Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden

Gegeben sind die Parameterdarstellung einer Geraden g sowie die Gleichungen von drei weiteren Geraden g_1, g_2, g_3.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

$g_1\colon 3 \cdot x + y = 9$

$g_2\colon y = -3 \cdot x + 10$

$g_3\colon x - 3 \cdot y = -7$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der Geraden g_1, g_2, g_3 mit der Geraden g einen rechten Winkel einschließen, und begründen Sie Ihre Antwort!

Leitfrage:

Geben Sie an, welche der vier gegebenen Geraden identisch sind, und begründen Sie Ihre Antwort!

Geben Sie an, wie die Werte von a_1 und b_2 (mit $a_1, b_2 \in \mathbb{R}$) der Geraden $h\colon X = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, damit g und h genau einen Schnittpunkt haben!
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Geraden g_1 und g_2 schließen mit g einen rechten Winkel ein.

Mögliche Begründung:
Der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ von g ist zugleich ein Normalvektor von g_1 und g_2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn angegeben wird, dass ausschließlich g_1 und g_2 mit g einen rechten Winkel einschließen, und dies auch (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Begründungen anhand entsprechender Skalarprodukte bzw. anhand von Skizzen sind ebenfalls zulässig.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Geraden g und g_3 sind identisch.

Mögliche Begründung:
Beide Geraden haben den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P = (2|3)$ liegt auf beiden Geraden.

Damit g und h genau einen Schnittpunkt haben, müssen sie unterschiedliche Steigungen haben, d. h., es muss $b_2 \neq \frac{1}{3}$ gelten. Da a_1 nur die Position des Schnittpunkts bestimmt, nicht aber seine Existenz, kann für a_1 jede reelle Zahl gewählt werden.

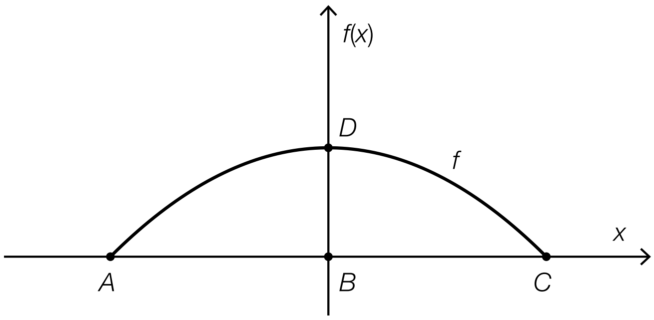
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn angegeben wird, dass g_3 und g identisch sind, und dies korrekt begründet wird.
Weiters sind Bedingungen für die Werte a_1 und b_2 richtig anzugeben und es ist deren Wahl zu begründen.
Falls für a_1 und b_2 konkrete richtige Werte genannt werden, ist der Punkt zu vergeben.

Aufgabe 2

Brückenbogen

In der nachstehenden Abbildung ist ein Brückenbogen dargestellt. Die Strecke AC mit dem Mittelpunkt B hat eine Länge von 40 Metern, die maximale Höhe BD des Brückenbogens beträgt 10 Meter.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), mit der der Verlauf des beschriebenen Brückenbogens modelliert werden kann, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Damit auch größere Fahrzeuge unter so einem Brückenbogen durchfahren können, soll die Höhe BD vergrößert werden. Erklären Sie, ob man die Parameter a und b der Modellierungsfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dabei jeweils größer, kleiner oder gleich wählen muss, wenn der Abstand AC unverändert bleiben soll!

Wenn der Punkt A als Koordinatenursprung gewählt wird, muss zur Modellierung eine Funktion g mit $g(x) = c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ ($c, d, e \in \mathbb{R}$) herangezogen werden.

Setzen Sie „<“, „>“ oder „=“ so ein, dass die Aussagen über c, d und e für die gewählte Funktion g zutreffen!

c ___ 0; d ___ 0; e ___ 0

Lösung zur Aufgabe 2

Brückenbogen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:
$D = (0|10) \Rightarrow b = 10$

Die Nullstelle von f liegt bei $x = 20$ (bzw. -20).
$f(20) = 0 \Rightarrow 0 = 400 \cdot a + 10 \Rightarrow a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$

$f(x) = -0{,}025 \cdot x^2 + 10$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Wenn die Höhe BD vergrößert wird, wird der Parameter b größer. Da die Nullstellen unverändert bleiben, muss der Parameter a kleiner werden.

$c < 0$; $d > 0$; $e = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Änderung beider Parameter (sinngemäß) korrekt erklärt wird und die jeweils korrekten Zeichen eingesetzt werden.

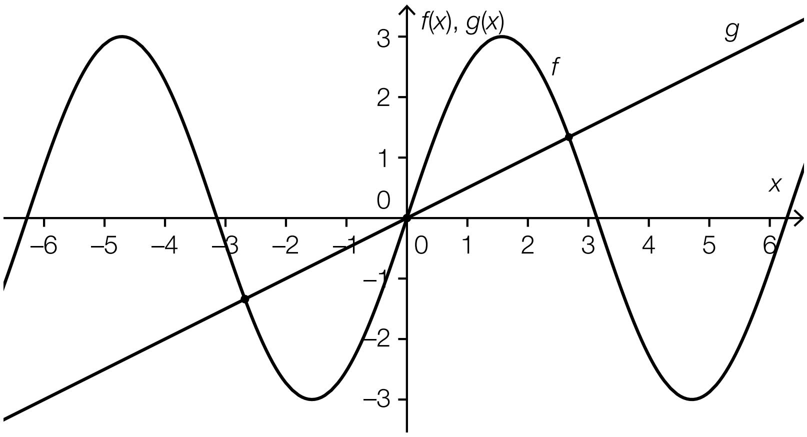
Aufgabe 3

Funktionen

Gegeben sind die Gleichungen und Graphen der Funktionen f und g mit:

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g(x) = \frac{x}{2}$



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diejenige Stelle x_1 im Intervall $[0; \pi]$, für die $f'(x_1) = g'(x_1)$ gilt, und erklären Sie, wie man diese Stelle grafisch ermitteln kann!

Leitfrage:

Die Gleichung $f(x) = g(x)$ hat für x drei Lösungen a, 0 und c mit $a < 0 < c$.

Stellen Sie den Wert des Terms $\int_0^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ in der oben stehenden Abbildung grafisch dar!

Geben Sie den Wert des Terms $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ an!

Lösung zur Aufgabe 3

Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

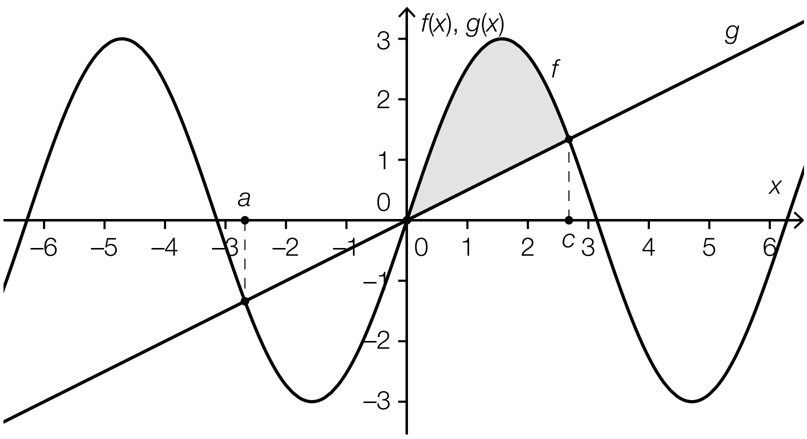
$3 \cdot \cos(x_1) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 \approx 1{,}4$

Der Wert von x_1 beschreibt diejenige Stelle (im Intervall $[0; \pi]$), an der die Steigung der Geraden mit der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f übereinstimmt. Verschiebt man die Gerade g so, dass sie den Graphen von f im Intervall $[0; \pi]$ berührt, erhält man diesen Wert als x-Koordinate des Berührpunkts.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn x_1 korrekt berechnet und seine grafische Ermittlung (sinngemäß) korrekt erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Der Wert des Terms $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ ist null.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die gesuchte Fläche dargestellt und der Wert des Integrals $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ korrekt angegeben wird.

Aufgabe 4

Reaktionszeiten

Eine Testperson ermittelt ihre Reaktionszeit (in s) mithilfe eines Online-Tests, den sie zehnmal ausführt, und erzielt dabei die nachstehenden Werte:

0,38 s; 0,27 s; 0,30 s; 0,34 s; 0,25 s; 0,39 s; 0,28 s; 0,24 s; 0,33 s; 0,32 s

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie das arithmetische Mittel $\bar{t}$ der zehn angegebenen Zeiten sowie die Standardabweichung s!

Geben Sie an, wie viel Prozent der angegebenen Reaktionszeiten sich im Intervall $[\bar{t} - s; \bar{t} + s]$ befinden!

Leitfrage:

Die Testperson führt noch zwei weitere Male diesen Test aus und erreicht dabei die Zeiten t_{11} und t_{12} mit $t_{11} \neq t_{12}$. Das arithmetische Mittel, das nun aus allen zwölf Zeiten gebildet wird, wird mit $\bar{t}_{neu}$, die daraus resultierende Standardabweichung mit s_{neu} bezeichnet.

Geben Sie an, welche Bedingungen die Zeiten t_{11} und t_{12} erfüllen müssen, damit $\bar{t}_{neu} = \bar{t}$ und $s_{neu} < s$ gilt!

Lösung zur Aufgabe 4

Reaktionszeiten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\bar{t} = 0{,}31$
$s \approx 0{,}05$
$[\bar{t} - s; \bar{t} + s] \approx [0{,}26; 0{,}36]$

Im angegebenen Intervall befinden sich 6 Reaktionszeiten, das sind 60 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und der gesuchte Prozentsatz korrekt angegeben werden.

Toleranzintervalle:
für die Standardabweichung: [0,048; 0,052]
für die untere Intervallgrenze: [0,258; 0,262]
für die obere Intervallgrenze: [0,358; 0,362]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die neuen Werte müssen symmetrisch zum arithmetischen Mittel $\bar{t}$ liegen, also $\frac{t_{11} + t_{12}}{2} = \bar{t}$ betragen.

Wenn die neuen Werte im Intervall $(\bar{t} - s; \bar{t} + s)$ liegen, dann gilt $s_{\text{neu}} < s$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die gesuchten Bedingungen für die Zeiten t_{11} und t_{12} (sinngemäß) korrekt angegeben werden. Dabei ist eine Aussage der Form, dass die Werte t_{11} und t_{12} in der Nähe des arithmetischen Mittels liegen müssen, als Begründung für $s_{\text{neu}} < s$ zu akzeptieren.

Aufgabe 5

Lotterie

Bei 100 Losen gibt es 30 Gewinnlose („Treffer"), darunter sind 25 Lose zu je € 10 Gewinn und fünf Lose zu je € 100 Gewinn.

Aufgabenstellung:

Aus diesen 100 Losen werden drei Lose zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit diesen drei Losen kein Treffer erzielt wird, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Jemand bekommt aus diesen 100 Losen ein zufällig ausgewähltes Los geschenkt.
Geben Sie den Erwartungswert für den Gewinn an!

Eine andere Person bekommt aus diesen 100 Losen zwei zufällig ausgewählte Lose geschenkt.
Geben Sie einen Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass diese Person € 110 Gewinn erzielt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Lotterie

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Keinen Treffer zu erzielen bedeutet, dass man aus den restlichen 70 Losen drei Lose ohne Zurücklegen zieht.

$\frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \approx 0{,}3385 = 33{,}85\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.
Toleranzintervall für die Wahrscheinlichkeit: [33 %; 34 %]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{25}{100} \cdot 10 + \frac{5}{100} \cdot 100 = 7{,}5$

Der Erwartungswert für den Gewinn beträgt € 7,50.

€ 110 Gewinn bedeutet, dass man bei zwei Losen einen Treffer zu € 10 und einen Treffer zu € 100 erzielt.

möglicher Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $2 \cdot \frac{25 \cdot 5}{100 \cdot 99}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gewinnerwartung und der gesuchte Ausdruck korrekt angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.
Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.