auf dem Arbeitspapier an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Streichen Sie Notizen durch.

Die Verwendung von approbierten Formelheften bzw. von der Formelsammlung für die SRDP in Angewandter Mathematik und von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Eine Erläuterung der Antwortformate liegt im Prüfungsraum zur Durchsicht auf.

Handreichung für die Bearbeitung

- Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz und einer nachvollziehbaren Dokumentation des Technologieeinsatzes (die verwendeten Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben werden) durchzuführen.
- Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.
- Ergebnisse sind eindeutig hervorzuheben.
- Ergebnisse sind mit entsprechenden Einheiten anzugeben, wenn dies in der Handlungsanweisung explizit gefordert wird.
- Werden Diagramme oder Skizzen als Lösungen erstellt, so sind die Achsen zu skalieren und zu beschriften.
- Werden geometrische Skizzen erstellt, so sind die lösungsrelevanten Teile zu beschriften.
- Vermeiden Sie frühzeitiges Runden.
- Legen Sie allfällige Computerausdrucke der Lösung mit Ihrem Namen beschriftet bei.
- Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Es gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

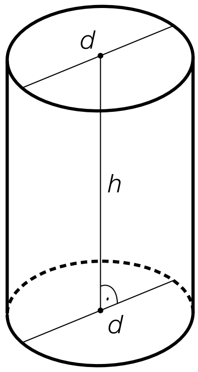
44–48 Punkte	Sehr gut
38–43 Punkte	Gut
31–37 Punkte	Befriedigend
23–30 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

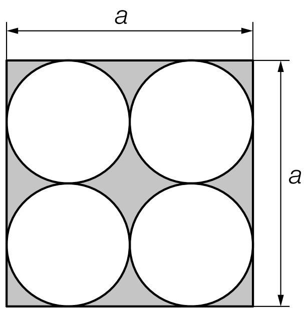
Flüssigkeitsbehälter

a) Das nachstehend abgebildete zylindrische Gefäß mit der Höhe h = 16 dm fasst bei Befüllung bis 10 cm unter den oberen Rand 1 200 L.



1) Berechnen Sie den Durchmesser d des Gefäßes. *[1 Punkt]*

b) Ein Raum hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a. Es werden darin 4 zylindrische Gefäße mit gleichem Außendurchmesser gelagert (siehe nachstehende Abbildung, Ansicht von oben).



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche aus der Seitenlänge a.

A = ____ *[1 Punkt]*

c) Ein Flüssigkeitsbehälter wird befüllt. Dabei kann die Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter in Abhängigkeit von der Füllzeit näherungsweise durch die Funktion F beschrieben werden.

$F(t) = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... Füllzeit in min
$F(t)$ ... Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter zur Füllzeit t in L

Die Gleichung $900 = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$ wird nach t gelöst.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Aufgabe 2

Lieblingsfarbe

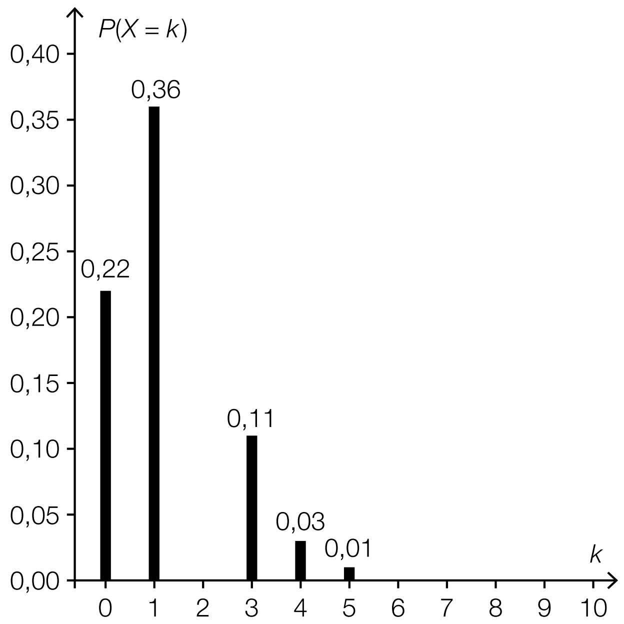
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen. *[1 Punkt]*

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter *n* befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl *n* derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen. *[1 Punkt]*

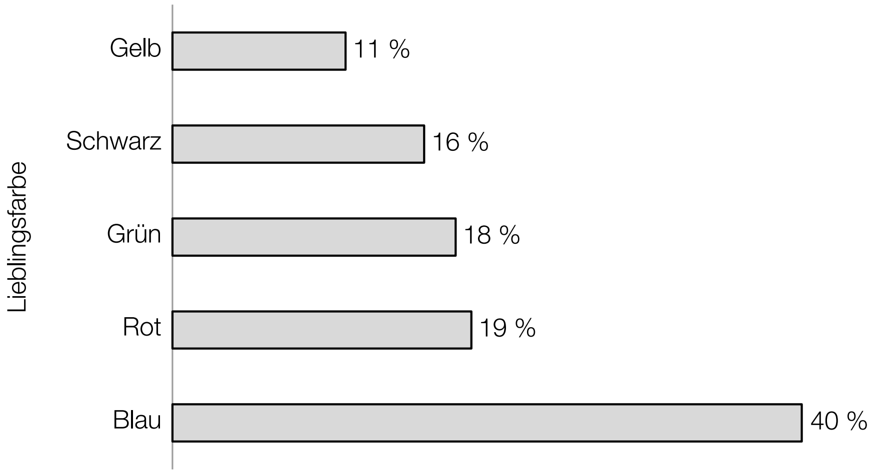
c) Die binomialverteilte Zufallsvariable *X* beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein. *[1 Punkt]*

d) Die Schüler/innen einer Schule wurden nach ihren Lieblingsfarben gefragt. In der nachstehenden Abbildung ist dargestellt, wie viel Prozent der Befragten die jeweilige Farbe als Lieblingsfarbe genannt haben.



1) Beschreiben Sie, woran man erkennen kann, dass man auch mehr als eine Lieblingsfarbe nennen durfte. *[1 Punkt]*

Aufgabe 3

Wandern

a) Um die Gehzeit für eine Wanderung zu ermitteln, kann die folgende Faustregel angewendet werden:
„Die Höhendifferenz in Metern dividiert man durch 400, die Horizontalentfernung in Kilometern dividiert man durch 4.
Addiert man diese beiden Ergebnisse, so erhält man die Gehzeit in Stunden.“

1) Übertragen Sie diese Faustregel in eine Formel für die Gehzeit t. Verwenden Sie dabei die folgenden Bezeichnungen:

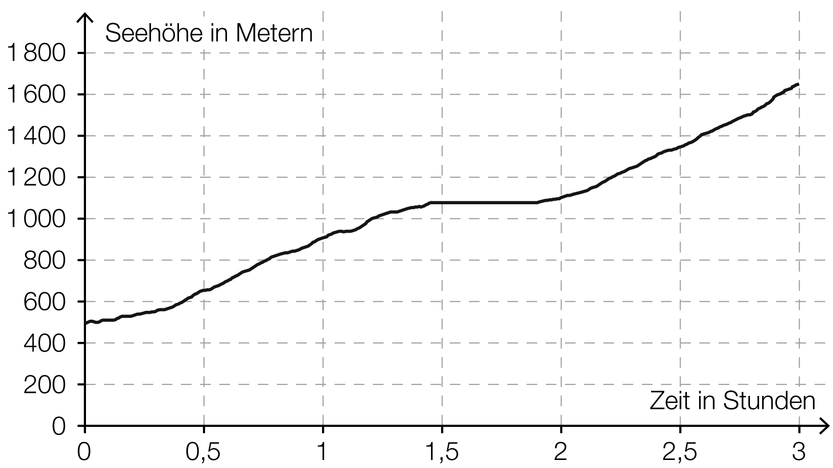
h ... Höhendifferenz in m
x ... Horizontalentfernung in km
t ... Gehzeit in h

t = ____ *[1 Punkt]*

Jemand legt bei einer Wanderung eine Horizontalentfernung von 6,7 km zurück und benötigt dafür eine Gehzeit von 3 h 15 min.

2) Berechnen Sie die dabei überwundene Höhendifferenz mithilfe der angegebenen Faustregel. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Höhenverlauf während einer 3-stündigen Wanderung dargestellt.

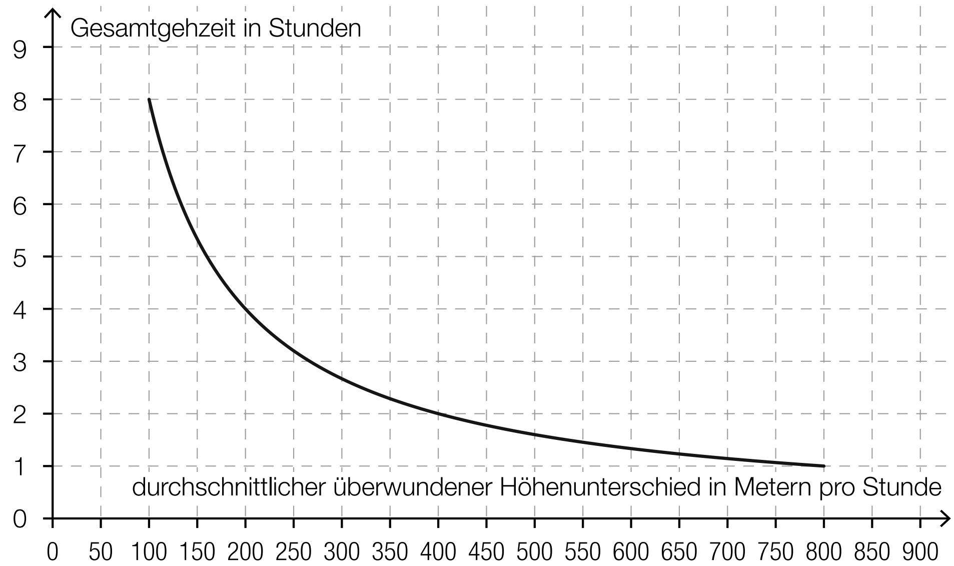


1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Seehöhe in Abhängigkeit von der Zeit für die gesamte Wanderung. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an. *[1 Punkt]*

Jemand behauptet: „Nach etwa 1,5 Stunden wurde eine Pause eingelegt. Das erkennt man daran, dass der Graph während der Pause waagrecht verläuft.“

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss. *[1 Punkt]*

c) Bei der Besteigung eines bestimmten Berges ist die Gesamtgehzeit indirekt proportional zu dem durchschnittlichen überwundenen Höhenunterschied in Metern pro Stunde (siehe nachstehende Abbildung).

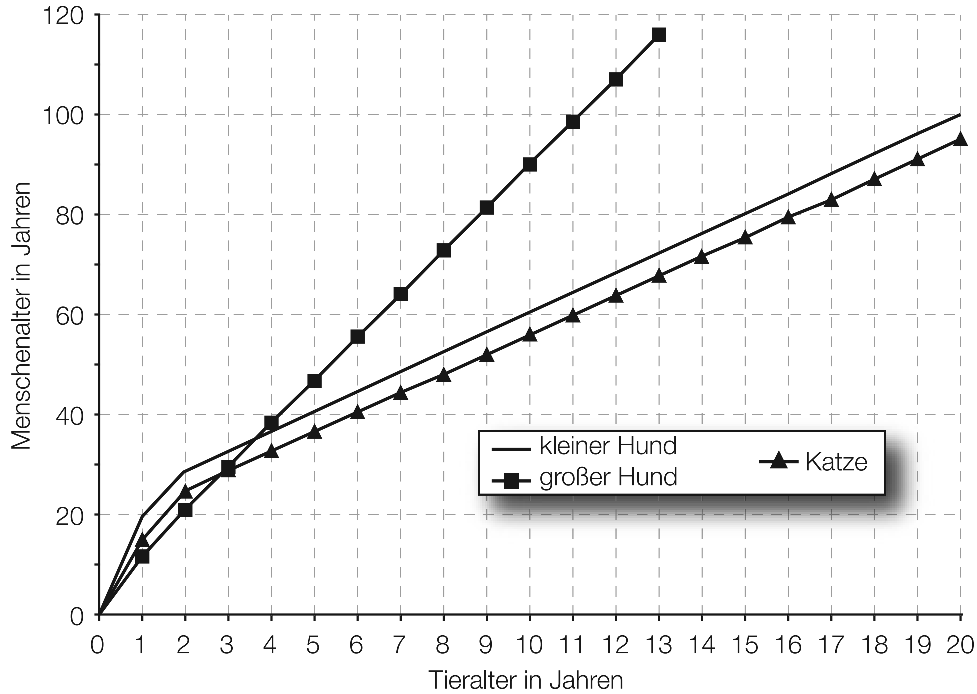


1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, welcher Höhenunterschied bei dieser Besteigung insgesamt überwunden werden muss. *[1 Punkt]*

Aufgabe 4

Entwicklung von Katzen und Hunden

a) Viele Tiere altern schneller als Menschen. Ein 9 Jahre alter großer Hund ist beispielsweise etwa so „alt“ wie ein 80-jähriger Mensch. Für einige Haustiere ist der Zusammenhang zwischen Tieralter und Menschenalter in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für eine Katze kann der Zusammenhang zwischen dem Tieralter in Jahren und dem Menschenalter in Jahren in einem bestimmten Bereich durch eine lineare Funktion K beschrieben werden:

$K(t) = k \cdot t + d$

t ... Tieralter in Jahren mit $t \geq 2$
$K(t)$ ... das dem Tieralter t der Katze entsprechende Menschenalter in Jahren

1) Erstellen Sie unter Zuhilfenahme von 2 Punkten aus der obigen Grafik eine Gleichung der linearen Funktion K für $t \geq 2$. *[1 Punkt]*

Für einen kleinen Hund kann dieser Zusammenhang durch eine lineare Funktion H modelliert werden:

$H(t) = k_1 \cdot t + d_1$

t ... Tieralter in Jahren mit $t \geq 2$
$H(t)$ ... das dem Tieralter t des kleinen Hundes entsprechende Menschenalter in Jahren

2) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen den Parametern k und k_1 besteht. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der obigen Abbildung. *[1 Punkt]*

b) Bei einer Studie wurde die Körpermasse von ausgewachsenen Katzen einer bestimmten Rasse als annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 3{,}6$ kg und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}7$ kg angenommen.
Die schwersten 10 % der ausgewachsenen Katzen wurden in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet.

1) Bestimmen Sie diejenige Körpermasse, ab der eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet wurde. *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

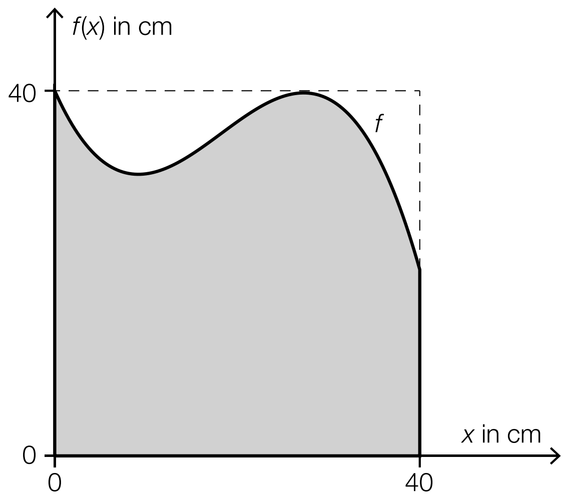
Baumhaus

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

 1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist. *[1 Punkt]*

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



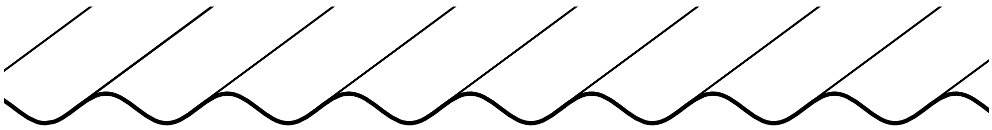
Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

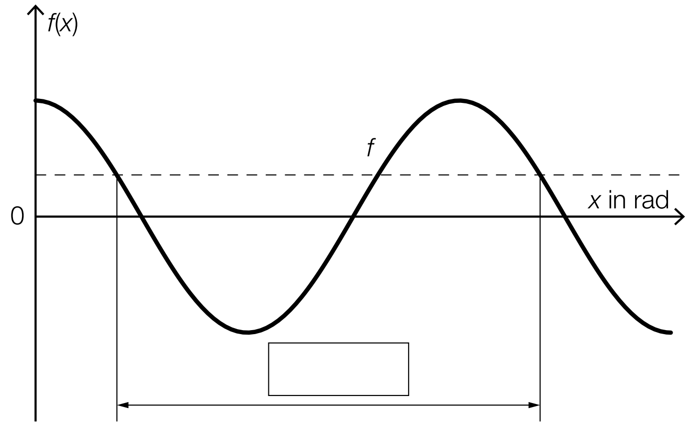
x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist. *[2 Punkte]*

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

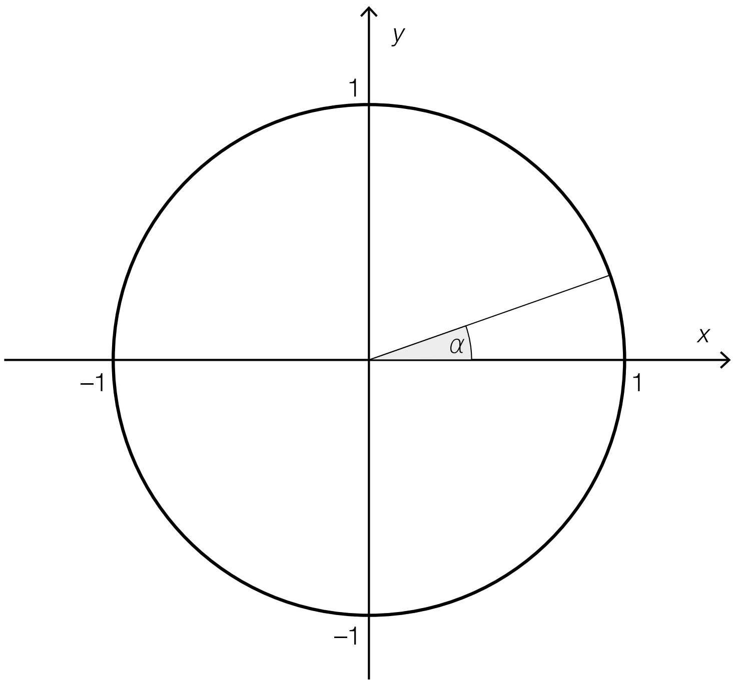


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[1 Punkt]*

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6

Kontrolle der Geschwindigkeit

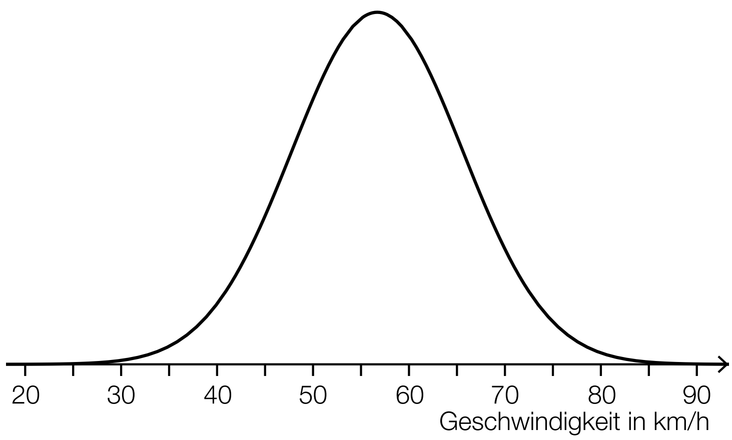
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem bestimmten Abschnitt der Westautobahn ein Fahrzeug mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs ist, beträgt 4 %.
Eine Zufallsstichprobe von 1 500 Fahrzeugen wird überprüft.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Fahrzeuge an, die dort mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass genau a Fahrzeuge dieser Zufallsstichprobe mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

$P(X = a) =$ ____ *[1 Punkt]*

b) Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge an einer bestimmten Stelle, an der die erlaubte Höchstgeschwindigkeit 50 km/h beträgt, annähernd normalverteilt sind.

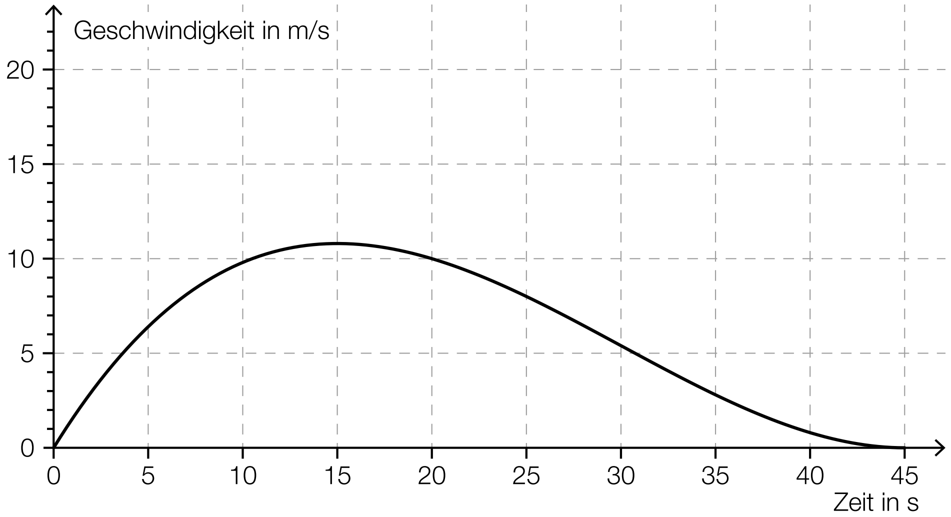
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit mehr als 15 km/h über der erlaubten Höchstgeschwindigkeit von 50 km/h liegt.

[1 Punkt]

c) Der nachstehend dargestellte Graph zeigt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf eines im Stadtgebiet fahrenden Autos.



1) Ermitteln Sie näherungsweise die Länge des im Zeitintervall [0; 45] zurückgelegten Weges.

[1 Punkt]

2) Lesen Sie die Höchstgeschwindigkeit des Autos ab. Geben Sie das Ergebnis in km/h an.

[1 Punkt]

Aufgabe 7 (Teil B)

Käseproduktion

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$

x … Produktionsmenge in kg
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

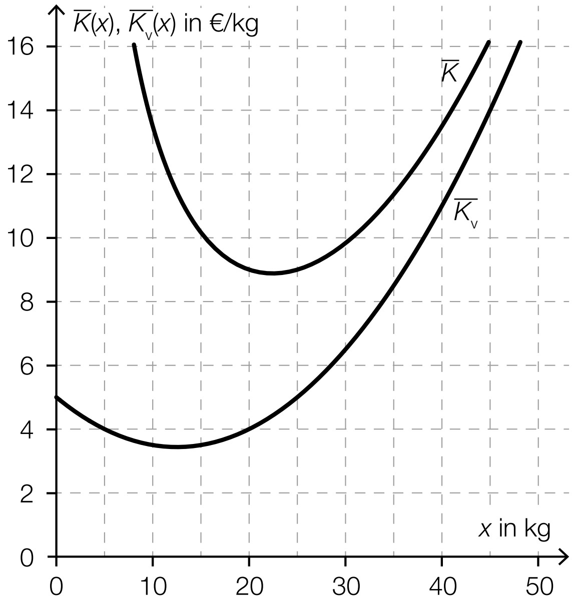
1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Kostenkehre. *[1 Punkt]*

3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$ *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Stückkostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an. *[1 Punkt]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an. *[1 Punkt]*

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in kg
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.
Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.
Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können. *[2 Punkte]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

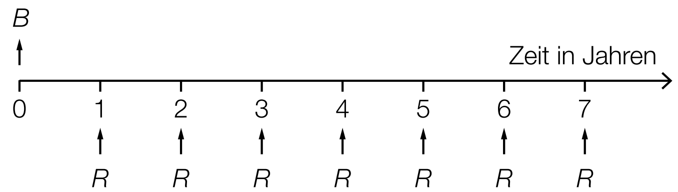
Kredit und Sparbuch

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

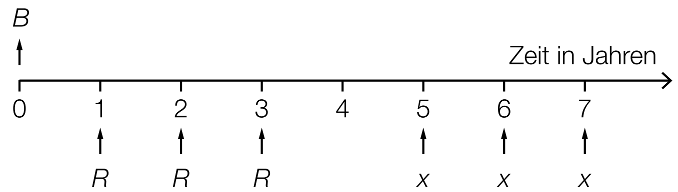
a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe B und die Ratenhöhe R jeweils gleich hoch.

Kredit 1:



Kredit 2:



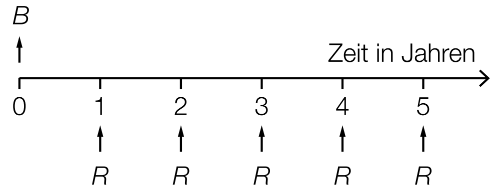
1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe x höher sein muss als die Ratenhöhe R. *[1 Punkt]*

Die Kredithöhe B beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p.a.

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt t = 4 Jahre. *[1 Punkt]*

b) Ein Kredit in der Höhe B wird mit einem Jahreszinssatz i verzinst.
Die Höhe der jährlichen Rate beträgt R.



Nachdem die erste Rate R zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld B_1.

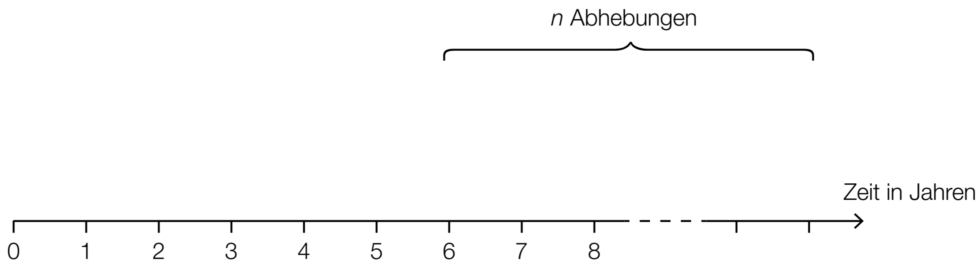
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von B_1 aus B, R und i.

$B_1 =$ ____ *[1 Punkt]*

c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.
Insgesamt finden n Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag x mit $€\ 0 < x < €\ 150$ zusammen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$K = 300 \cdot 1{,}015^6 + 300 \cdot 1{,}015^5 + 300 \cdot 1{,}015^4 + 300 \cdot 1{,}015^3 \approx 1\,283{,}33$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von K im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie die Anzahl n der Abhebungen. *[1 Punkt]*

Aufgabe 9 (Teil B)

Kfz-Bestand

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist. *[1 Punkt]*

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$$

$$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Jemand berechnet weiters:

$$2 = 1{,}0169...^t$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_B(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können. *[1 Punkt]*
2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ. *[1 Punkt]*
3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020. *[1 Punkt]*

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert. *[1 Punkt]*