Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Gegeben sind vier Zahlen und fünf Zahlenmengen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie in der nachstehenden Tabelle für jede Zahl all jene Mengen an, in denen diese Zahl liegt! Begründen Sie für die Zahl π Ihre Entscheidung!

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
-5					
2					
π					
$\sqrt{-9}$					

Leitfrage:

Jede ungerade natürliche Zahl n lässt sich durch den Ausdruck $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ beschreiben.
Es gilt: „Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist wieder eine ungerade Zahl."

Begründen Sie die Gültigkeit dieser Aussage!

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlenmengen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
-5		x	x	x	x
2	x	x	x	x	x
π				x	x
$\sqrt{-9}$					x

Die Zahl π ist irrational.
Irrationale Zahlen sind reelle Zahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können.
Daher sind diese Zahlen nicht in der Menge der natürlichen, ganzen oder rationalen Zahlen enthalten.

Weiters gilt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Zahl π ist somit Element von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die jeweils laut Lösungserwartung richtigen Mengen angekreuzt sind und die Entscheidung für die Zahl π (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründung:

$n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$

Der Term $4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$ gibt eine ungerade Zahl an, da sowohl $4 \cdot k^2$ als auch $4 \cdot k$ gerade Zahlen beschreiben, somit deren Summe gerade ist und die Addition von 1 damit eine ungerade Zahl ergibt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Begründung angegeben wird, wobei aus der angeführten Begründung hervorgehen muss, dass die Aussage für alle ungeraden natürlichen Zahlen gültig ist.

Aufgabe 2

Chemisches Experiment

Bei einem chemischen Experiment wird ein Stoff erwärmt. Der Temperaturverlauf kann mithilfe einer linearen Funktion T_1 modelliert werden. Dabei ist $T_1(t)$ diejenige Temperatur in °C, die t Sekunden nach Beginn des Experiments gemessen wird.

Nachstehend sind drei Messwerte gegeben.

t	1	3	10
$T_1(t)$	2	6	20

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der linearen Funktion T_1 an!

Leitfrage:

Ist die Höchsttemperatur von 100 °C erreicht, so beginnt die Abkühlungsphase. Die Temperaturabnahme kann mithilfe einer linearen Funktion T_2 modelliert werden. Dabei ist $T_2(t)$ diejenige Temperatur in °C, die t Sekunden nach Beginn der Abkühlungsphase gemessen wird.

Geben Sie eine Gleichung der linearen Funktion T_2 an, wenn die Abkühlung doppelt so schnell wie die Erwärmung erfolgt!

Lösung zur Aufgabe 2

Chemisches Experiment

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$T_1(t) = 2 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Funktion T_1 angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$T_2(t) = 100 - 4 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Funktion T_2 angegeben wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

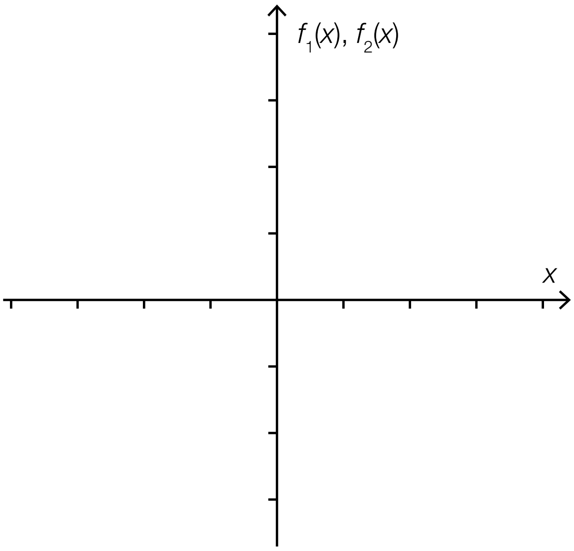
Funktionsgraphen

Für die Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen $f_1(x) = a \cdot c^x$ und $f_2(x) = b \cdot d^x$ gilt:

Die Parameter a, b, c, d sind positive reelle Zahlen mit: $a < b$ und $c > 1$ und $0 < d < 1$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Graphen von f_1 und f_2 und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!



Leitfrage:

Die Funktion f_1 beschreibt die Entwicklung einer Größe in Abhängigkeit von der Zeit.

Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Verdoppelungszeit x_τ der Funktion f_1 her!

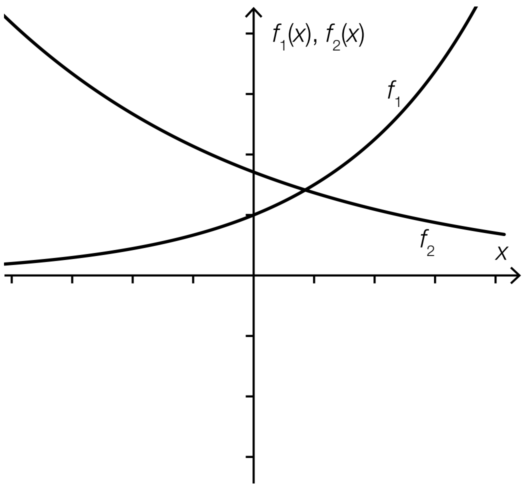
Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist!

a) Eine Halbierung des Parameters a bewirkt immer eine Halbierung der Verdoppelungszeit.
b) Eine Verdoppelung des Parameters c bewirkt immer eine Halbierung der Verdoppelungszeit.

Lösung zur Aufgabe 3

Funktionsgraphen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Die Funktion f_1 ist eine (streng) monoton steigende Exponentialfunktion, da $c > 1$ ist.
Die Funktion f_2 ist eine (streng) monoton fallende Exponentialfunktion, da $0 < d < 1$ gilt.

Die Parameter a und b bestimmen die jeweiligen Schnittpunkte der beiden Graphen mit der senkrechten Achse.
Da $a < b$ gilt, schneidet der Graph von f_1 die senkrechte Achse näher beim Koordinatenursprung als der Graph von f_2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Funktionen mögliche Graphen korrekt skizziert werden und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.
Die Graphen müssen die in der Lösungserwartung genannten Eigenschaften aufweisen und dürfen weder Nullstellen noch lokale Extrema haben.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$2 \cdot a = a \cdot c^{x_\tau}$

$2 = c^{x_\tau}$

$x_\tau = \frac{\ln(2)}{\ln(c)} = \log_c(2)$

Beide Aussagen sind falsch.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel für die Verdoppelungszeit hergeleitet wird und beide Aussagen als falsch erkannt werden.

Aufgabe 4

Integral

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 1$.

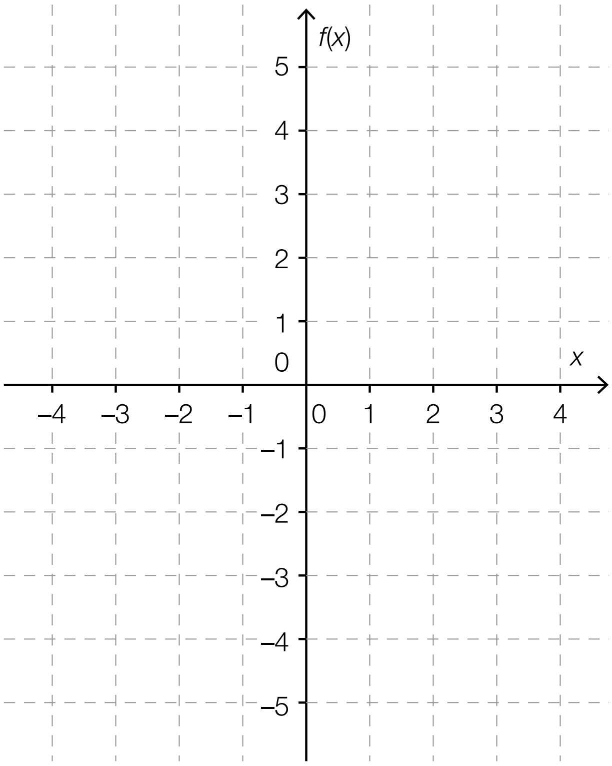
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F der Funktion f an, für die $F(2) = 2$ gilt!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$!

Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion f dar und erklären Sie anhand des Graphen, warum in diesem Fall $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt!



Lösung zur Aufgabe 4

Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Für alle Stammfunktionen gilt: $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + c$

$F(2) = 2 \;\Rightarrow\; c = 1$

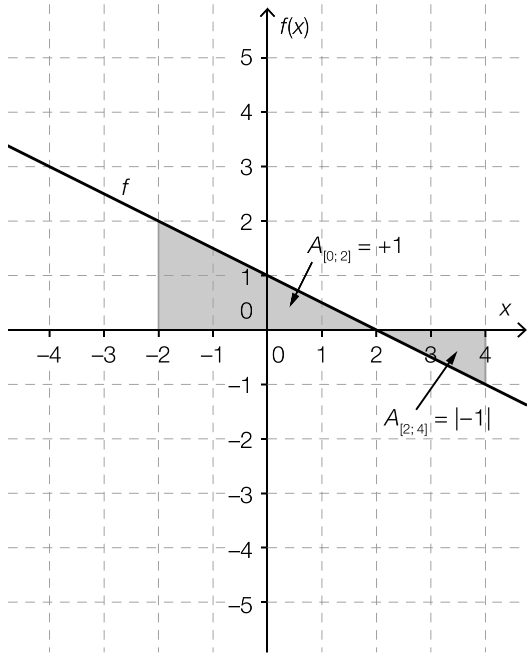
$F(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + 1$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung von F angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$



Mögliche Erklärung:

Die Flächenstücke, die vom Graphen von f mit der x-Achse eingeschlossen werden, sind im Intervall [0; 2] und [2; 4] gleich groß.

Es gilt: $\left.\begin{array}{l} \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\ \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\Rightarrow\; \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel:

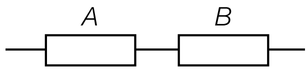
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Integrals korrekt ermittelt, der Graph von f richtig dargestellt und eine korrekte Erklärung, warum $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt, angegeben wird.

Aufgabe 5

Schaltungen

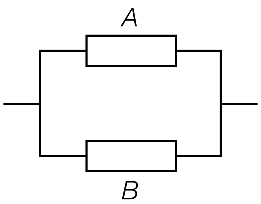
In dieser Aufgabe angegebene Schaltungen bestehen aus Bauteilen vom Typ A und/oder Typ B. Ein Bauteil vom Typ A hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit a und ein Bauteil vom Typ B hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit b, wobei man davon ausgehen kann, dass alle Bauteile unabhängig voneinander funktionieren.

Eine Serienschaltung zweier Bauteile (wie nachstehend abgebildet) funktioniert, wenn beide Bauteile funktionieren.



(Abb. 1)

Eine Parallelschaltung zweier Bauteile (wie nachstehend abgebildet) funktioniert, wenn mindestens einer der beiden Bauteile funktioniert.



(Abb. 2)

Aufgabenstellung:

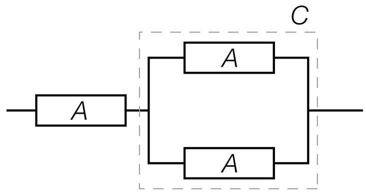
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Serienschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ B (siehe Abb. 1) funktioniert!

Geben Sie weiters einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Parallelschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ B (siehe Abb. 2) funktioniert!

Leitfrage:

Durch eine Parallelschaltung zweier Bauteile vom Typ A entsteht ein Bauteil vom Typ C.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Serienschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ C (siehe Abb. 3) funktioniert, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!



(Abb. 3)

Für den Bauteil vom Typ C gibt Lena folgenden Term an: $a \cdot (1 - a) + (1 - a) \cdot a + a^2$
Geben Sie an, welche Wahrscheinlichkeit durch diesen Term beschrieben wird!

Lösung zur Aufgabe 5

Schaltungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wahrscheinlichkeit, dass die beschriebene Serienschaltung funktioniert:
$(1 - a) \cdot (1 - b)$

Wahrscheinlichkeit, dass die beschriebene Parallelschaltung funktioniert:
$1 - a \cdot b = (1 - a) \cdot b + a \cdot (1 - b) + (1 - a) \cdot (1 - b)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Schaltungen jeweils ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Ein Bauteil vom Typ *A* funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - a$.

Ein Bauteil vom Typ *C* funktioniert, wenn mindestens einer seiner beiden Bauteile vom Typ *A* funktioniert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil vom Typ *C* funktioniert, beträgt daher $1 - a^2$.

Die Serienschaltung der Bauteile vom Typ *A* und vom Typ *C* funktioniert daher mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - a) \cdot (1 - a^2)$.

Durch Lenas Term wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass mindestens einer der beiden Bauteile vom Typ *A* ausfällt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl ein korrekter Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit angegeben und die entsprechende Vorgehensweise (sinngemäß) korrekt erläutert wird als auch korrekt angegeben wird, welche Wahrscheinlichkeit durch Lenas Term beschrieben wird.