Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Gewinnschwelle

Gegeben sind die Gleichungen einer Kostenfunktion K und einer Erlösfunktion E mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

$K(x) = a \cdot x + b$
$E(x) = c \cdot x$

In der Kostenfunktion beschreibt x die Anzahl der produzierten Einheiten, in der Erlösfunktion beschreibt x die Anzahl der verkauften Einheiten.

Aufgabenstellung:

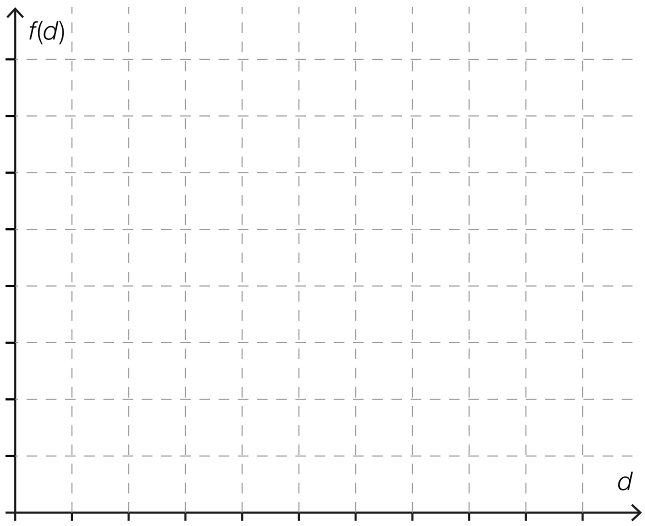
Die Stelle x_1 bezeichnet die Gewinnschwelle. Das ist diejenige Mengeneinheit, die produziert (und verkauft) werden muss, damit $K(x_1) = E(x_1)$ gilt. Geben Sie einen Term zur Berechnung von x_1 in Abhängigkeit von a, b und c an!

$x_1 =$ ______________________________

Leitfrage:

Deuten Sie die Parameter a, b und c im gegebenen Kontext!

Fassen Sie weiters x_1 als Funktion f in Abhängigkeit von der Differenz d mit $d = c - a$ auf.
Geben Sie den Funktionstyp von f an und skizzieren Sie einen möglichen Graphen in das nachstehende Koordinatensystem!



Lösung zur Aufgabe 1

Gewinnschwelle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$K(x_1) = E(x_1)$

$a \cdot x_1 + b = c \cdot x_1$

$x_1 = \dfrac{b}{c - a}$

Lösungsschlüssel:

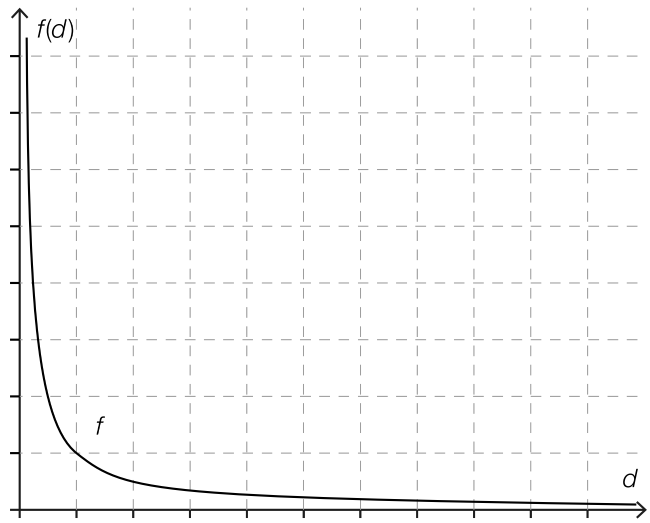
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Parameter *a* beschreibt die zusätzlichen (variablen) Kosten, die pro Stück anfallen.

Der Parameter *b* beschreibt die Fixkosten.

Der Parameter *c* beschreibt den Verkaufspreis pro Stück.



Die Funktion *f* ist eine Potenzfunktion $\left(\text{vom Typ } f(x) = \frac{a}{x}, \text{ beschreibt eine indirekte Proportionalität}\right)$.

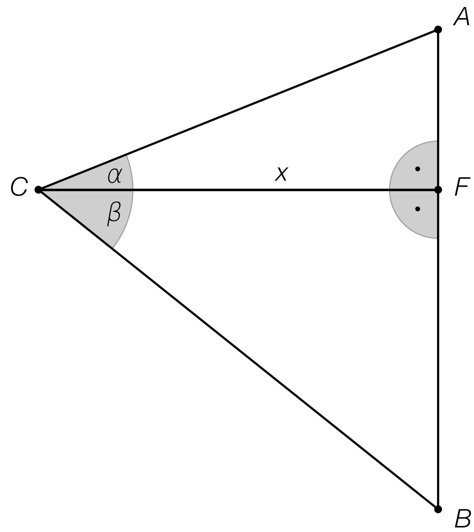
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Parameter (sinngemäß) korrekt gedeutet werden sowie die Funktion *f* als Potenzfunktion (gebrochen rationale Funktion) erkannt und als solche skizziert wird.

Aufgabe 2

Dreiecke

Die nachstehende Grafik zeigt zwei aneinanderliegende rechtwinkelige Dreiecke.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie für $x = 8$ m und $\overline{AC} = 10$ m die Größe des Winkels α!

Beschreiben Sie weiters, wie man die Größe des Winkels α berechnen kann, wenn $\overline{AF}$ anstelle von $\overline{AC}$ angegeben ist!

Leitfrage:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $\overline{AB}$ in Abhängigkeit von x, α und β an!

Geben Sie konkret an, wie sich $\overline{AB}$ verändert, wenn x verfünffacht wird und die beiden Winkel α, β unverändert bleiben! Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zur Aufgabe 2

Dreiecke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\cos(\alpha) = \frac{x}{\overline{AC}}$

$\alpha \approx 36{,}87°$

Ist $\overline{AF}$ anstelle von $\overline{AC}$ angegeben, so kann man den Winkel α mithilfe der Tangensfunktion ermitteln:

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{x}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Größe des Winkels α richtig berechnet wird und im Fall der Angabe von $\overline{AF}$ eine korrekte Beschreibung angeführt wird.
Toleranzintervall: [36°; 37°]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{x}$

$\tan(\beta) = \frac{\overline{BF}}{x}$

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = x \cdot (\tan(\alpha) + \tan(\beta))$

Da zwischen x und $\overline{AB}$ eine direkte Proportionalität besteht, führt eine Verfünffachung von x auch zu einer Verfünffachung von $\overline{AB}$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel zur Berechnung von $\overline{AB}$ ermittelt wird sowie angegeben wird, dass eine Verfünffachung von x eine Verfünffachung von $\overline{AB}$ bewirkt, und dieser Sachverhalt (sinngemäß) korrekt begründet wird. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Wirkstoffkonzentration

Die Konzentration $c(t)$ eines Wirkstoffes im Blut t Stunden nach der Einnahme eines Arzneimittels kann durch die Gleichung $c(t) = c(0) \cdot 0{,}85^t$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Gleichung $c(t_1) = 0{,}7 \cdot c(0)$ im gegebenen Zusammenhang und berechnen Sie t_1!

Leitfrage:

Skizzieren Sie einen zur Aufgabenstellung passenden Graphen und erläutern Sie für die berechnete Zeit t_1, wie sich die absoluten und relativen (prozentuellen) Änderungen der Wirkstoffkonzentration in den Intervallen $[0; t_1]$, $[t_1; 2t_1]$ und $[2t_1; 3t_1]$ jeweils entwickeln!

Lösung zur Aufgabe 3

Wirkstoffkonzentration

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Interpretationen:

Nach t_1 Stunden sind nur mehr 70 % der Anfangskonzentration im Blut vorhanden.

oder:

Nach t_1 Stunden vermindert sich die Anfangskonzentration um 30 %.

$0{,}7 \cdot c(0) = c(0) \cdot 0{,}85^{t_1}$

$t_1 = \frac{\ln(0{,}7)}{\ln(0{,}85)} \approx 2{,}2 \;\Rightarrow\; t_1 \approx 2{,}2$ Stunden

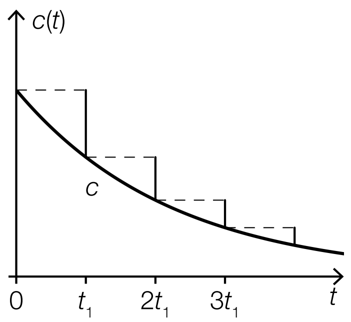
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung korrekt interpretiert und t_1 richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die absoluten Änderungen (Abnahmen) werden bei gleichbleibender Intervalllänge mit zunehmender Zeit immer geringer.
Die prozentuellen Änderungen sind in allen drei Zeitintervallen gleich groß (da die Intervalle gleich lang sind).

Mögliche grafische Darstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein Graph, der die Form einer (streng monoton fallenden) Exponentialfunktion haben muss, skizziert wird und die Änderungen (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechend erläutert werden.

Aufgabe 4

Polynomfunktion vierten Grades

Für eine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion f vierten Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + x^2 + c$ gilt: $a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie für $a = 1$ die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 2$ und erklären Sie, warum die Angabe des Wertes c für die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht erforderlich ist!

Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung an, mit deren Hilfe man für alle $a > 0$ die Wendestellen berechnen kann, und schließen Sie anhand dieser Gleichung auf die Anzahl der Wendestellen der Funktion f!

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion vierten Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = x^4 + x^2 + c$
$f'(x) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x$
$f'(2) = 36 \quad \Rightarrow$ Die Steigung der Tangente an dieser Stelle beträgt 36.

Mögliche Erklärung:
Beim Ableiten der Funktion f fällt c weg. Die Kenntnis des genauen Wertes ist somit für die Berechnung des Anstiegs nicht erforderlich.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert der Steigung richtig ermittelt wird und eine korrekte Erklärung, warum die Angabe des Wertes c nicht erforderlich ist, angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = a \cdot x^4 + x^2 + c$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2$

Die Gleichung $12 \cdot a \cdot x^2 + 2 = 0$ hat für $a > 0$ keine reellen Lösungen, daher hat die Funktion f keine Wendestellen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben wird und daraus geschlossen wird, dass die Funktion f keine Wendestellen hat.

Aufgabe 5

Haarausfall

Laut einem Zeitungsartikel zeigt jeder dritte Mann, der über 30 Jahre alt ist, Anzeichen von Haarausfall.

Ein Shampoo-Hersteller bewirbt sein neues Produkt, das Haarausfall angeblich verhindern soll. Der Hersteller wählt 5 000 Männer, die über 30 Jahre alt sind, nach dem Zufallsprinzip aus, um sie für sein neues Produkt zu interessieren, und bietet diesen Männern eine Gratis-Probe des neuen Produkts an.

Aufgabenstellung:

Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der ausgewählten Männer, die tatsächlich bereits Anzeichen von Haarausfall haben.

Begründen Sie, warum X binomialverteilt ist, und geben Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X an (unter der Annahme, dass die im Zeitungsartikel genannten Zahlen den Tatsachen entsprechen)!

Leitfrage:

Von den 5 000 zufällig ausgewählten Männern sind 374 an diesem Produkt prinzipiell interessiert.

Berechnen Sie auf Basis dieser Daten ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den Anteil aller Männer über 30 Jahre, die an dem neuen Produkt prinzipiell interessiert sind!

Geben Sie an, wie viele der 5 000 zufällig ausgewählten Männer an diesem Produkt prinzipiell interessiert sein müssen, damit sich ein Konfidenzintervall maximaler Breite ergibt!

Lösung zur Aufgabe 5

Haarausfall

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Jeder der ausgewählten Männer hat entweder „Anzeichen von Haarausfall“ oder „keine Anzeichen von Haarausfall“, d. h., es gibt genau zwei mögliche Versuchsausgänge, die unabhängig voneinander mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Zufallsvariable X ist daher binomialverteilt.

$\mu = n \cdot p = 5\,000 \cdot \frac{1}{3} \approx 1\,666{,}7$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{5\,000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 33{,}33$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt begründet wird, warum X binomialverteilt ist, und μ und σ richtig angegeben werden.
Toleranzintervall für μ: [1 666; 1 670]
Toleranzintervall für σ: [33; 34]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$h = \frac{374}{5\,000} = 0{,}0748$

$0{,}0748 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}0748 \cdot 0{,}9252}{5\,000}} \approx 0{,}0748 \pm 0{,}0073$

95-%-Konfidenzintervall: [0,0675; 0,0821] = [6,75 %; 8,21 %]

Ein Konfidenzintervall maximaler Breite ergibt sich, wenn 2 500 Männer an diesem Produkt interessiert sind. (In diesem Fall gilt $h = (1 - h) = 0{,}5$, somit ist der Ausdruck $h \cdot (1 - h)$ maximal und damit auch $\sqrt{\frac{h \cdot (1 - h)}{n}}$.)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Konfidenzintervall richtig berechnet und die richtige Anzahl angegeben wird.
Toleranzintervall für die untere Grenze: [0,067; 0,068] bzw. [6,7 %; 6,8 %]
Toleranzintervall für die obere Grenze: [0,081; 0,083] bzw. [8,1 %; 8,3 %]