Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Für ein rechtwinkeliges Dreieck ABC gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{CA}$!
Bestimmen Sie für $A = (-5|0)$ die Koordinaten des Punktes C!

Leitfrage:

Von einem anderen rechtwinkeligen Dreieck $A_1B_1C_1$ mit der Hypotenuse A_1B_1 sind die Eckpunkte $A_1 = (-2|4)$, $B_1 = (4|-4)$ und $C_1 = (c|0)$ bekannt, wobei $c > 0$ gilt.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinate c!

Lösung zur Aufgabe 1

Rechtwinkeliges Dreieck

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Vorgehensweise:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$C = A - \overrightarrow{CA} \quad \Rightarrow \quad C = (3|4)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Vektor $\overrightarrow{CA}$ und die Koordinaten des Punktes C richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:

$\overrightarrow{C_1A_1} = \begin{pmatrix} -2 - c \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{C_1B_1} = \begin{pmatrix} 4 - c \\ -4 \end{pmatrix}$

$(-2 - c) \cdot (4 - c) - 16 = 0$
$c^2 - 2 \cdot c - 24 = 0$
$c_{1,2} = 1 \pm 5$
$c = 6$

Lösungsschlüssel:

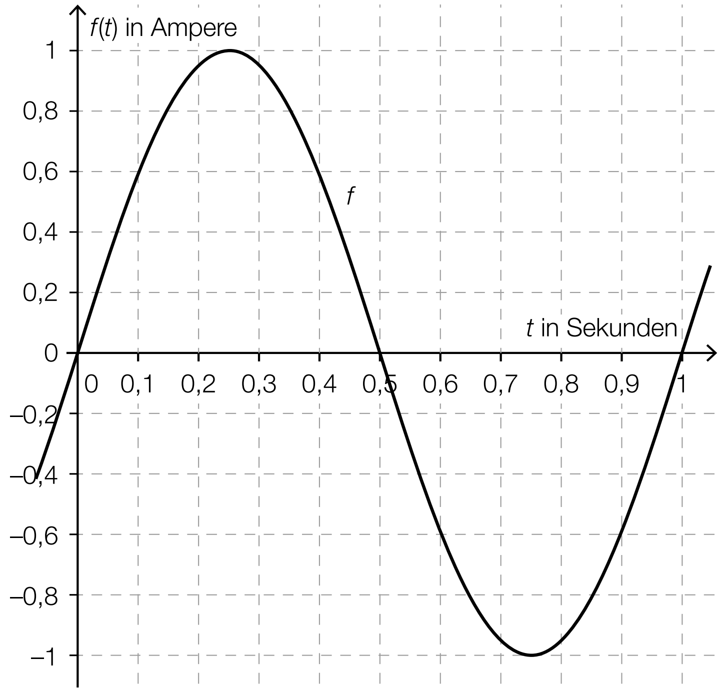
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinate c richtig bestimmt wird.

Aufgabe 2

Blinklampe

Eine Blinklampe wird mit Wechselstrom betrieben und leuchtet genau dann, wenn der Betrag der Stromstärke größer als 0,6 Ampere ist.

Der periodische Verlauf der Stromstärke wird durch eine Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert. Ihr Graph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt ($f(t)$ in Ampere, t in Sekunden).



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie lange die Lampe im dargestellten Zeitraum leuchtet!

Leitfrage:

Die Stromstärke, mit der die Blinklampe betrieben wird, kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine bestimmte Funktionsgleichung beschrieben werden.

Geben Sie an, durch welchen Funktionstyp die Funktion f passend modelliert werden kann, und bestimmen Sie die Werte der in der allgemeinen Funktionsgleichung auftretenden Parameter!

Lösung zur Aufgabe 2

Blinklampe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Lampe leuchtet in den Intervallen (0,1 s; 0,4 s) und (0,6 s; 0,9 s), also jeweils für etwa 0,3 s. Somit leuchtet sie insgesamt etwa 0,6 s lang.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Zeitdauer angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Stromstärke kann durch eine Sinusfunktion mit $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

$a = 1$
$b = 2 \cdot \pi$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Funktionstyp sowie die entsprechenden Parameterwerte angegeben werden.

Aufgabe 3

Abnahmeprozess

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot b^x$ (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$) beschreibt einen Abnahmeprozess.

Dabei gilt: $f(x_1) = \frac{a}{2}$ (mit $x_1 \in \mathbb{R}^+$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: $f(2 \cdot x_1) = 0$

Aussage 2: $f(3 \cdot x_1) = \frac{a}{3}$

Aussage 3: $f(4 \cdot x_1) = \frac{a}{16}$

Leitfrage:

Berechnen Sie, welcher Bruchteil der Ausgangsmenge bei einem exponentiellen Abnahmeprozess für $x = 10 \cdot x_1$ bereits zerfallen ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 3

Abnahmeprozess

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

(Die Angabe $f(x_1) = \frac{a}{2}$ bedeutet, dass x_1 „die Halbwertszeit" der Funktion f ist.)

Aussage 1: falsch, da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
Aussage 2: falsch, da nach drei Halbwertszeiten nur mehr $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge vorhanden ist
Aussage 3: wahr, da nach vier Halbwertszeiten noch $\frac{1}{16}$ der Ausgangsmenge vorhanden ist

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei jeder der Aussagen richtig erkannt wird, ob sie wahr oder falsch ist, und dies jeweils (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(10 \cdot x_1) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{a}{1\,024}$, d. h., $\frac{1}{1\,024}$ der Ausgangsmenge ist noch vorhanden.

$\Rightarrow$ $\frac{1\,023}{1\,024}$ der Ausgangsmenge sind bereits zerfallen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Bruchteil der zerfallenen Menge sowie eine korrekte Vorgehensweise angegeben werden.
Andere Schreibweisen der Lösung (ca. 0,999 bzw. ca. 99,9 %) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Wendepunkt

Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x + 3$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
Die Funktion f hat bei $x = 1$ eine Wendestelle.

Aufgabenstellung:

Beschreiben Sie die Beziehung zwischen den Parametern a und b mit einer Gleichung!

Leitfrage:

Die Geschwindigkeit eines Körpers im Intervall [0; 2] kann mithilfe dieser Funktion f modelliert werden. Dabei ist x die Zeit in s und $f(x)$ die Geschwindigkeit in m/s.

Erläutern Sie die Bedeutung der Wendestelle in diesem Kontext!

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass der vom Körper im Intervall [0; 2] zurückgelegte Weg 12 m beträgt!

Lösung zur Aufgabe 4

Wendepunkt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$ und $f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

$b = -3 \cdot a$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Beziehung zwischen *a* und *b* angegeben wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Beschleunigung (Änderungsrate der Geschwindigkeit) des Körpers ist zum Zeitpunkt $x = 1$ maximal oder minimal.

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ und $b = -3 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = -1;\ b = 3$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wendestelle sinngemäß richtig gedeutet wird und die Parameter *a* und *b* richtig angegeben werden.

Aufgabe 5

Spiel

Ein fairer sechsflächiger Würfel, dessen Seitenflächen mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind, wird 10-mal geworfen. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.) Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei die Zahl 6 gewürfelt wird.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:
- Die Zahl 6 wird höchstens 2-mal gewürfelt.
- Die Zahl 6 wird öfter als 5-mal gewürfelt.

Leitfrage:

Für ein Spiel, bei dem ein Würfel 10-mal geworfen wird, gelten folgende Regeln:

Der Spieler zahlt einen Einsatz von 10 Euro, der verloren ist, wenn die Zahl 6 höchstens 2-mal erscheint.

Der Einsatz wird dem Spieler zurückbezahlt, wenn die Zahl 6 mindestens 3-mal und höchstens 5-mal erscheint.

Wenn öfter als 5-mal die Zahl 6 gewürfelt wird, erhält der Spieler y Euro, die ihm vom Spielbetreiber ausbezahlt werden.

Die Zufallsvariable Y beschreibt den Gewinn des Spielers und kann die Werte -10; 0 und $(y - 10)$ annehmen.

Geben Sie an, welchen Wert der Spielbetreiber für y wählen muss, damit er im Mittel pro Spiel 7,50 Euro erwirtschaftet!

Lösung zur Aufgabe 5

Spiel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P(X \leq 2) \approx 0{,}7752$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 6 höchstens 2-mal gewürfelt wird, beträgt ca. 77,52 %.

$P(X \geq 6) \approx 0{,}0024$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 6 öfter als 5-mal gewürfelt wird, beträgt ca. 0,24 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte für die beiden Wahrscheinlichkeiten angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-10 \cdot P(X \leq 2) + (y - 10) \cdot P(X \geq 6) = -7{,}5$
$y \approx 113$ Euro

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für y angegeben wird.
Toleranzintervall: [113; 114]