Name:	
Klasse/Jahrgang:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

8. Mai 2019

Angewandte Mathematik

HAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Liebe Kandidatin! Lieber Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft enthält Teil-A-Aufgaben und Teil-B-Aufgaben mit jeweils unterschiedlich vielen Teilaufgaben. Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen insgesamt *270 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft und das Ihnen zur Verfügung gestellte Arbeitspapier. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihren Jahrgang bzw. Ihre Klasse in die dafür vorgesehenen Felder auf dem Deckblatt des Aufgabenhefts sowie Ihren Namen und die fortlaufende Seitenzahl auf jedes verwendete Blatt Arbeitspapier. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung (z. B.: 3d1) auf dem Arbeitspapier an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Streichen Sie Notizen durch.

Die Verwendung von approbierten Formelheften bzw. von der Formelsammlung für die SRDP in Angewandter Mathematik und von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Eine Erläuterung der Antwortformate liegt im Prüfungsraum zur Durchsicht auf.

Handreichung für die Bearbeitung

- Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz und einer nachvollziehbaren Dokumentation des Technologieeinsatzes (die verwendeten Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben werden) durchzuführen.
- Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.
- Ergebnisse sind eindeutig hervorzuheben.
- Ergebnisse sind mit entsprechenden Einheiten anzugeben, wenn dies in der Handlungsanweisung explizit gefordert wird.
- Werden Diagramme oder Skizzen als Lösungen erstellt, so sind die Achsen zu skalieren und zu beschriften.
- Werden geometrische Skizzen erstellt, so sind die lösungsrelevanten Teile zu beschriften.
- Vermeiden Sie frühzeitiges Runden.
- Legen Sie allfällige Computerausdrucke der Lösung mit Ihrem Namen beschriftet bei.
- Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Es gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

44–48 Punkte	Sehr gut
38–43 Punkte	Gut
31–37 Punkte	Befriedigend
23–30 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Die Adria-Wien-Pipeline

Österreich muss einen Großteil seines Erdölbedarfs durch Importe von Rohöl decken. Diese Importe werden vorwiegend über die Adria-Wien-Pipeline durchgeführt, die von Triest nach Wien-Schwechat führt.

a) Die folgende Tabelle gibt die nach Österreich importierten Rohölmengen in den Jahren 2006 bis 2014 an:

Jahr	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
importierte Rohölmenge in Millionen Tonnen	7,7	7,6	7,9	7,4	6,8	7,3	7,4	7,8	7,5

Quelle: https://www.wko.at/branchen/industrie/mineraloelindustrie/jahresberichte.html [22.11.2018].

1) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der importierten Rohölmengen für diesen Zeitraum in Millionen Tonnen. *[1 Punkt]*

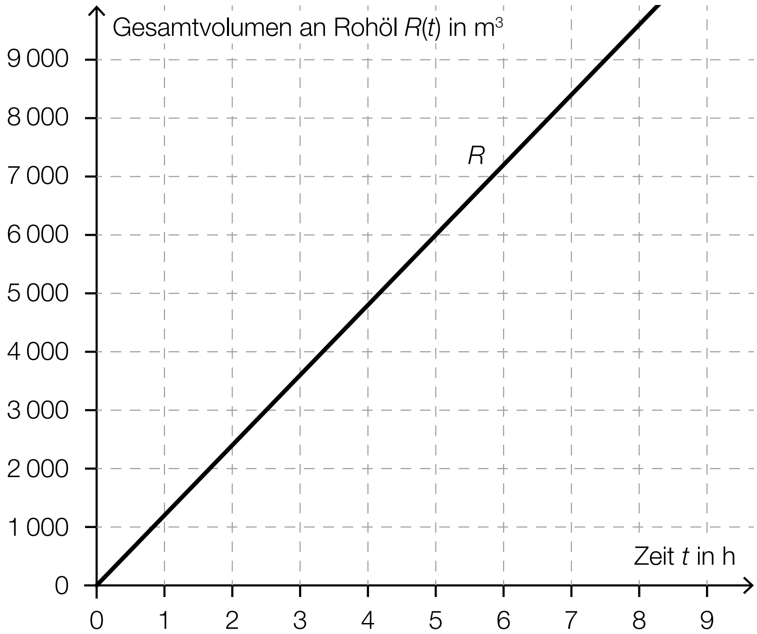
b) Modellhaft betrachtet ist die Pipeline ein Drehzylinder mit dem Durchmesser d und der Höhe l.

Der Innendurchmesser der Pipeline beträgt $d = 457{,}2$ mm. Die Länge der Pipeline beträgt rund $l = 416$ km.

In der Erdölindustrie wird für das Volumen von Rohöl häufig die Einheit *Barrel* verwendet.
Es gilt: 1 Barrel $\approx 0{,}159$ m^3

1) Berechnen Sie, wie viele Barrel Rohöl die vollständig befüllte Pipeline fasst. *[2 Punkte]*

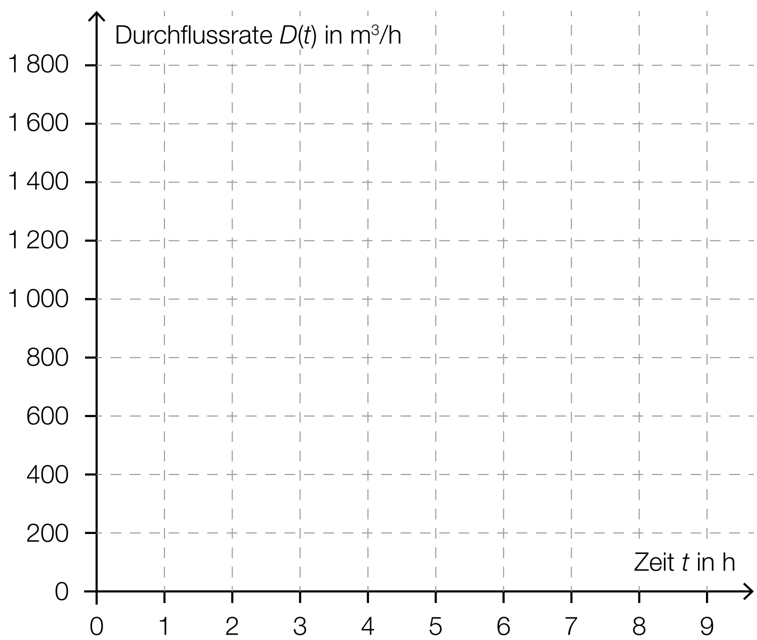
c) Das Gesamtvolumen an Rohöl, das im Zeitintervall $[0; t]$ einen Kontrollpunkt in der Pipeline passiert, kann näherungsweise durch die Funktion R in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden. Der Graph der Funktion R ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen eine Gleichung der Funktion R.
[1 Punkt]

Die Durchflussrate $D(t)$ zum Zeitpunkt t ist die momentane Änderungsrate der Funktion R.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Durchflussrate ein.
[1 Punkt]



Aufgabe 2

Vitamin C

a) Der Vitamin-C-Gehalt eines Apfels nimmt nach der Ernte exponentiell ab. Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % bezogen auf den Wert zu Beginn dieser 4 Wochen ab. Ein bestimmter Apfel hat bei der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von 18 mg.

Der Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels in Milligramm soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Ernte. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie den Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels 36 Wochen nach der Ernte. *[1 Punkt]*

b) Der Vitamin-C-Gehalt von Tabletten der Sorte *Zitruspower* ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mg und der Standardabweichung $\sigma = 5$ mg.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Vitamin-C-Gehalt einer zufällig ausgewählten Tablette zwischen 92 mg und 110 mg liegt. *[1 Punkt]*

c) Nach der Einnahme einer Vitamin-C-Tablette steigt die Vitamin-C-Konzentration im Blut zunächst an und sinkt danach wieder ab.

Die Funktion c beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf der Vitamin-C-Konzentration im Blut einer bestimmten Person.

$c(t) = 24 \cdot (e^{-0{,}0195 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t}) + 3$

t ... Zeit seit der Einnahme der Vitamin-C-Tablette in h
$c(t)$ ... Vitamin-C-Konzentration im Blut zur Zeit t in Mikrogramm pro Milliliter (µg/ml)

1) Zeigen Sie, dass die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut der Person gerundet 25,18 µg/ml beträgt. *[1 Punkt]*

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die maximale Vitamin-C-Konzentration in mg/L angibt. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

0,02518 mg/L	☐
25,18 mg/L	☐
25 180 mg/L	☐
0,00002518 mg/L	☐
25 180 000 mg/L	☐

Aufgabe 3

Glücksspiel

Bei einem Glücksspiel werden aus verschiedenen Gefäßen Kugeln zufällig gezogen.

a) Im ersten Gefäß befinden sich insgesamt *a* Kugeln. 7 dieser Kugeln sind rot, die anderen Kugeln sind weiß.

Es wird 1 Kugel aus diesem Gefäß gezogen.

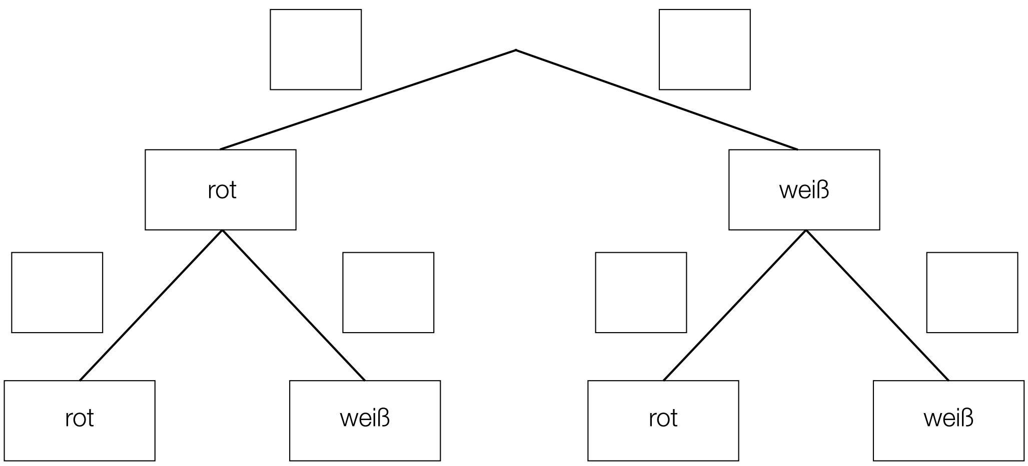
1) Erstellen Sie mithilfe von *a* einen Ausdruck zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit:

P(„die gezogene Kugel ist weiß“) = ______________________________

[1 Punkt]

Aus diesem Gefäß mit *a* Kugeln zieht Elena 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Dann zieht sie wieder 1 Kugel.

2) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*



Die Wahrscheinlichkeit, dass Elena 2-mal eine rote Kugel zieht, beträgt 12,25 %.

3) Berechnen Sie die Anzahl *a*. *[1 Punkt]*

b) Im zweiten Gefäß befinden sich 6 schwarze und 2 blaue Kugeln.

Aus diesem Gefäß zieht Susi 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht sie insgesamt 5-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Susi dabei genau 3-mal eine schwarze Kugel zieht. *[1 Punkt]*

c) Im dritten Gefäß befinden sich 12 Kugeln. 7 dieser Kugeln sind grün, die anderen Kugeln sind gelb.

Aus diesem Gefäß zieht Moritz 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht er insgesamt 3-mal.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass ___①___, ist durch den Ausdruck ___②___ gegeben. *[1 Punkt]*

①	
alle 3 Kugeln grün sind	☐
mindestens 1 Kugel grün ist	☐
höchstens 1 Kugel grün ist	☐

②	
$1 - \left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐
$1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3$	☐
$\left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐

Aufgabe 4

Bahnverkehr in Österreich

a) Eine Bahnfahrt von Wien nach Graz dauert 2 Stunden und 35 Minuten. Die mittlere Reisegeschwindigkeit beträgt dabei rund 81,83 km/h. Im Jahr 2026 soll der Semmering-Basistunnel fertiggestellt werden. Dadurch wird sich die Fahrtstrecke um 13,7 Kilometer und die Fahrtdauer um 50 Minuten verkürzen.

1) Berechnen Sie die mittlere Reisegeschwindigkeit zwischen Wien und Graz für die verkürzte Fahrt. *[2 Punkte]*

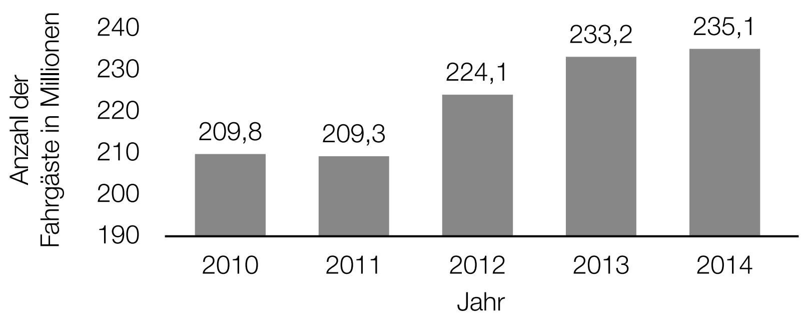
b) Die Fahrtstrecke im Semmering-Basistunnel wird 27,3 Kilometer lang sein und eine (als konstant angenommene) Steigung von 0,84 % haben.
In der folgenden Berechnung des Höhenunterschieds Δh in Metern auf dieser Fahrtstrecke ist genau ein Fehler passiert:

Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(0{,}0084) = 0{,}48127\ldots°$

$$\Delta h = \frac{27\,300 \text{ m}}{\sin(\alpha)} = 3\,250\,114{,}6\ldots \text{ m}$$

1) Stellen Sie die Berechnung und das Ergebnis richtig. *[1 Punkt]*

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Fahrgastzahlen der Österreichischen Bundesbahnen für die Jahre 2010 bis 2014 dargestellt.



Datenquelle: Agentur für Passagier- und Fahrgastrechte (Hrsg.): *Fahrgastrechte-Statistik Bahn 2014*, 2016, S. 4.
https://www.apf.gv.at/files/1-apf-Homepage/1g-Publikationen/Fahrgastrechtestatistik-2014.pdf [22.11.2018].

1) Berechnen Sie die Spannweite der angegebenen Fahrgastzahlen in Millionen. *[1 Punkt]*

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{235{,}1 - 209{,}8}{209{,}8} \approx 0{,}12$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

Sonnenaufgang

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

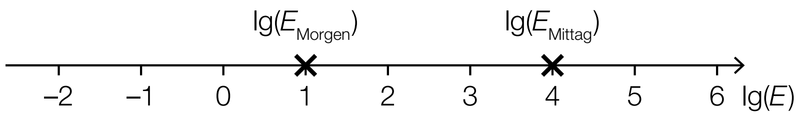
t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a. *[1 Punkt]*

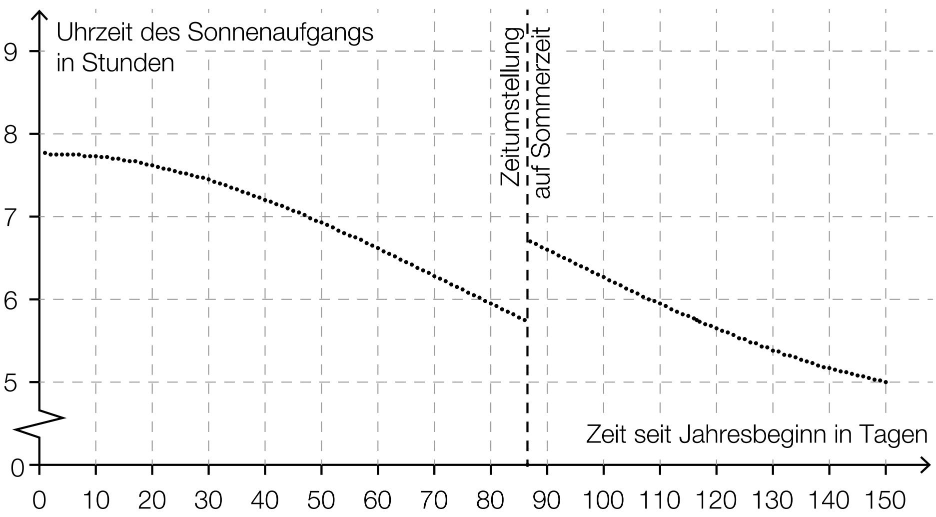
b) An einem Wintertag wurde die Beleuchtungsstärke E in Lux am Morgen und zu Mittag gemessen. Die dekadischen Logarithmen (Logarithmen zur Basis 10) der beiden Messergebnisse sind nachstehend dargestellt:



Marco behauptet, die Beleuchtungsstärke E sei an diesem Tag zu Mittag 4-mal so hoch wie am Morgen gewesen.

1) Zeigen Sie, dass Marcos Behauptung falsch ist. *[1 Punkt]*

c) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet. *[1 Punkt]*

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$f(t) = a \cdot t^2 + c$

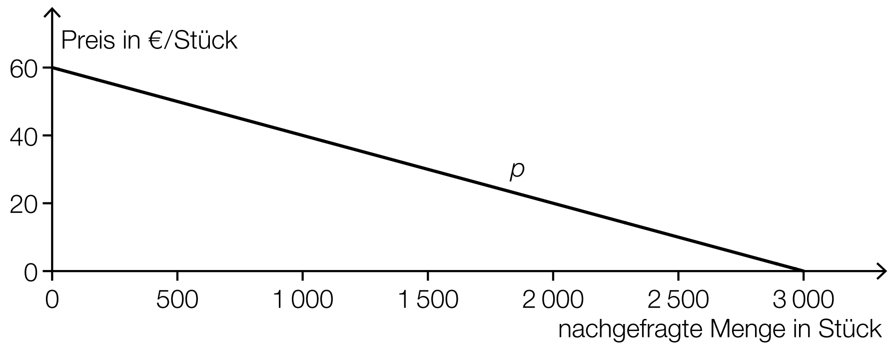
t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Betonrohre

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p. *[1 Punkt]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A. *[1 Punkt]*

b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]* *[1 Punkt]*

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c) Für Betonrohre des Modells C geht man von einer kubischen Kostenfunktion K aus.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d. *[3 Punkte]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[1 Punkt]*

d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells D kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Küchenkauf

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz. *[1 Punkt]*

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt. *[1 Punkt]*

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p. a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz. *[1 Punkt]*

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans. *[2 Punkte]*

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils.“ *[1 Punkt]*

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz i vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld S nach t Jahren.

$S =$ ______________________________ *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Speiseeis

Ein Restaurant stellt nach eigener Rezeptur Speiseeis für Nachspeisen her.

Aus den 6 Rohstoffen Milch, Obers, Eier, Zucker, Schokolade und Vanille werden die 2 Zwischenprodukte Schokoladeeis und Vanilleeis hergestellt.
Die Mengen in Gramm für die Herstellung jeweils einer Portion Eis sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Schokoladeeis Z_1	Vanilleeis Z_2
Milch R_1	10	25
Obers R_2	40	30
Eier R_3	20	15
Zucker R_4	5	10
Schokolade R_5	20	0
Vanille R_6	0	10

Das Schokoladeeis und das Vanilleeis werden für die Nachspeisen Früchtebecher und Bananensplit verwendet.
Die dazu jeweils benötigten Eisportionen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Früchtebecher E_1	Bananensplit E_2
Schokoladeeis Z_1	2	0
Vanilleeis Z_2	1	3

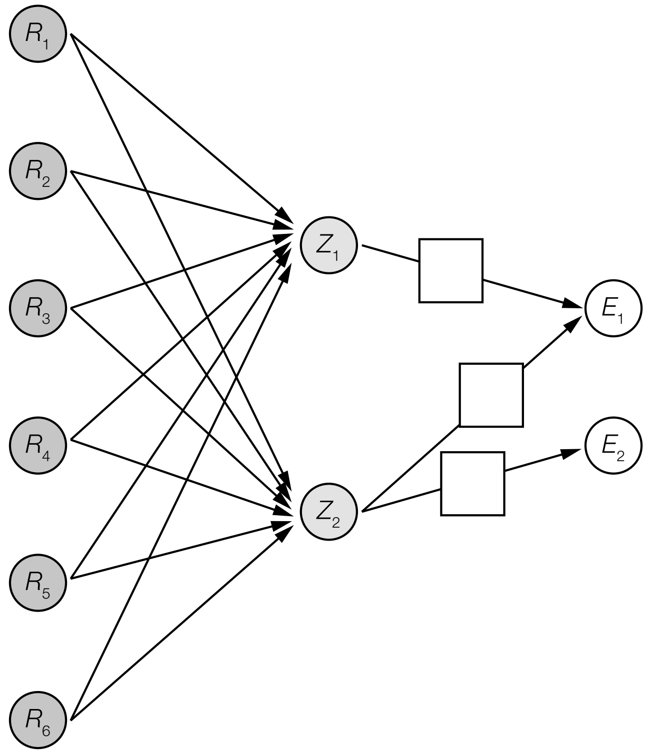
Die Verflechtung, die den Bedarf an Rohstoffen für jeweils eine Nachspeise angibt, kann durch die Verflechtungsmatrix $\boldsymbol{V}$ beschrieben werden.

a) 1) Ermitteln Sie die Verflechtungsmatrix $\boldsymbol{V}$. *[1 Punkt]*

Das Restaurant benötigt täglich 50 Früchtebecher und 30 Bananensplits.

2) Ermitteln Sie denjenigen Vektor, der den täglichen Bedarf an Rohstoffen angibt. *[1 Punkt]*

b) Die Verflechtung kann auch durch einen Gozinto-Graphen dargestellt werden.



1) Tragen Sie im obigen unvollständigen Gozinto-Graphen die fehlenden Zahlen in die entsprechenden Kästchen ein. *[1 Punkt]*

c) Die Preise für die Rohstoffe können in einem Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\vec{p}^{\,\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. *[1 Punkt]*

2) Kreuzen Sie die richtige Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix $\vec{p}^{\,\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V}$ an. *[1 aus 5] [1 Punkt]*

1×2-Matrix	☐
2×1-Matrix	☐
2×6-Matrix	☐
6×1-Matrix	☐
6×2-Matrix	☐

d) Nach einer längeren Lagerung der Milch und der Eier besteht die Gefahr, dass diese Rohstoffe zu einem bestimmten Zeitpunkt t verdorben sind.

A bezeichnet das Ereignis, dass die Milch zum Zeitpunkt t verdorben ist. Das Ereignis A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein.
B bezeichnet das Ereignis, dass die Eier zum Zeitpunkt t verdorben sind. Das Ereignis B tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ein.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % sind beide Rohstoffe zum Zeitpunkt t verdorben.

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse können in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[1 Punkt]*

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

2) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind. *[1 Punkt]*