Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Berechnungen mit Vektoren

Gegeben sind Zahlen und Vektoren. Es gilt:
$a \in \mathbb{R};\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2;\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke (wohl-)definiert sind:

$a - \vec{x} \cdot \vec{y}$

$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v}$

$\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{v})$

Erklären Sie zu jedem (wohl-)definierten Ausdruck, welche Art von Ergebnis vorliegt!

Leitfrage:

Die beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ y_2 \end{pmatrix}$ beschreiben die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 37{,}5$ Flächeneinheiten. Geben Sie zwei Gleichungen in Abhängigkeit von x_1 und y_2 an, die es ermöglichen, die fehlenden Koordinaten von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zu berechnen, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 1

Berechnungen mit Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Das Ergebnis von $a - \vec{x} \cdot \vec{y}$ ist eine reelle Zahl, da das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ eine reelle Zahl ergibt (und es sich daher um die Differenz zweier reeller Zahlen handelt).

Der Ausdruck $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v}$ ist nicht (wohl-)definiert.

Der Ausdruck $\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{v})$ hat eine reelle Zahl als Ergebnis, da $(a \cdot \vec{v})$ einen Vektor aus $\mathbb{R}^3$ ergibt und es sich daher um ein Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren handelt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig angegeben wird, ob der jeweilige Ausdruck (wohl-)definiert ist, und (sinngemäß) korrekt erklärt wird, welche Art von Ergebnis vorliegt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die beiden Vektoren stehen aufeinander normal, daraus folgt eine Gleichung:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x_1 + 5 \cdot y_2 = 0$$

Aus der Flächenberechnung eines rechtwinkeligen Dreiecks folgt eine zweite Gleichung:
$$\frac{\sqrt{(x_1^2 + 25) \cdot (9 + y_2^2)}}{2} = 37{,}5 \;\Rightarrow\; (x_1^2 + 25) \cdot (9 + y_2^2) = 5\,625$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn zwei korrekte Gleichungen in Abhängigkeit von x_1 und y_2 angegeben werden und eine (sinngemäß) korrekte Vorgehensweise erklärt wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

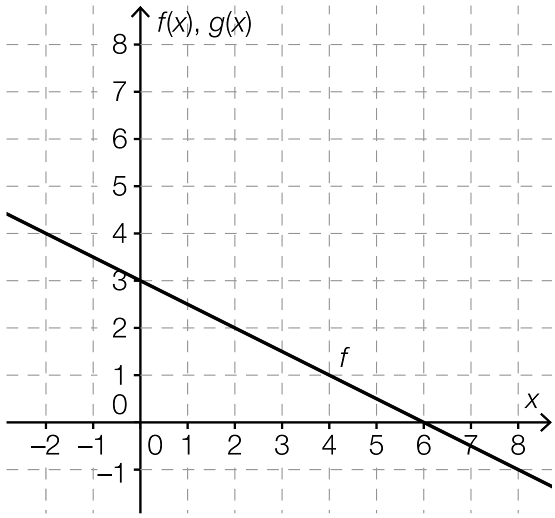
Aufgabe 2

Lineare Funktionen

Gegeben sind der Graph einer Funktion f und die Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + 6$ und $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion g so, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ nicht lösbar ist, und bestimmen Sie für diesen Fall den Wert des Parameters a!



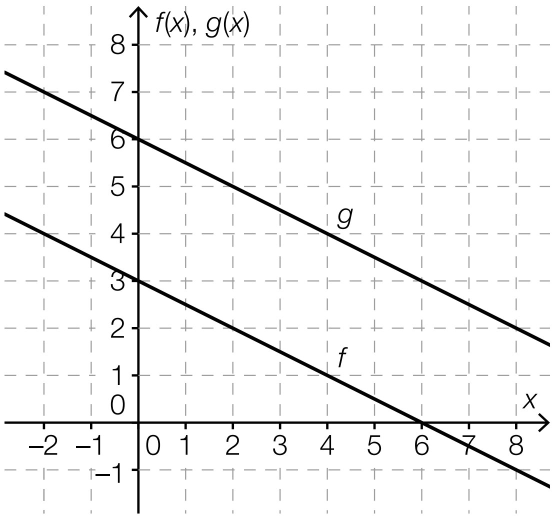
Leitfrage:

Lösen Sie die Gleichung $f(x) = g(x)$ und geben Sie die Lösung in Abhängigkeit von a an!
Geben Sie weiters an, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Lösung positiv ist, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Lineare Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



$a = -\frac{1}{2}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der Graph der Funktion richtig skizziert als auch der Wert des Parameters *a* richtig bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-\frac{1}{2} \cdot x + 3 = a \cdot x + 6$

$2 \cdot a \cdot x + x = -6$

$x = \frac{-6}{2 \cdot a + 1}$

Aus $x > 0$ folgt: $2 \cdot a + 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; a < -\frac{1}{2}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Lösung der Gleichung und eine korrekte Bedingung für *a* angegeben werden sowie eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird!

Aufgabe 3

Bewegungsvorgang

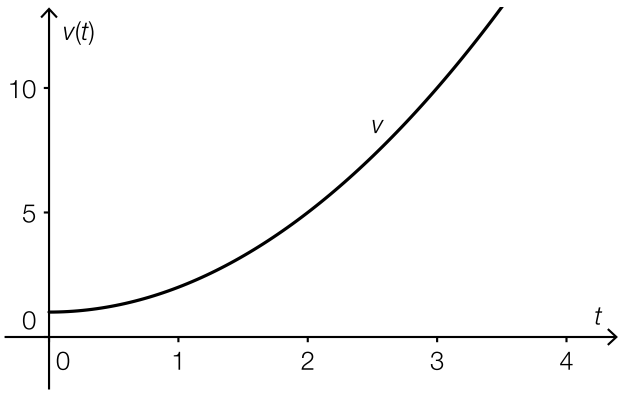
Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t wird durch eine Funktion v beschrieben ($v(t)$ in m/s, t in s).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Terme $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$ im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion v.
Erklären Sie anhand der Abbildung die geometrische Bedeutung von $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$!



Geben Sie an, wie anhand der Abbildung derjenige Zeitpunkt t_1 aus dem Intervall [0; 3] ermittelt werden kann, zu dem gilt:

$v'(t_1) = \frac{v(2) - v(0)}{2}$

Lösung zur Aufgabe 3

Bewegungsvorgang

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v'(2)$ gibt die (momentane) Beschleunigung (in m/s²) des Körpers zum Zeitpunkt $t = 2$ an.
$\frac{v(2) - v(0)}{2}$ gibt die mittlere Beschleunigung (in m/s²) des Körpers im Intervall [0; 2] an.

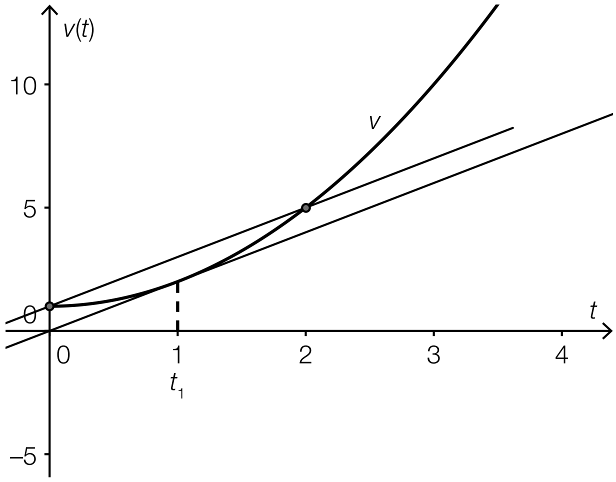
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Terme im gegebenen Kontext (sinngemäß) korrekt interpretiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v'(2)$ beschreibt die Steigung der Tangente an den Graphen von v an der Stelle $t = 2$.
$\frac{v(2) - v(0)}{2}$ gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(0|v(0))$ und $(2|v(2))$ an.

Der Ausdruck $v'(t_1) = \frac{v(2) - v(0)}{2}$ beschreibt, dass die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t_1 gleich der mittleren Beschleunigung im Intervall [0; 2] ist. Somit ist t_1 derjenige Wert, für den die Tangente an den Graphen von v parallel zur Sekante durch die Punkte $(0|v(0))$ und $(2|v(2))$ ist.



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die geometrische Bedeutung von $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$ anhand der Abbildung richtig erklärt wird und korrekt erklärt wird, wie der Zeitpunkt t_1 ermittelt werden kann.

Aufgabe 4

Abbau eines Wirkstoffes

Die Entwicklung der Konzentration $c(t)$ (in mg/L) eines Arzneimittelwirkstoffes im Blut t Stunden nach der Einnahme kann durch die Gleichung $c(t + 1) - c(t) = -0{,}12 \cdot c(t)$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die angeführte Differenzengleichung im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Die Wirkstoffkonzentration $d(t)$ eines anderen Wirkstoffes nimmt pro Stunde konstant um 15 mg/L ab.

Geben Sie eine Differenzengleichung an, die diese Entwicklung der Wirkstoffkonzentration d beschreibt!

Geben Sie an, welche Funktionstypen jeweils zur Beschreibung der Entwicklung der Wirkstoffkonzentrationen c und d herangezogen werden können, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Lösung zur Aufgabe 4

Abbau eines Wirkstoffes

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut nimmt pro Stunde um 12 % (der zu Beginn dieser Stunde vorhandenen Menge) ab.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die angeführte Differenzengleichung im gegebenen Kontext korrekt interpretiert wird, wobei jedenfalls erwähnt werden muss, dass es sich um eine relative Abnahme der Wirkstoffkonzentration pro Stunde handelt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$d(t + 1) - d(t) = -15$

Die Entwicklung der Wirkstoffkonzentration d kann durch eine lineare Funktion beschrieben werden, da die Abnahme der Wirkstoffkonzentration pro Stunde konstant ist.
Die Entwicklung der Wirkstoffkonzentration c kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, da die Abnahme der Wirkstoffkonzentration pro Stunde um denselben Prozentsatz erfolgt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Differenzengleichung angegeben wird (äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten) und den beiden Wirkstoffkonzentrationen c und d jeweils der korrekte Funktionstyp unter Angabe (sinngemäß) korrekter Begründungen zugeordnet wird.

Aufgabe 5

Würfel

Die Seitenflächen eines „fairen" sechsflächigen Würfels sind mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 beschriftet.
(Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

Bei einem Zufallsversuch wird dieser Würfel einmal geworfen.

Geben Sie den Grundraum A dieses Zufallsversuchs an und bestimmen Sie die Ereignismenge B für den Fall, eine Primzahl zu würfeln, und erklären Sie die beiden Begriffe „Grundraum" und „Ereignis"!

$A =$ ____

$B =$ ____

Geben Sie weiters die Wahrscheinlichkeit an, bei einmaligem Würfeln die Zahl 7 zu erhalten, und erklären Sie, welches besondere Ereignis in diesem Fall vorliegt!

Leitfrage:

Der Würfel wird n-mal geworfen.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P an, bei diesem Zufallsversuch mindestens einmal eine gerade Zahl zu würfeln!

$P =$ ____

Berechnen Sie weiters, wie oft ein Würfel geworfen werden muss, damit diese Wahrscheinlichkeit P mindestens 99 % beträgt!

Lösung zur Aufgabe 5

Würfel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

Bei der Menge A (Grundraum) handelt es sich um die Menge aller möglichen Versuchsausgänge.

Bei der Menge B (Ereignis) handelt es sich um die Menge der günstigen Versuchsausgänge.

Die Wahrscheinlichkeit, eine 7 zu würfeln, beträgt null, da es sich hierbei um ein unmögliches Ereignis handelt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Grundraum A und das Ereignis B richtig angegeben und (sinngemäß) korrekt erklärt werden sowie die Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P = 1 - 0{,}5^n$

$0{,}99 \leq 1 - 0{,}5^n$
$n \geq 6{,}64...$
Der Würfel muss mindestens 7-mal geworfen werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term und die richtige Anzahl korrekt angegeben werden. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.