Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Steigung

Die Steigung von Straßen wird in Prozent angegeben. Eine Steigung von p % bedeutet beispielsweise, dass auf einer waagrechten Strecke von 100 Metern die Höhe um p Meter zunimmt.

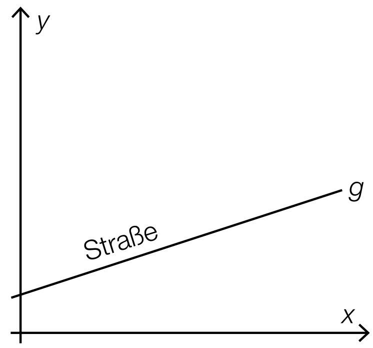
Jeder Steigung p (in %) entspricht ein bestimmter Steigungswinkel α.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen α und p beschreibt!

Leitfrage:

Der geradlinige Verlauf einer ansteigenden Straße kann durch eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ veranschaulicht werden.



Ermitteln Sie den Steigungswinkel α und die Steigung p (in %) der Straße!

Lösung zur Aufgabe 1

Steigung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p = 100 \cdot \tan(\alpha)$ oder $\tan(\alpha) = \frac{p}{100}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Zusammenhang zwischen α und p durch eine korrekte Formel beschrieben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha \approx 11{,}31°$

$p = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Winkel α und die Steigung p (in %) korrekt angegeben werden.

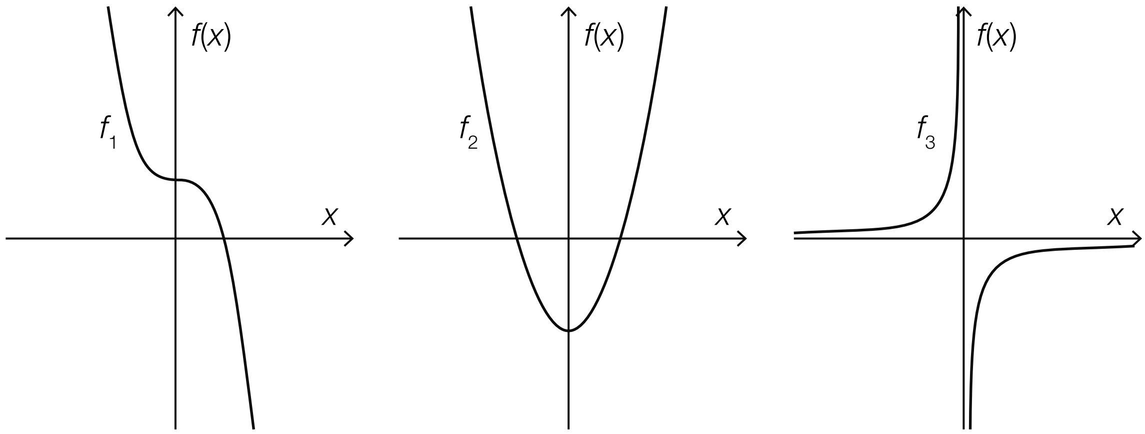
Aufgabe 2

Graphen von Potenzfunktionen

Gegeben sind drei Graphen von Potenzfunktionen mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede der drei Funktionen f_1 bis f_3 einen möglichen Wert für den Exponenten z an!
Geben Sie für jede Funktion an, ob der Parameter b negativ, positiv oder gleich null ist, und begründen Sie Ihre Antwort!



Leitfrage:

Geben Sie für Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a > 0$ an, für welche Werte des Parameters b und für welche Exponenten z folgende Sonderfälle auftreten:

- f beschreibt einen direkt proportionalen Zusammenhang.
- f beschreibt einen indirekt proportionalen Zusammenhang.

Erklären Sie außerdem die Begriffe *direkte Proportionalität* und *indirekte Proportionalität*!

Lösung zur Aufgabe 2

Graphen von Potenzfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

f_1: z ist eine ungerade natürliche Zahl größer als 1.
$b > 0$, da der Graph die positive senkrechte Achse schneidet.

f_2: z ist eine gerade natürliche Zahl größer als 0.
$b < 0$, da die Parabel die negative senkrechte Achse schneidet.

f_3: z ist eine ungerade negative Zahl.
$b = 0$, da sich der Graph asymptotisch der x-Achse nähert.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu vergeben, wenn für alle drei Funktionen ein richtiger Wert für den Exponenten z genannt wird <u>und</u> die Bedingungen für den Parameter b richtig angegeben und (sinngemäß) richtig begründet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

- direkt proportionaler Zusammenhang, falls $b = 0$ und $z = 1$

  In diesem Fall beschreibt die Gleichung $f(x) = a \cdot x$ eine direkte Proportionalität, d. h., das Verhältnis von Funktionswert und Argument ist konstant. Eine Ver-k-fachung des Arguments führt zu einer Ver-k-fachung des Funktionswerts.

- indirekt proportionaler Zusammenhang, falls $b = 0$ und $z = -1$

  In diesem Fall beschreibt die Gleichung $f(x) = a \cdot x^{-1} = \frac{a}{x}$ eine indirekte Proportionalität, d. h., das Produkt aus Argument und Funktionswert ist konstant. Eine Ver-k-fachung des Arguments führt zu einer Teilung des Funktionswerts durch k.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Fälle die Werte für b und z richtig angegeben und die Proportionalitäten richtig erklärt werden.
Die direkte und die indirekte Proportionalität dürfen auch anhand konkreter Zahlenbeispiele (z. B.: $k = 2$) erklärt werden.

Aufgabe 3

Preisänderung

In einem Geschäft wurde ein bestimmtes TV-Gerät zu Beginn des Jahres 2013 zu einem Preis von p_1 angeboten, zwei Jahre später zu einem Preis von p_2.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Terme $p_2 - p_1$ und $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ an!

Leitfrage:

Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\frac{p_2 - p_1}{2}$ im gegebenen Kontext!

Für die Preise p_1 und p_2 gilt folgender Zusammenhang: $\frac{p_2}{p_1} = 0{,}8$.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\frac{p_2 - p_1}{2} = -0{,}1 \cdot p_1$ gilt, und deuten Sie diese Gleichung im Hinblick auf die Preisänderung!

Lösung zur Aufgabe 3

Preisänderung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p_2 - p_1$ ist die absolute Preisänderung im gegebenen Zeitraum.

$\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ ist die relative (prozentuelle) Preisänderung im gegebenen Zeitraum.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedeutung beider Terme (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Term $\frac{p_2 - p_1}{2}$ gibt die mittlere Preisänderung pro Jahr im gegebenen Zeitraum an.

$\frac{p_2}{p_1} = 0{,}8 \Rightarrow p_2 = 0{,}8 \cdot p_1$

Durch Einsetzen in $\frac{p_2 - p_1}{2}$ folgt $\frac{0{,}8 \cdot p_1 - p_1}{2} = -0{,}1 \cdot p_1$.

Mögliche Deutungen:

Der Preis sinkt in diesem Zeitraum pro Jahr durchschnittlich um 10 % des Ausgangspreises.

Die durchschnittliche Preisabnahme beträgt in diesem Zeitraum $0{,}1 \cdot p_1$ pro Jahr.

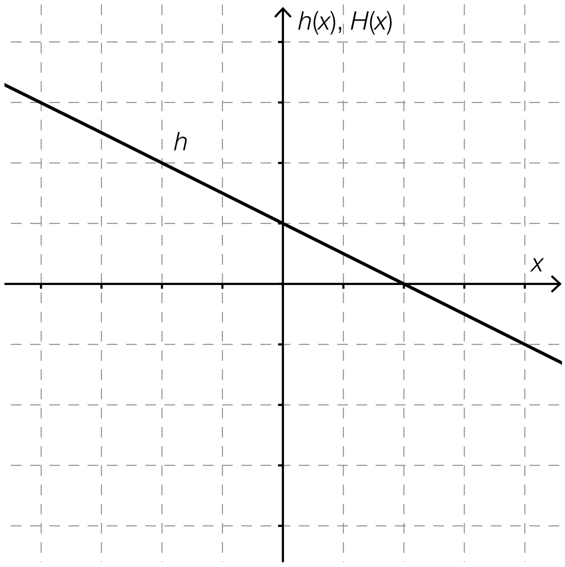
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedeutung des Terms $\frac{p_2 - p_1}{2}$ (sinngemäß) korrekt erläutert wird, die Gültigkeit der angegebenen Gleichung gezeigt wird und die Gleichung (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Aufgabe 4

Stammfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer linearen Funktion h.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in obiger Abbildung den Graphen einer Stammfunktion H von h und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Begründen Sie, warum es unendlich viele Stammfunktionen der dargestellten Funktion h gibt, und geben Sie an, worin sich die Graphen dieser Stammfunktionen unterscheiden!

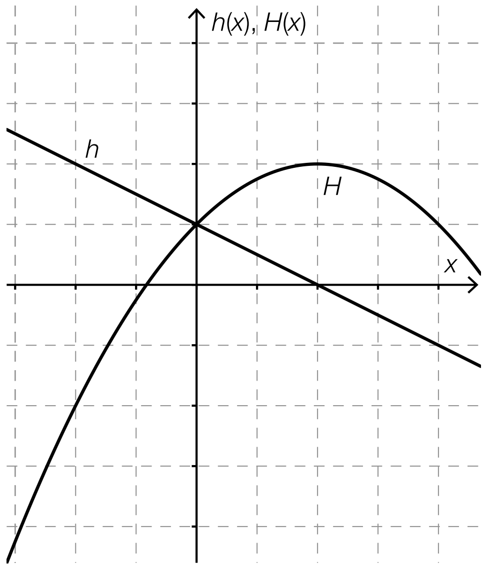
Geben Sie mithilfe der Stammfunktion H einen (allgemeinen) Term zur Berechnung des Integrals $\int_{-10}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x$ an!

Lösung zur Aufgabe 4

Stammfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Da h eine lineare Funktion ist, muss H eine quadratische Funktion sein.
Der x-Wert des Scheitelpunktes von H muss mit der Nullstelle von h übereinstimmen.
Da h monoton fällt, muss der Graph von H vor dem Scheitelpunkt steigen und nach dem Scheitelpunkt fallen (bzw. eine negative Krümmung aufweisen).



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein möglicher Graph für H richtig skizziert wird und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.
Der Funktionswert des Scheitelpunktes kann dabei beliebig gewählt werden, die Symmetrie der Parabel zur Geraden $x = 2$ muss erkennbar sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Wenn H eine Stammfunktion von h ist, so ist auch $H + c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von h, da gilt: $(H + c)' = h$.

Die Funktionsterme der Stammfunktionen unterscheiden sich durch konstante Summanden, was eine vertikale Verschiebung der Graphen bewirkt.

$\int_{-10}^{0} h(x)\mathrm{d}x = H(0) - H(-10)$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) richtig erklärt wird, warum es (unendlich viele) weitere Stammfunktionen von h gibt und worin sie sich unterscheiden.
Weiters müssen zumindest zwei Parabeln (qualitativ) richtig skizziert werden und es muss ein richtiger Term zur Berechnung des bestimmten Integrals angeschrieben werden.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 5

Blutgruppe B

Die relative Häufigkeit der Blutgruppe B in der österreichischen Bevölkerung wird mit p bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Zehn Österreicher/innen werden zufällig ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable H gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in dieser Zufallsstichprobe ($n = 10$) an.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, dass von diesen zehn Personen höchstens eine Person Blutgruppe B hat, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in einer Zufallsstichprobe der Größe $n = 500$ an.

Erklären Sie, was mit den nachstehenden Termen jeweils berechnet wird, und geben Sie an, welcher der beiden Terme den größeren Wert liefert!

- $P\left(500 \cdot p - 2 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1 - p)} \leq X \leq 500 \cdot p + 2 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1 - p)}\right)$
- $P(X \leq 500 \cdot p)$

Lösung zur Aufgabe 5

Blutgruppe B

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

„Höchstens eine Person“ bedeutet: keine oder eine Person.
Daher müssen die beiden Einzelwahrscheinlichkeiten addiert werden.

$(1 - p)^{10}$ ... Wahrscheinlichkeit, dass keine der 10 Personen die Blutgruppe B hat
$p \cdot (1 - p)^9 \cdot 10$ ... Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der 10 Personen die Blutgruppe B hat (dafür gibt es 10 Möglichkeiten)

$\Rightarrow \; P(H \leq 1) = (1 - p)^{10} + p \cdot (1 - p)^9 \cdot 10$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der erste Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in der Stichprobe um höchstens das Zweifache der Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.
Der zweite Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in der Stichprobe maximal dem Erwartungswert entspricht.

Der erste Term liefert den größeren Wert.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Terme (sinngemäß) richtig interpretiert werden und erkannt wird, dass der erste Term den größeren Wert liefert.