

# Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur  
standardisierten kompetenzorientierten  
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2018

## Mathematik

Kompensationsprüfung 2  
Angabe für **Prüfer/innen**

**BMB**

Bundesministerium  
für Bildung

# Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

## Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

# Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

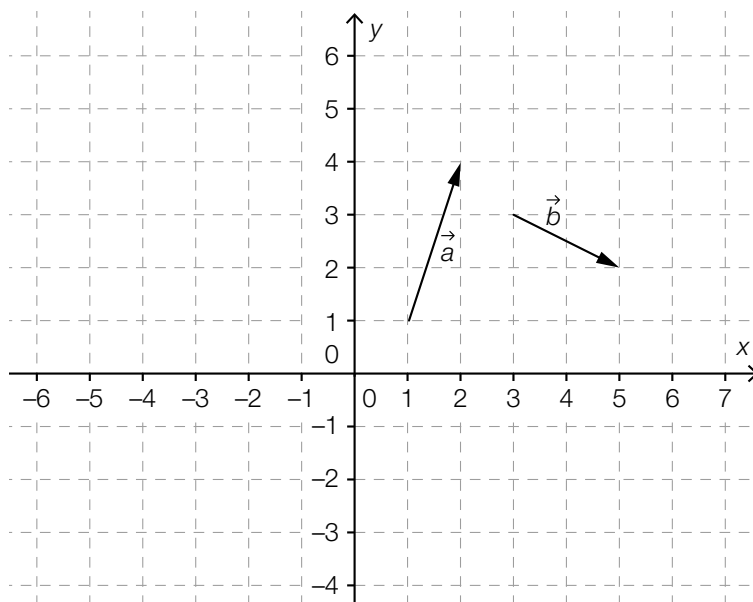
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

# Aufgabe 1

## Vektoren in der Ebene

Im nachstehenden Koordinatensystem sind zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eingezeichnet.



### Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie man den Vektor  $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$  grafisch ermitteln kann, zeichnen Sie diesen Vektor in das Koordinatensystem ein und lesen Sie aus der Grafik die Koordinaten (die Komponenten) dieses Vektors ab!

### Leitfrage:

Geben Sie eine Parameterdarstellung derjenigen Geraden  $g$  an, die durch den Ursprung (0|0) verläuft und den Vektor  $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$  als Richtungsvektor hat!

Erläutern Sie die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene und geben Sie für jede dieser Möglichkeiten eine Parameterdarstellung einer Geraden an, die zur Geraden  $g$  diese Lagebeziehung aufweist!

# Lösung zur Aufgabe 1

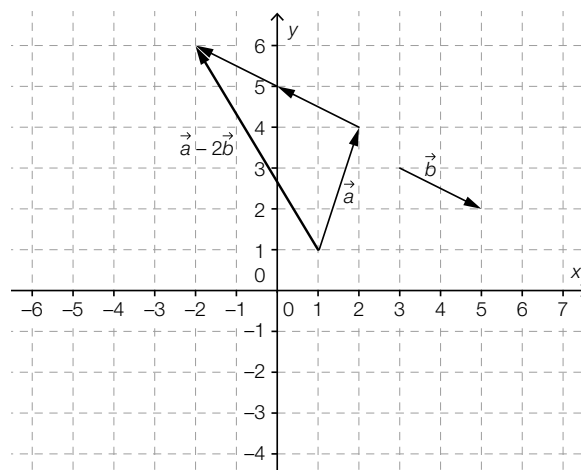
## Vektoren in der Ebene

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

An den Vektor  $\vec{a}$  wird ein Vektor angehängt, der doppelt so lang wie der Vektor  $\vec{b}$  und entgegengesetzt orientiert ist.

$$\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt angegeben wird, wie der Vektor grafisch ermittelt werden kann, und der Vektor sowohl korrekt eingezeichnet wird als auch seine Koordinaten richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Parameterdarstellung:

$$g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } s \in \mathbb{R})$$

Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene: identisch, parallel und schneidend

Mögliche Beispiele:

identisch mit  $g$ :  $h: X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } t \in \mathbb{R})$

parallel zu  $g$ :  $k: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } t \in \mathbb{R})$

schneidend mit  $g$ :  $j: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } t \in \mathbb{R})$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Parameterdarstellung für  $g$  angegeben wird, alle möglichen Lagebeziehungen richtig genannt werden und für jede dieser Lagebeziehungen jeweils eine korrekte Parameterdarstellung einer Geraden angeführt wird. Andere korrekte Parameterdarstellungen sind als richtig zu werten, wobei der Richtungsvektor der Geraden  $j$  kein Vielfaches von  $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$  sein darf.

# Aufgabe 2

## Schwimmbad

Ein Schwimmbecken fasst 36 000 Liter Wasser. Zum Füllen des leeren Beckens wird Wasser über einen Schlauch zugeleitet. Die zum vollständigen Befüllen notwendige Zeit  $t$  (in Sekunden) hängt von der Durchflussrate  $x$  (in Litern/Sekunde) ab.

### Aufgabenstellung:

Die Funktion  $t$  beschreibt die Abhängigkeit der Füllzeit von der Durchflussrate  $x$ .  
Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser Funktion an und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen!

$t(x) =$  \_\_\_\_\_

### Leitfrage:

Geben Sie jeweils an, welche Bedingung der Parameter  $a$  bzw. der Parameter  $\lambda$  einer Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$  erfüllen muss, damit  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  das gleiche Monotonie- und Krümmungsverhalten wie die Funktion  $t$  zeigt!

Geben Sie weiters an, wodurch sich die Verläufe der Graphen der Funktionen  $t$  und  $f$  wesentlich unterscheiden!

# Lösung zur Aufgabe 2

## Schwimmbad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$t(x) = \frac{36000}{x}$$

Der Graph von  $t$  verläuft asymptotisch zu beiden Achsen, ist streng monoton fallend und linksgekrümmt (positiv gekrümmt).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung richtig angegeben wird und der Verlauf des Graphen korrekt beschrieben wird. Eine passende Skizze ist ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für den Parameter  $\lambda$  der Exponentialfunktion muss gelten:  $\lambda < 0$ .

Für den Parameter  $a$  der Exponentialfunktion muss gelten:  $a > 0$ .

Der Graph von  $f$  hat einen Schnittpunkt mit der senkrechten Achse.

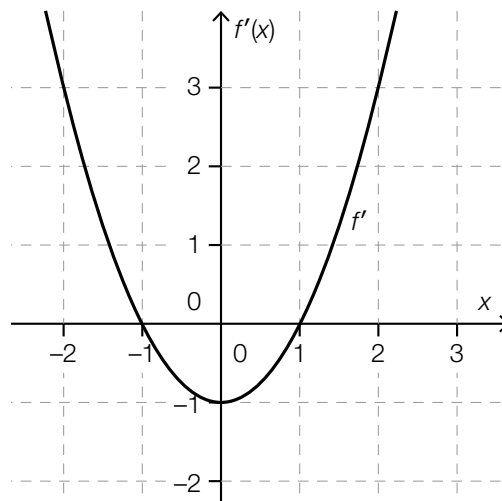
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die jeweilige Bedingung für beide Parameter richtig angegeben und ein wesentlicher Unterschied im Verlauf der beiden Graphen genannt wird.

# Aufgabe 3

## Ableitungsfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion  $f'$  zweiten Grades. Die Funktion  $f'$  ist die Ableitungsfunktion einer Funktion  $f$ .



### Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion  $f$  und erläutern Sie das Krümmungsverhalten von  $f$ !

### Leitfrage:

Die erste Ableitungsfunktion  $f'$  einer Polynomfunktion  $f$  ist durch die Gleichung  $f'(x) = x^2 + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  gegeben.

Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Anzahl der (lokalen) Extremstellen der Polynomfunktion  $f$  vom Wert des Parameters  $c$  und begründen Sie Ihre Aussagen!



# Lösung zur Aufgabe 3

## Ableitungsfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Wendestelle von  $f$  liegt bei  $x = 0$ .

Im Intervall  $(-\infty; 0)$  ist  $f$  rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt), da  $f'$  in diesem Intervall streng monoton fallend ist und somit die Funktionswerte der zweiten Ableitungsfunktion in diesem Bereich negativ sind.

Im Intervall  $(0; \infty)$  ist  $f$  linksgekrümmt (positiv gekrümmt), da  $f'$  in diesem Intervall streng monoton steigend ist und somit die Funktionswerte der zweiten Ableitungsfunktion in diesem Bereich positiv sind.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wendestelle der Funktion  $f$  richtig bestimmt wird und das Krümmungsverhalten (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$c > 0$ :

Die Gleichung  $f'(x) = 0$  hat keine reelle Lösung. Die Polynomfunktion  $f$  hat somit keine (lokalen) Extremstellen.

$c < 0$ :

Die Gleichung  $f'(x) = 0$  hat zwei reelle Lösungen. Die Polynomfunktion  $f$  hat somit zwei (lokale) Extremstellen.

$c = 0$ :

Aus  $f'(x) = 0$  folgt in diesem Fall  $x = 0$ . Da zusätzlich  $f''(0) = 0$  gilt, hat die Polynomfunktion  $f$  bei  $x = 0$  eine Wendestelle (mit waagrechter Tangente) und somit keine (lokalen) Extremstellen.

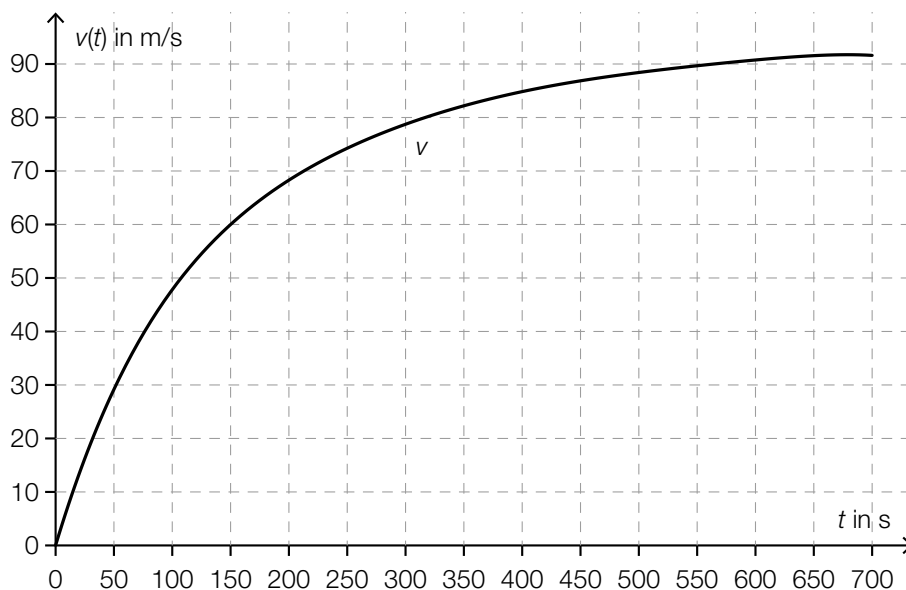
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Einfluss des Parameters  $c$  auf die Anzahl der Extremstellen der Polynomfunktion  $f$  korrekt beschrieben und begründet wird.

# Aufgabe 4

## ICE

In der nachstehenden Abbildung ist der Beschleunigungsvorgang eines Hochgeschwindigkeitszuges ICE (Intercity-Express) dargestellt. Dabei ist die Geschwindigkeit  $v$  in Metern pro Sekunde (m/s) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Sekunden (s) dargestellt. Der Beschleunigungsvorgang dauert 700 s, die erreichte Endgeschwindigkeit beträgt 92 m/s.



### Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit während des Beschleunigungsvorgangs und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

### Leitfrage:

Geben Sie mithilfe eines bestimmten Integrals einen Ausdruck an, um die während der ersten 500 Sekunden des Beschleunigungsvorgangs zurückgelegte Weglänge (in Metern) berechnen zu können!

Veranschaulichen Sie diese Weglänge in der obigen Abbildung und geben Sie einen Näherungswert für diese Weglänge an! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

# Lösung zur Aufgabe 4

## ICE

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{v(700) - v(0)}{700} = \frac{92}{700} \approx 0,13$$

Mögliche Interpretationen:

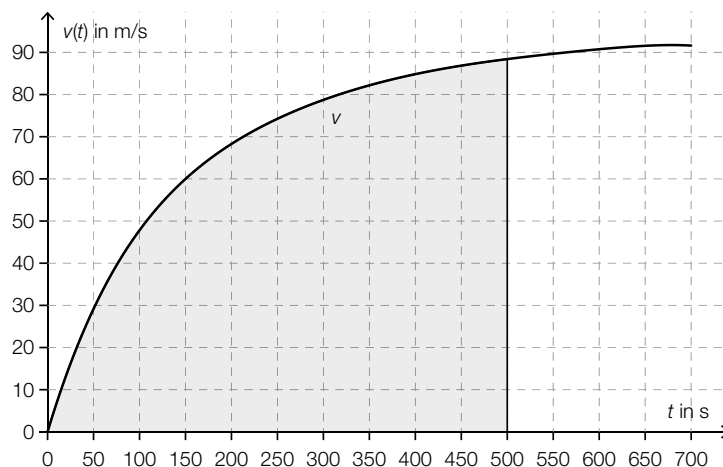
- Während des Beschleunigungsvorgangs beträgt die mittlere Beschleunigung ca.  $0,13 \text{ m/s}^2$ .
- Die Geschwindigkeit nimmt während des Beschleunigungsvorgangs in jeder Sekunde um durchschnittlich ca.  $0,13 \text{ m/s}$  zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit richtig ermittelt und korrekt interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Weglänge:  $\int_0^{500} v(t) dt$



Die Weglänge beträgt ca. 33000 m.

Die Weglänge entspricht der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $v$  und der  $t$ -Achse im Zeitintervall  $[0 \text{ s}; 500 \text{ s}]$ . Die näherungsweise Ermittlung kann beispielsweise mithilfe der Unter- oder Obersumme bzw. durch Abzählen der Rechtecke (wobei ein Rechteck einem Wert von 500 m entspricht) erfolgen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für die Berechnung der Weglänge ein korrekter Ausdruck angegeben, die Weglänge in der Abbildung korrekt veranschaulicht, ein passender Näherungswert angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Toleranzintervall für die Weglänge:  $[28000 \text{ m}; 37000 \text{ m}]$

# Aufgabe 5

## Zielscheibe

Bei einem Wettkampf schießen drei Schützen  $A$ ,  $B$  und  $C$  von einer Mannschaft auf eine Zielscheibe.

Der Schütze  $A$  trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, der Schütze  $B$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % und der Schütze  $C$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % in das Zentrum der Zielscheibe.

### Aufgabenstellung:

Jeder der drei Schützen schießt genau einmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schütze in das Zentrum der Zielscheibe trifft, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

### Leitfrage:

Aufgrund der geringen Treffsicherheit des Schützen  $C$  beschließt der Trainer der Mannschaft, den Schützen  $C$  durch den Schützen  $D$  zu ersetzen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der drei Schützen  $A$ ,  $B$  und  $D$  (bei einmaligem Schießen jedes Schützen) in das Zentrum der Zielscheibe trifft, liegt bei 20,4 %.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze  $D$  in das Zentrum der Zielscheibe trifft!

# Lösung zur Aufgabe 5

## Zielscheibe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,958 = 95,8 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schütze in das Zentrum der Zielscheibe trifft, kann mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (keiner der Schützen trifft in das Zentrum der Zielscheibe) berechnet werden.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Trefferwahrscheinlichkeit des Schützen  $D$  wird mit  $x$  bezeichnet:

$$0,8 \cdot 0,3 \cdot (1 - x) + 0,2 \cdot 0,7 \cdot (1 - x) + 0,2 \cdot 0,3 \cdot x = 0,204$$

$$x = 0,55 = 55 \%$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.