Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zwei Türme

Auf einem waagrechten Platz stehen 100 m voneinander entfernt zwei senkrechte Türme. Der höhere Turm ist 80 m hoch, der niedrigere Turm ist 60 m hoch.

Je nach Einfallswinkel der Sonnenstrahlen sind die Schatten, die die beiden Türme werfen, unterschiedlich lang. Als Einfallswinkel der Sonnenstrahlen wird derjenige Winkel bezeichnet, den die Sonnenstrahlen mit der waagrechten Ebene einschließen.

Aufgabenstellung:

Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht die Sonne so am Himmel, dass der Schatten, den der höhere Turm wirft, genau bis zum Fußpunkt des niedrigeren Turms reicht.

Geben Sie an, wie groß der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen in diesem Fall sein muss!

Leitfrage:

Man vergleicht die Länge des Schattens S_{H} des höheren Turms in der Ebene mit der Länge des Schattens S_{N} des niedrigeren Turms in der Ebene.

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{S_{\mathrm{H}}}{S_{\mathrm{N}}}$ und zeigen Sie, dass dieses Verhältnis vom Einfallswinkel der Sonnenstrahlen unabhängig ist!

Lösung zur Aufgabe 1

Zwei Türme

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha) = \frac{80}{100} = 0{,}8 \;\Rightarrow\; \alpha \approx 38{,}66°$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Winkel richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$S_H = \frac{80}{\tan(\alpha)};\; S_N = \frac{60}{\tan(\alpha)} \;\Rightarrow\; \frac{S_H}{S_N} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$

Bei der Division $S_H : S_N$ fällt $\tan(\alpha)$ weg und somit ist $\frac{S_H}{S_N}$ vom Einfallswinkel unabhängig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Verhältnis richtig berechnet und eine korrekte Erklärung angegeben wird.

Aufgabe 2

Formel

Gegeben ist die Formel $E = \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ mit $a, b, d \in \mathbb{R}_0^+$ und $c \in \mathbb{R}^+$.

Diese Formel kann als Darstellung einer Funktion E in Abhängigkeit von einer der Variablen a, b, c oder d interpretiert werden, sofern die anderen drei Variablen mit Werten belegt und somit konstant sind.

Aufgabenstellung:

Bei der Funktion E_d mit $d \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ handelt es sich um eine lineare Funktion. Geben Sie für diese lineare Funktion die Steigung des Graphen und seinen Schnittpunkt S mit der senkrechten Achse an!

$k =$ ____

$S = ($ _____ | _____ $)$

Leitfrage:

Für die Bearbeitung der nachstehenden Fragestellung gilt: $d = 0$.

E_a: $a \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

E_b: $b \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

E_c: $c \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

Geben Sie jeweils den Funktionstyp der reellen Funktionen E_a, E_b und E_c an und skizzieren Sie für jede dieser Funktionen einen möglichen Graphen!

Lösung zur Aufgabe 2

Formel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$k = 1$ und $S = \left(0 \middle| \frac{a \cdot b^2}{c}\right)$

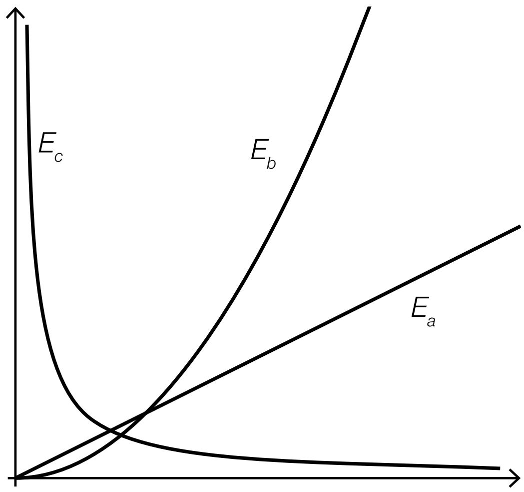
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn k und S korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

E_a ist eine (homogene) lineare Funktion.
E_b ist eine Potenzfunktion der Form $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z = 2$ (quadratische Funktion).
E_c ist eine Potenzfunktion der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ (gebrochen rationale Funktion).

Mögliche Skizze:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Funktionstypen korrekt angegeben und jeweils mögliche Graphen korrekt skizziert werden.
Die Graphen der Funktionen E_a und E_b müssen jedenfalls durch den Ursprung verlaufen und E_c darf keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen aufweisen.

Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Von einer Exponentialfunktion f ist die nachstehende Wertetabelle gegeben:

x	0	1	3	5
$f(x)$		12	3	

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die beiden fehlenden Funktionswerte und geben Sie die Funktionsgleichung von f in der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ an!

Leitfrage:

Zusätzlich zu der in der Aufgabenstellung angegebenen Form $f(x) = a \cdot b^x$ ist auch die Schreibweise $f(x) = c \cdot e^{d \cdot x}$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $d \in \mathbb{R}, d \neq 0$) gebräuchlich.

Geben Sie an, wie die Parameter a, b, c, d der beiden (Darstellungs-)Formen zusammenhängen! Erklären Sie die Wirkung der Parameterwerte c und d auf die Monotonie der Funktion!

Lösung zur Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

x	0	1	3	5
$f(x)$	24	12	3	0,75

$f(x) = 24 \cdot 0{,}5^x$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Funktionswerte richtig ergänzt werden und eine korrekte Funktionsgleichung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gelten folgende Zusammenhänge:
$a = c$
$b = e^d$ bzw. $d = \ln(b)$

Der Parameter c bestimmt den Schnittpunkt des Graphen mit der senkrechten Achse.
Da $c \in \mathbb{R}^+$ ist, gilt: Der Graph von f ist (streng) monoton steigend, falls $d > 0$ ist.
Der Graph von f ist (streng) monoton fallend, falls $d < 0$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Zusammenhänge zwischen den Parametern korrekt angegeben werden und die Wirkung der Parameter c und d der Lösungserwartung entsprechend erklärt wird.

Aufgabe 4

Zurückgelegter Weg

Ein Fahrzeug wird im Zeitintervall [0; 10] aus dem Stand gleichmäßig beschleunigt. Dabei beschreibt $v(t)$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs (in m/s) zum Zeitpunkt t (in s).

Aufgabenstellung:

Mit welchem der nachstehenden Terme kann die Länge des im Zeitintervall [0; 10] zurückgelegten Weges näherungsweise berechnet werden? Geben Sie denjenigen Term an, der am besten geeignet ist, und begründen Sie, warum die anderen beiden Terme nicht geeignet sind.

a) $v(0) \cdot 10$

b) $[v(0) + v(2) + v(4) + v(6) + v(8)] \cdot 2$

c) $[v(0) + v(1) + v(2) + ... + v(8) + v(9)] \cdot 10$

Leitfrage:

Geben Sie an, ob der im Zeitintervall [0; 10] vom Fahrzeug tatsächlich zurückgelegte Weg kleiner oder größer als der am besten geeignete Näherungswert aus der Aufgabenstellung ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, mit der der Näherungswert für den zurückgelegten Weg verbessert werden kann, und geben Sie einen Ausdruck unter Verwendung von $v(t)$ zur Berechnung des exakten Wertes an!

Lösung zur Aufgabe 4

Zurückgelegter Weg

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Begründungen:

a) Der Term ist nicht geeignet, weil das Fahrzeug aus dem Stand beschleunigt wird, also $v(0) = 0$ gilt. Somit ist auch der Näherungswert für den zurückgelegten Weg gleich null.

b) Der Term ist geeignet, da das Zeitintervall [0; 10] in fünf Intervalle der Länge 2 unterteilt wird und die fünf Näherungswerte für den zurückgelegten Weg in diesen Intervallen aufsummiert werden.

c) Der Term ist nicht geeignet. Da das Zeitintervall [0; 10] in zehn Intervalle der Länge 1 unterteilt wird, müsste jeder Geschwindigkeitswert mit dem Faktor 1 (nicht 10) multipliziert werden, um die zurückgelegte Weglänge zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jeden Term richtig begründet wird, warum er für die näherungsweise Berechnung des zurückgelegten Weges geeignet bzw. nicht geeignet ist.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der im Intervall [0; 10] zurückgelegte Weg ist größer als der durch Term b berechnete Näherungswert, da in allen Teilintervallen die Geschwindigkeit zu Beginn des Intervalls für die Berechnung der Weglänge verwendet wird. Da das Fahrzeug gleichmäßig beschleunigt wird, nimmt die Geschwindigkeit in jedem der fünf Teilintervalle zu. (Der gegebene Ausdruck entspricht somit der „Untersumme".)

In je mehr (gleich lange) Teilintervalle das Intervall [0; 10] unterteilt wird, desto genauer wird der Näherungswert für den zurückgelegten Weg.
möglicher Ausdruck: $\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt begründet wird, warum der tatsächlich zurückgelegte Weg größer als der durch Term b berechnete Näherungswert ist. Weiters ist eine korrekte Vorgehensweise zur Verbesserung des Näherungswertes zu beschreiben und ein korrekter Ausdruck anzugeben.

Aufgabe 5

Therapieverfahren

Ein medizinisches Therapieverfahren ist im Durchschnitt in vier von fünf Fällen erfolgreich.
Zehn Patienten werden mit diesem Verfahren unabhängig voneinander behandelt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie unter Verwendung der Binomialverteilung einen Term zur Berechnung derjenigen Wahrscheinlichkeit an, dass bei mindestens acht Patienten die Therapie erfolgreich ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Mit den nachstehenden Termen können Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen im gegebenen Kontext berechnet werden:

- $0{,}2^{10}$
- $\binom{10}{2} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2$
- $1 - [0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}]$

Formulieren Sie für jeden dieser Terme ein entsprechendes Ereignis!

Lösung zur Aufgabe 5

Therapieverfahren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wahrscheinlichkeit, dass die Therapie bei mindestens 8 Patienten erfolgreich ist:
P(„8 Erfolge") + P(„9 Erfolge") + P(„10 Erfolge")

$0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot \binom{10}{8} + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

- $0{,}2^{10}$
  Die Therapie ist bei keinem der 10 Patienten erfolgreich.
- $\binom{10}{2} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2$
  Die Therapie ist bei genau 8 Patienten erfolgreich (bzw. bei genau 2 Patienten nicht erfolgreich).
- $1 - [0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}]$
  Die Therapie ist bei höchstens 8 Patienten erfolgreich.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jeden der drei Terme ein entsprechendes Ereignis formuliert wird.