Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

16. Jänner 2018

# Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 2)

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

# Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im entsprechenden Erlass zur Beurteilung, der auf der Website https://ablauf.srdp.at/ abrufbar ist.)

**Kompetenzbereiche**

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

**Beurteilung**

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

**Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:**

| | |
|---|---|
| 44–48 Punkte | Sehr gut |
| 39–43 Punkte | Gut |
| 34–38 Punkte | Befriedigend |
| 23–33 Punkte | Genügend |
| 0–22 Punkte | Nicht genügend |

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

# Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist unter Beachtung folgender Vorgangsweisen **verbindlich** anzuwenden:

    a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

    b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

    c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

    d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

    e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

    f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

    g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

    h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

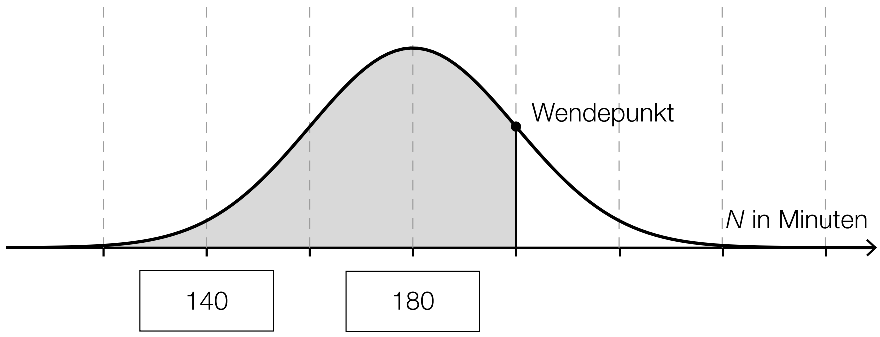
    i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

# Aufgabe 1

## Internet

### Möglicher Lösungsweg

a)




b) $0{,}25 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}03125$

Sie wendet etwa 3 % ihrer gesamten Internet-Nutzungsdauer für dieses Spiel auf.

c) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 3{,}95$ h
Standardabweichung: $s = 1{,}627...$ h

*Auch eine Berechnung der Standardabweichung als* $s_{n-1} = 1{,}669...$ *h ist als richtig zu werten.*

### Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zeiten (KA)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (KB)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes (KA)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung ($s$ bzw. $s_{n-1}$) (KA)

# Aufgabe 2

## Erfassen der Geschwindigkeit

### Möglicher Lösungsweg

a) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

*oder:*

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$
Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

$a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

An der Stelle $t_0 = 2$ gilt:

$v_2'(2) = a_2(2) = 0$

$v_2''(2) = a_2'(2) = -2 < 0$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit $t_0$ maximal ist.
*Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.*

c) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
$t$ ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit $t$ in m

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten (KB)

b) 1 × D1: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit ungleich null ist (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Zeit $t_0$ (KA)
   1 × D2: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit zur Zeit $t_0$ maximal ist (KB)
   Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KB)

# Aufgabe 3

## Bevölkerungsentwicklung

### Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$d = N_1(0) = 7\,965$

$k = \frac{4\,524 - 7\,965}{22} = -156{,}4...$

$N_1(t) = -156 \cdot t + 7\,965$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

| | |
|---|---|
| $P$ | C |
| $Q$ | B |

| | |
|---|---|
| A | $N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$ |
| B | $N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$ |
| C | $N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$ |
| D | $N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$ |

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$4\,524 = 10\,068 \cdot a^{33} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}976...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot 0{,}976...^t$

*oder:* $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4\,524 = 10\,068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0{,}024...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3\,069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3 070 Personen zu erwarten.

### Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion $N_1$ (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

b) 1 × C: für die richtige Zuordnung (KA)

c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion $N_3$ (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 (KB)

# Aufgabe 4

## Fußball

### Möglicher Lösungsweg

a) Der Ausdruck $25^{1,32} + 30^{1,32}$ wurde nicht eingeklammert.

Berechnung mithilfe der Formel:
$25^{1,32} : (25^{1,32} + 30^{1,32}) \cdot 36 \cdot 2{,}753 = 43{,}6... \approx 44$
Verdoppelung der Punkte nach der ersten Saisonhälfte: $19 \cdot 2 = 38$
Die Zahl, die mit der Formel berechnet wurde, ist näher an der tatsächlichen Punkteanzahl als die Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| $\sqrt[100]{T^{132}}$ | ☒ |
| | |
| | |

b) $n = 5$ und $p = 0{,}8$
$X$ ... Anzahl der verwandelten Elfmeter
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 4) = 0{,}4096$

c) $\overline{AE}$: $\sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$
$\overline{EP}$: $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{EP} = \frac{\sqrt{130}}{\cos(5°)} = 11{,}445...$
$\overline{EP} \approx 11{,}45$ m

$\frac{11{,}44...\text{ m}}{0{,}4\text{ s}} = 28{,}61...\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 103\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

### Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Beschreibung, welcher Fehler gemacht wurde (KA)
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung (KA)
1 × C2: für das richtige Ankreuzen (KA)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{EP}$ (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in km/h (KB)

# Aufgabe 5

## Der Genfer See

### Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_{max} = 5{,}673...$
$h(t_{max}) = 157{,}72...$

prozentueller Unterschied zur angegebenen maximalen Höhe:
$\frac{157{,}72... - 140}{140} = 0{,}1265... \approx 12{,}7\ \%$

b) Mit dem Ausdruck wird die gesamte Wassermenge in m³ berechnet, die innerhalb dieser 48 Stunden den See durch den Abfluss verlassen hat.

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| *F* ist monoton steigend im Intervall [4; 26]. | ☒ |
| | |

### Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds (KB)
b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit (KA)
1 × C2: für das richtige Ankreuzen (KB)

# Aufgabe 6 (Teil B)

## Widerstandstemperatursensoren

### Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{|R(450) - 260|}{260} = 0{,}0059... \approx 0{,}6\ \%$

b) $\mu_{\overline{X}} = 100\ \Omega$

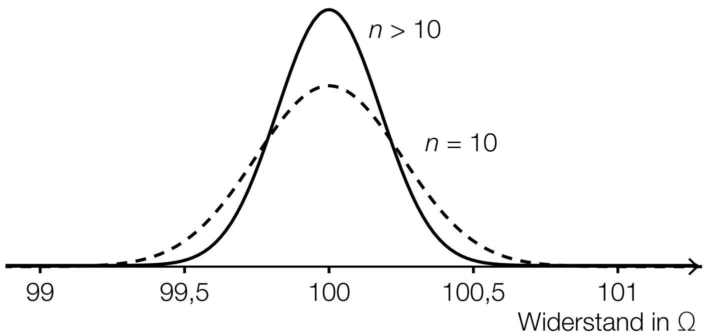
$\sigma_{\overline{X}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}\ \Omega$

Zweiseitigen 98-%-Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$100 \pm z_{0{,}99} \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}$

$z_{0{,}99} = 2{,}326...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallstreubereich in Ω: [99,41; 100,59] (gerundet).




### Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des relativen Fehlers (KA)
b) 1 × A1: für das richtige Angeben der Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln des Zufallsstreubereichs (KB)
1 × A2: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Maximalwert höher und Kurve schmäler) (KA)

# Aufgabe 7 (Teil B)

## Federpendel

### Möglicher Lösungsweg

a) $A = 0{,}04$

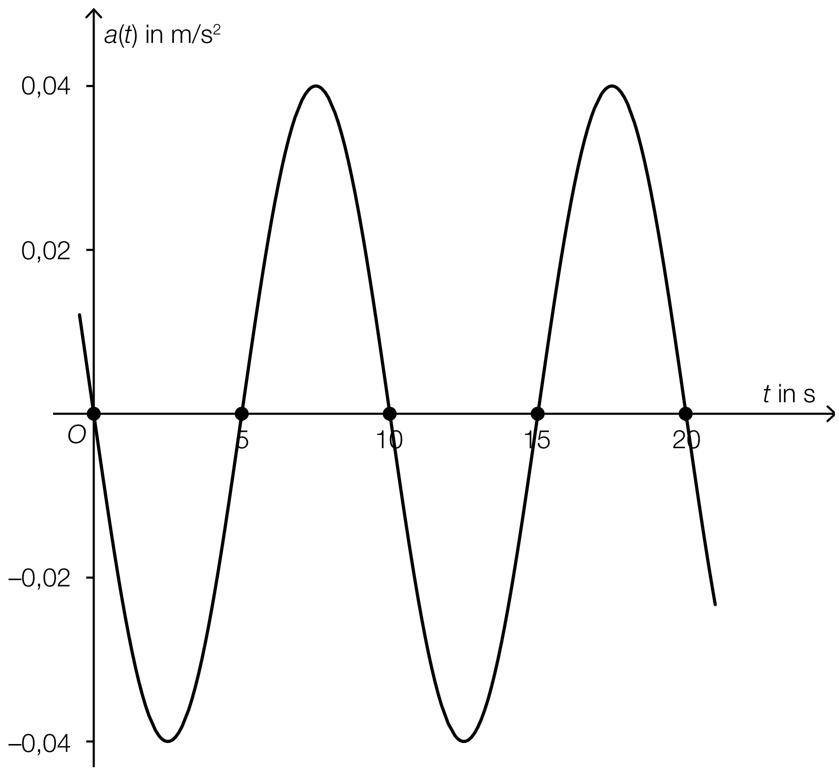
Die Periodendauer $T$ ist 10, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$t_0 = 5$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = -5 \cdot \frac{\pi}{5} = -\pi$

*(Jeder Wert $\varphi = -\pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)*




b) $t_2 = t_1 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

Auch ein Vielfaches der Periodendauer ist als richtig zu werten.

$v'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Da der maximale Wert von $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ gleich 1 ist, ergibt sich als maximale Steigung von $v$ genau $A \cdot \omega$.

c) Lösen der Gleichungen $f(t) = \pm 0{,}2$ mittels Technologieeinsatz:

$]0{,}07...;\ 0{,}87...[$ und $]1{,}33...;\ 1{,}60...[$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen von $A$ (KA)
   1 × B1: für das richtige Bestimmen von $\omega$ (KA)
   1 × B2: für das richtige Bestimmen von $\varphi$ (KB)
   1 × C2: für das richtige Markieren aller Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist (KA)

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Aussage (KA)
   1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Intervalle (KA)

# Aufgabe 8 (Teil B)

## Ausbreitung von Licht

### Möglicher Lösungsweg

a) Der Nenner muss größer gleich dem Zähler sein, also: $0{,}5 \cdot \lambda \leq d$.

$$\frac{(n + 0{,}5) \cdot 632 \cdot 10^{-9}}{0{,}01 \cdot 10^{-3}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n \leq 15{,}3...$$

Daher gibt es für $n = 0, 1, 2, \dots, 15$ jeweils eine Lösung für $\alpha$.

b) Berechnung der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks und des Winkels zwischen den Schenkeln: $s = \sqrt{17^2 + 5^2} = 17{,}72...$

$\gamma = 2 \cdot \arctan\left(\frac{5}{17}\right) = 32{,}77...°$

Mit dem Cosinussatz ergibt sich die Länge $c$:

$\sqrt{(s - 11)^2 + (s - 6)^2 - 2 \cdot (s - 11) \cdot (s - 6) \cdot \cos(\gamma)} = 7{,}07...$

$c \approx 7{,}1$ cm

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{s - 6}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 \approx 63{,}7...°),\ \alpha_2 = 116{,}2...°$$

c) Da $P$ ein Punkt der Parabel ist, gilt: $15 = 144 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{15}{144}$.

Die Koordinaten des Brennpunkts lauten somit:

$$F = \left(0 \middle| \frac{1}{4 \cdot \frac{15}{144}}\right) = (0|2{,}4)$$

Ist $R = (r|t)$ ein Punkt der Parabel, dann muss $t = a \cdot r^2$, also $a = \frac{t}{r^2}$ sein.

Die $y$-Koordinate von $F$ lautet: $y_F = \frac{r^2}{4 \cdot t}$.

Eine Verdoppelung des Radius bewirkt somit eine Vervierfachung der $y$-Koordinate.

### Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Angeben der Beziehung zwischen $d$ und $\lambda$ (KA)
1 × A: für das richtige Ermitteln der entsprechenden Werte von $n$ (KB)

b) 1 × A: für die richtige Modellbildung (z. B. mithilfe eines gleichschenkeligen Dreiecks und eines allgemeinen Dreiecks) (KA)
1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge $c$ (KB)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels $\alpha$ (KB)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der $y$-Koordinate des Brennpunkts (KA)
1 × D: für die richtige Überprüfung (KA)

# Aufgabe 9 (Teil B)

## Elektrische Bauteile

### Möglicher Lösungsweg

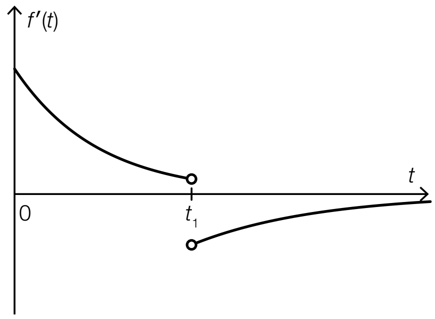
a) Tangente $g(t) = k \cdot t + d$ an der Stelle $t = 0$:

$k = u'(0) = -\frac{U_0}{\tau}$

$d = U_0$

$\Rightarrow \quad g(t) = -\frac{U_0}{\tau} \cdot t + U_0$

b)




c) Da der Ausdruck $e^{-\frac{t}{0{,}24}}$ für steigende Werte von $t$ gegen null geht, nähert sich der Klammerausdruck dem Wert 1. Daher nähert sich der Funktionswert asymptotisch dem Wert 40 V.

Durch Lösen der Gleichung $u(t_1) = 5$ bzw. $u(t_2) = 30$ erhält man die Integrationsgrenze $t_1 = 0{,}0320...$ bzw. $t_2 = 0{,}3327...$

$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t = 20{,}04...$

Der lineare Mittelwert der Spannung in diesem Zeitintervall beträgt rund 20,0 V.

Die Kettenregel wurde missachtet.

### Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Tangente (KA)

b) 1 × A1: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $0 < t < t_1$ (richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion) (KA)

1 × A2: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $t > t_1$ (richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion) (KA)

c) 1 × D: für die richtige Erklärung des Verhaltens der Funktion (KA)

1 × B: für die richtige Berechnung des linearen Mittelwerts (KA)

1 × C: für das richtige Angeben, dass die Kettenregel missachtet wurde, oder eine richtige Beschreibung (KA)