Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $r \cdot x^2 = s \cdot x + t$ in der Variablen x mit den Koeffizienten $r, s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für $r = 1$ ein Wertepaar (s, t) so an, dass die quadratische Gleichung keine reelle Lösung hat!

Leitfrage:

Geben Sie eine Bedingung für r, s und t so an, dass die quadratische Gleichung genau eine reelle Lösung hat!

Begründen Sie weiters, warum die quadratische Gleichung für den Fall $r = t$ auf keinen Fall genau eine reelle Lösung haben kann!

Lösung zur Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Vorgehensweise:

$x^2 - s \cdot x - t = 0$

Damit die quadratische Gleichung keine reelle Lösung hat, muss gelten: $\frac{s^2}{4} + t < 0$

⇒ ein mögliches Wertepaar ist: $s = 1$ und $t = -1$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtige Werte für s und t angegeben werden. Alle Wertepaare, die die Ungleichung $\frac{s^2}{4} + t < 0$ erfüllen, sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Damit die quadratische Gleichung genau eine reelle Lösung hat, müssen die drei Werte für r, s und t die Bedingung $s^2 = -4 \cdot r \cdot t$ erfüllen.

mögliche Begründung:

Die Bedingung $s^2 = -4 \cdot r \cdot t$ ist für $r = t$ nicht erfüllbar, da die linke Seite der Bedingung in jedem Fall positiv ist und die rechte Seite der Bedingung in jedem Fall negativ wäre.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine der Lösungserwartung entsprechende Bedingung für r, s und t angegeben und eine richtige Begründung dafür gegeben wird, dass es für den Fall $r = t$ auf keinen Fall genau eine reelle Lösung geben kann.

Aufgabe 2

Quader

Von einem Quader mit den Grundkanten a und b und der Höhe h kennt man $a = 17{,}5$ cm und das Volumen $V = 3\,080$ cm^3.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Funktion $b: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ an, die jeder Höhe h die entsprechende Seitenlänge $b(h)$ zuordnet!

Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Funktion $O: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ an, die jeder Höhe h die entsprechende Oberfläche $O(h)$ zuordnet!

Geben Sie die kleinstmögliche Oberfläche eines derartigen Quaders an!

Lösung zur Aufgabe 2

Quader

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$b(h) = \frac{176}{h}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung angegeben wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$O(h) = 17{,}5 \cdot h \cdot 2 + 17{,}5 \cdot \frac{176}{h} \cdot 2 + h \cdot \frac{176}{h} \cdot 2 = \frac{6\,160}{h} + 35 \cdot h + 352$

Minimumstelle: $h = \sqrt{176} \approx 13{,}27$ cm

$\Rightarrow$ kleinstmögliche Oberfläche: $O(\sqrt{176}) \approx 1\,281$ cm^2

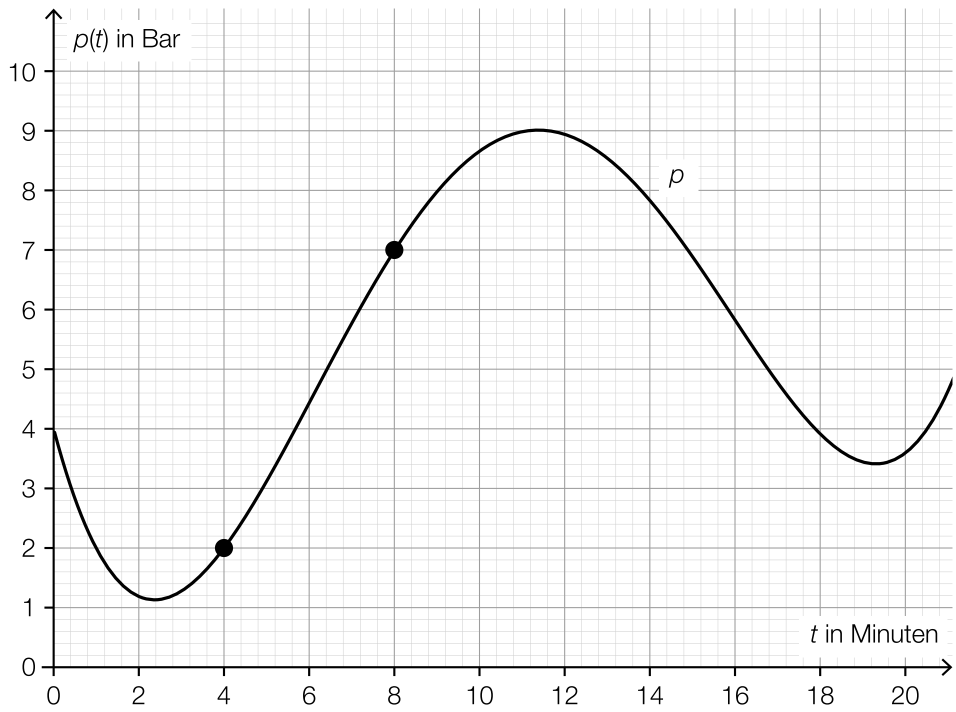
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung und der richtige Wert für die kleinstmögliche Oberfläche angegeben werden.

Aufgabe 3

Druckänderung

Der Druck, der bei einem physikalischen Experiment auftritt, kann durch eine Polynomfunktion p vierten Grades modelliert werden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Druckverlauf in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Dabei ist $p(t)$ der Druck (in Bar) t Minuten nach Beginn des Experiments. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die absolute und die relative (prozentuelle) Druckänderung im Zeitintervall [4; 8]!

Leitfrage:

Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung diejenigen Stellen an, für die die momentane Änderungsrate des Druckes gleich null ist! Erläutern Sie, warum außerhalb des oben dargestellten Bereichs bei der vorliegenden Modellierung keine weiteren derartigen Stellen existieren!

Erläutern Sie, wie man mithilfe der Funktionsgleichung der Modellierungsfunktion p denjenigen Zeitpunkt t_0 ermitteln kann, zu dem die momentane Änderungsrate des Druckes p maximal ist!

Lösung zur Aufgabe 3

Druckänderung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

absolute Druckänderung: 5 Bar
relative Druckänderung: 2,5 bzw. 250 %

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige absolute und die richtige relative Druckänderung angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die momentane Änderungsrate des Druckes ist bei ca. 2,4 Minuten, bei ca. 11,4 Minuten und bei ca. 19,3 Minuten gleich null.

Es existieren keine weiteren Stellen mit $p'(t) = 0$, da eine Polynomfunktion vierten Grades maximal drei Extremstellen hat.

Der Zeitpunkt t_0 ist eine Wendestelle des Graphen von p und wird durch Lösen der Gleichung $p''(t) = 0$ ermittelt. Diejenige Lösung t_0, für die $p'(t_0) > 0$ gilt, entspricht dem gesuchten Zeitpunkt.

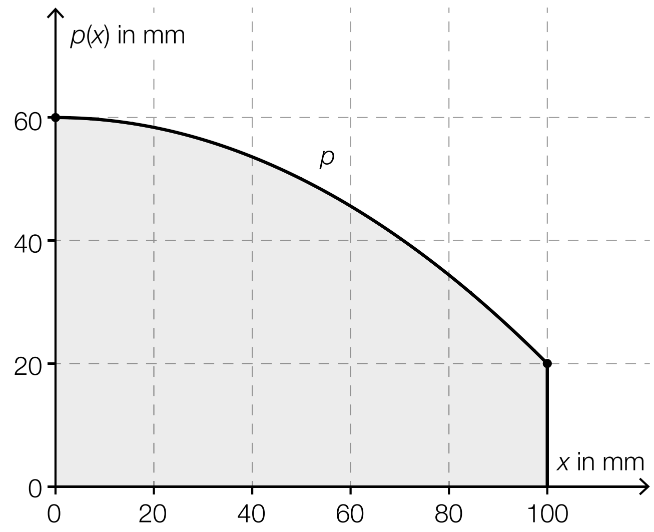
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle richtigen Stellen angegeben werden, eine (sinngemäß) richtige Begründung erfolgt und die Ermittlung von t_0 korrekt erläutert wird.
Beim Ablesen der Stellen sind Abweichungen von 0,2 Minuten zu tolerieren.

Aufgabe 4

Flächenteilung

In der nachstehenden Abbildung ist ein Flächenstück dargestellt. Es wird von den positiven Koordinatenachsen, von der Geraden mit der Gleichung $x = 100$ und vom Graphen einer quadratischen Funktion p, der zur senkrechten Achse symmetrisch ist, begrenzt ($p(x)$ und x in mm). Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Inhalt des Flächenstücks und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Das Flächenstück soll durch eine zur senkrechten Achse parallele Gerade h halbiert werden.

Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung des Abstands e der Geraden h zur senkrechten Achse an und berechnen Sie diesen Abstand!

Lösung zur Aufgabe 4

Flächenteilung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p(x) = a \cdot x^2 + b$

Mit $b = 60$ und dem Einsetzen des Punktes $(100|20)$ folgt:
$a = -0{,}004 \quad \Rightarrow \quad p(x) = -0{,}004 \cdot x^2 + 60$

$A = \int_0^{100} p(x)\,\mathrm{d}x \approx 4\,667 \text{ mm}^2$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Inhalt des Flächenstücks angegeben wird und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Gleichung:

$\frac{4\,667}{2} = \int_0^{e} p(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \quad \frac{4\,667}{2} = \frac{-0{,}004 \cdot e^3}{3} + 60 \cdot e \quad \Rightarrow \quad e \approx 40{,}35 \text{ mm}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung und der richtige Abstand zur senkrechten Achse angegeben werden.
Toleranzintervall: [40; 41]

Aufgabe 5

Gruppentest

Gruppentests werden dazu verwendet, um in kurzer Zeit eine große Anzahl von Personen ärztlich zu untersuchen. Dabei wird das Blut von einer Gruppe von n Personen vermischt und dann untersucht, ob der Erreger einer bestimmten Krankheit darin enthalten ist. Sind alle diese Personen gesund, so benötigt man nur diesen einen Test. Wird der Erreger nachgewiesen, so werden alle Personen zusätzlich einzeln getestet und man benötigt in diesem Fall insgesamt $n + 1$ Tests.

Aufgabenstellung:

Der Erreger einer bestimmten Krankheit ist im Blut von 1 % der Bevölkerung Österreichs enthalten.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Gruppe von zehn jeweils zufällig ausgewählten Personen (wobei jede Person die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, dass in ihrem Blut der Erreger enthalten ist) bei mindestens einer Person der Erreger im Blut enthalten ist!

Leitfrage:

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Blut einer Person der Erreger enthalten ist, beträgt $p = 0{,}01$.
Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der erforderlichen Tests für $n = 10$.

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(Y)$!

Geben Sie an, wie viel Prozent der Tests man sich somit bei dieser Gruppengröße (im Vergleich zu Einzeltests) durchschnittlich ersparen kann!

Lösung zur Aufgabe 5

Gruppentest

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen, in deren Blut der Erreger enthalten ist.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}99^{10} \approx 0{,}0956$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$E(Y) = 1 \cdot 0{,}99^{10} + 11 \cdot 0{,}0956 \approx 1{,}96$

$\frac{8{,}04}{10} = 0{,}804 \quad \Rightarrow \quad \text{Ersparnis: ca. } 80\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Erwartungswert und der richtige Prozentwert für die Ersparnis angegeben werden.